0 256180 370000

25-61-80-37
(159.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10-1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Покори Воробьевы горы!"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Карпенко Ивана Анатольевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«07» 04 2024 года

Подпись участника

25-61-80-37 (159.1)

70 (самцесс) ⅩⅠ

Черновик

① $x_{в} = 3$ м/с $S_A = \cancel{x_A t_A}\,(x_A - x)\,t_A$.

$t_A + 150 = t_в$. $S_Б = (x_Б - x)\,t_Б$.

$S_A = S_Б + 500$

$x_A = const$

$x_в = const$

$\underbrace{x_A t_A - x_в t_Б}$ $= x\,(\underbrace{t_A \pm t_Б}_{-150}) + 500$.

$50 = x_A \cdot t_A - x_в t_Б$.

Ответ: 50.

$p^{2t} \pm 2p^t - 4p + 3 = 0$

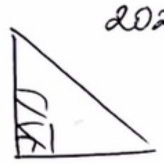
$x^2 \pm 2x - 3 = 0$.

$D = 4$

$x = \frac{2 \pm 4}{2}$

$x = 3$.

② 2025.



45.

1) Разобьем тр как показано на рисунке. Всего тр. будет:

$\frac{45 \cdot 45 \cdot 2}{2} = 45 \cdot 45 = 2025$;

$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ +180 \\ \hline 2025 \end{array}$

$\Rightarrow$ найдутся хотя бы 2 тр, в которых не будет красных точек. И по разбиению внутренних точек у таких любых двух тр нет.

③ $f(2024)$ - ? $f(2024)$

$f(x) = |2x - 1| - |2x - 3| + 6$, при $x \in [0;2]$.

$f(x+3) \le f(x) + 6$. $\frac{2022}{3} \cdot 6$

$f(x+2) \ge f(x) + 4$. $\frac{2024}{2} \cdot 4 =$

$f(2022) + 4 \le f(2024) \le f(2021) + 6$.

$\cancel{f(2019)+10 \le} f(2021) + 6 \le f(2018) + 12$.

$f(0) + 4048 \le f(2024) \le f(2) + 4044$.

$1 - 3 + 6 + 4048 \le f(2024) \le 3 - 1 + 6 + 4044$.

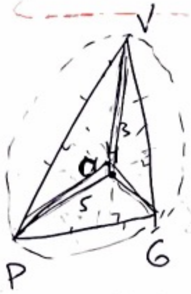
Черновик

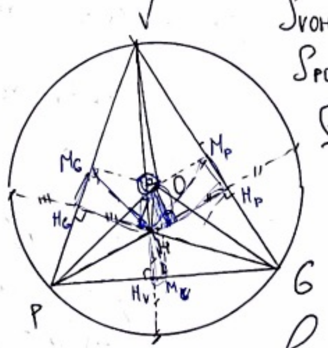
$4052 \le f(2024) \le 4052$

$\Leftrightarrow f(2024) = 4052.$

Ответ: 4052.

(4)





$S_{VOH} = 3.$

$S_{POH} = 5.$

$S_{OHG} - ?$

H – т. пересеч. высот в PVG

O – т. пересеч. сер. пер.

$S_{H_i} = \frac{1}{2} H \cdot i$

$S_{M_i} = \frac{1}{2} M \cdot i$

$S_{трап} = \frac{\cancel{O \cdot M_i} \; (OM_i + OH_i)}{2} \cdot M_iH_i$

$S_{VHH_P} - S_{VM_PO} - \cancel{S_{OPP}}$

$S_{VOH} = S_{VGH_V} \cancel{- S_{VGM_V} - S_{трV}}$

$S_{POH} = \cancel{S_{OM_VP} - S_{PHH_V} - S_{трV}} \; S_{PHHG} - S_{POMG} + S_{трG}.$

$S_{OHG} = S_{OGM_V} - S_{OH_VH} + S_{трV}$

(4)

$3 = \frac{1}{2}\left(HH_P - OM_P - (OM_P + OH_P) M_PH_P\right)$

$5 =$ много раз и все вычисл

$S_{POH} = S_{POM_V} - S_{PHH_V} -$

$S_V\ 3 = S_{VH_PH} - S_{OMPG} - S_{OHMPHPH}$

$S_{OGH} = S_{HHPG} + S_O - S_{OMPG}.$

25-61-80-37
(159.1)

(5) $|2[tg\,a]-1|^x = [tg\,a]^2 + 2$ Черновик

$|2[tg\,a]-1|^x = [tg\,a]^2 + 2 \le 2\sqrt{[tg\,a]^2 \cdot 2}$

$2[tg\,a]\sqrt{2}$

$|2t-1|^x = t^2+2.$ $\frac{\pi}{4}$ $2-1$ $1^x = 1+2.$

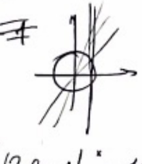
$2 \le [tg\,a]^2 + 2$

$[tg\,a]^2+2 \,\vdots\, |2[tg\,a]-1|$

$1^x = 2$

$\frac{\pi}{3}$ $\sqrt{3}$ $\le 2.$

	d	1	2	3	4	5
mod 3	X	X	V	X	X	X
mod 2	X	V	X	X	X	X
mod 4	X	X	X	X	X	X
mod 5						



$|20-1|^x = 102.$

по mod 3, должен давать 2

mod 3 – 2

mod 2 – 1

$\frac{1}{1-1} =$

mod 4:

	0	1	2	3	4
1	2	3	2	3	
2	1	1	3	1	

т.е по mod 4 не подходит никак.

$\Rightarrow$ ни $[tg\,a]^2+2 \not\vdots\, |2[tg\,a]-1|$

ни $[tg\,a]^2+2 \not\vdots\, |2[tg\,a]-1|$

$\Rightarrow \quad 1 = \left([tg\,a]^2 + 2\right)\left|2[tg\,a] - 1\right|^{|x|}$. Черновик

$\underset{2}{\vee}$ $\in \mathbb{Z}$.

по mod 4 не подходит число.
значит не делится ни 1 ни 2 ни 2 ни 1.

$\Leftrightarrow$ x не может быть > 1.

$0 < x < 1$ тоже.

$\left|2[tg\,a] - 1\right|^x = [tg\,a]^2 + 2$

-3 $\quad 3$

$|2t - 1| = t^2 + 2$. точно $x \geqslant 0$.

имеем $1 =$ это не может быть.

$\begin{cases} t \geqslant \frac{1}{2} - \text{DCO}. \\ t^2 - 2t + 3 \end{cases}$ mod 5.

$\begin{cases} t < \frac{1}{2} \\ t^2 + 2t + 1 = 0. \end{cases}$

$(t+1)^2 = 0$.

-1.

	0	1	2	3	4
1	1	1	3	0	2
2	2	3	1		3

Заметим, что число

$\left|2[tg\,a] - 1\right|^x = [tg\,a]^2 + 2$. ~~нечет~~ mod 5 только 4.

не может делиться на

какое меньше t. Если $0 < x < 1$

$(2[tg\,a] - 1)$ - прост.

т.к. $|2 \cdot 0 - 1|$

$1^x = 1 \neq 2$. Если $x > 1$

19

$19 = |2t - 1|$.

$-9 = t$.

$10 = t$.

$p = 5k + 4$

$[tg\,a]^2 + 2$ - прост.

$-3 \quad \cdot 3$

• Одно из чисел простое.

$[tg\,a] \equiv -1$, т.е $[tg\,a] < 0$.

$p = |2[tg\,a] - 1|$

$\pm p = 2[tg\,a] - 1$

$[tg\,a] = \frac{\pm p + 1}{2}$.

$p = 3$

$x = 1$

Пусть $x > 1$, $[tg\,a]^2 + 2 = p$ - простое.

$|2[tg\,a] - 1|^x = \circ$

$9 \cdot 3$.

$3^x = \frac{9 \pm 3}{2}$

$p^x = [tg\,a]^2 + 2$.

$p^x = \frac{8 + p^2 + 1 \pm 2p}{4}$

$p^x = \frac{8 + (\pm p + 1)^2}{4}$

$4p^x = p^2 + 9 \pm 2p$. $p \in \mathbb{Z}$.

~~$4 = 1 + 9 \pm 2$.~~

$4 \cdot 3^x = 18 \pm 6$. т.е если $x > 3$, то $p = 1, 3, 9, -1, -3, -9$.

$4 \cdot 9^x = \frac{45 \pm 9}{2}$ ~~x~~.

$4 \cdot (-3)^x = \frac{9 \pm 3}{2}$.

25-61-80-37
(159.1)

Черновик.

1. Если $x > 1$, то единств. реш $x = 1$.

2. Если $0 < x < 1$, то единств. решение. ~~Имеет~~ таких.

$p = [tg\,a]^2 + 2$.

$\pm\sqrt{p - 2} = [tg\,a]$.

$|2[tg\,a] - 1| = p^{\frac{1}{x}}$

$p^{\frac{1}{x}} = \left|\pm 2\sqrt{p - 2} - 1\right|$ $\nearrow$ $\pm p^{\frac{1}{x}} = \pm 2\sqrt{p - 2} - 1$.

~~$1 \pm p^{\frac{1}{x}} = \pm 2\sqrt{p - 2}$~~

$p \geqslant 2$.

$p^{\frac{1}{x}} = \pm 2\sqrt{p - 2} - 1$.

$p^{\frac{2}{x}} + 2p^{\frac{1}{x}} + 1 = 4p - 8$.

$1 - p^{\frac{1}{x}} = \pm 2\sqrt{p - 2}$.

$p^t 4 - 2p^t - 4p + 5 = 0$.

$1, 5$.

$1 - 2 - 4 + 5$ ✓

$p^{\frac{1}{x}} - 1 = 2\sqrt{p - 2}$!

нет решен.

$p^{2t} - 2p^t = 15 = 0$.

$5^{2t} - 2 \cdot 5^t - 15 = 0$

$D = 4 + 6 \cdot 64$.

$\frac{2 \pm 8}{2}$ $\quad 5$. $t = 1$.

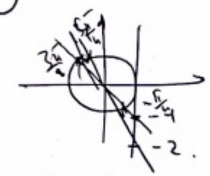
$\Leftrightarrow$ одно решение $\underline{\underline{x = 1}}$, $p = 3$.

$3 = \left|2[tg\,a] - 1\right|$. $\quad [tg\,a] = -1$.

$\pm 3 + 1 = 2[tg\,a]$.

$-2 \leqslant tg\,a < tg$

$-1 = [tg\,a]$



$a \in$ ~~$[-arctg(2) + \pi + 2\pi n;$~~

$(-arctg(2) + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n)$ $n \in \mathbb{Z}$.

Чистовик.

① $x = 3$ м/с. Из условия нужно найти $|x_A t_A - x_B t_B|$

$t_A + 150 = t_B$ ~~когда~~ t_A, t_B – время в воздухе, которое

$S_A = S_B + 500$ не зависит от погодных условий, т.е

x_A, x_B и при ветре и без $t_A = const$, $t_B = const$.

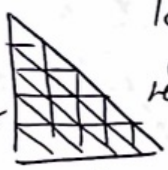
x_A, x_B – скорости Альфа и Бета соответственно.

Из условия:

$$\begin{cases} t_A + 150 = t_B \\ (x_A - x) t_A = (x_B - x) t_B + 500 \end{cases} \Leftrightarrow x_A t_A - x_B t_B = x(t_A - t_B) + 500$$

$$x_A t_A - x_B t_B = -3 \cdot 150 + 500 = 50.$$

Ответ: Альфа, на 50м.

② 

45

45

Разрежем прав. тр. со сторонами 45 по клеточкам на ~~ао~~ маленькие со стороной 1 так как на рис. Тогда кол-во таких треуг. будет: $\frac{45 \cdot 45 \cdot 2}{2} = 45 \cdot 45 = 2025$. Всего точек 2023 => будет верно, что найдется хотя бы 2 треугольника со стороной 1, в которых не будут лежать красные точки. Из разбиения 2 треугольники не будут иметь общ. внутренние точки => мы нашли нужное ~~по~~ условие.

Ответ: да, можно.

Чистовик

③ $f(x+3) \le f(x) + 6$.
$f(x+2) \ge f(x) + 4$. Тогда будет верно, что

$f(2020)+4+4 \le f(2022)+4 \le f(2024) \le f(2021) + 6 \le f(2018)+6+6$

...

тогда $\Leftrightarrow$ $f(0)+4\cdot\frac{2024}{2} \le f(2024) \le f(2) + 6\cdot\frac{2022}{3}$.

$f(0) + 4048 \le f(2024) \le f(2) + 4044$.

$f(0) = |2\cdot0-1| - |2\cdot0-3| + 6 = 4$

$f(2) = |2\cdot2-1| - |2\cdot2-3| + 6 = 8$.

$4052 \le f(2024) \le 4052$.

$\Leftrightarrow f(2024) = 4052$

Ответ: 4052.

⑤ $|2[\operatorname{tg} a]-1|^x = [\operatorname{tg} a]^2 + 2$

Заметим, что $\begin{cases} |2[\operatorname{tg} a]-1| \ge 0 \\ [\operatorname{tg} a]^2 + 2 \ge 2 \end{cases} \Rightarrow x > 0$, иначе $1 = ([\operatorname{tg} a]^2+2)^{?}|2[\operatorname{tg} a]-1|^{?}$ не может быть. $\in \mathbb{Z}$

$\cdot\ x > 0$

~~Рассм~~ ~~Пусть~~ Тогда одно из чисел будет равно степени другого, т.е либо $|2[\operatorname{tg} a]-1| \vdots [\operatorname{tg} a]^2+2$

либо ~~$2\operatorname{tg}$~~ $[\operatorname{tg} a]^2+2 \vdots |2[\operatorname{tg} a]-1|$

Чистовик

Пусть ~~одно из~~ число t - их ~~общий делитель~~ делитель $[\operatorname{tg} a]$,

тогда $|2[\operatorname{tg} a]-1| \equiv_t 1$ т.е если $[\operatorname{tg} a]$ делится на какое-то $t < [\operatorname{tg} a]$, то равенство не может быть

$[\operatorname{tg} a]^2 + 2 \equiv_t 2$ для ~~x~~ x рациональных.

Тогда либо, если $x \ge 1$ $|2[\operatorname{tg} a]-1| = p$

либо, если $0<x<1$ $[\operatorname{tg} a]^2 + 2 = p$, где p-простое.

иначе $[\operatorname{tg} a]$ будет иметь разные остатки ~~на~~ дел.

1) если $x \ge 1$, $|2[\operatorname{tg} a]-1| = p$.

$[\operatorname{tg} a] = \frac{\pm p + 1}{2}$

$p^x = \frac{p^2 \pm 2p + 1}{4} + 2$.

$4p^x = p^2 \pm 2p + \underbrace{1 + 8}_{=9}$.

т.к $p \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ ~~p~~ $p = 1, 3, 9, -1, -3, -9$.

~~$p=1$~~ При подстановке подходит только $p = 3$ и при этом случае $x = 1$.

2) $0 < x < 1$, $[\operatorname{tg} a]^2 + 2 = p$.

$[\operatorname{tg} a] \pm\sqrt{p-2}$

$|\pm2\sqrt{p-2} - 1| = p^{\frac{1}{x}}$.

$\pm p^{\frac{1}{x}} = \pm 2\sqrt{p-2} - 1$.

$1 \pm p^{\frac{1}{x}} = \pm 2\sqrt{p-2}$.

$\left[\begin{array}{l} 1 + p^{\frac{1}{x}} = \pm 2\sqrt{p-2} \\ 1 - p^{\frac{1}{x}} = -2\sqrt{p-2} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} p^{\frac{2}{x}} + 2p^{\frac{1}{x}} + 1 - 4p + 8 = 0. \\ p^{\frac{2}{x}} - 2p^{\frac{1}{x}} + 1 - 4p + 8 = 0. \end{array}\right.$

$t = \frac{1}{x}$.

$p^{2t} \pm 2p^t - 4p + 9 = 0$.

Аналогично $p = 1, 3, 9, -1, -3, -9$.

И при подстановке подойдет только $t = 1$, $x = 1$, но из ограничения он сходит.

Чистовик

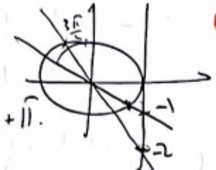
Чистовик.

$\Rightarrow$ x - рационально только при

$x=1,\ |2[\operatorname{tg} a]-1| = [\operatorname{tg} a]^2+2 = 3$

$\Leftrightarrow\ -1=[\operatorname{tg} a]$

$-2 < \cancel{t}\operatorname{tg} a \le -1.$

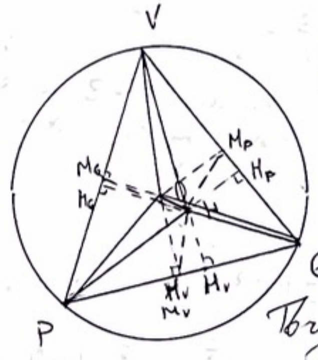


$\frac{3\pi}{4} \le a < \operatorname{arctg}(2)+\pi.$

$a \in \left[\frac{3\pi}{4}+\pi n;\ \pi-\operatorname{arctg}(2)+\pi n\right)\ n\in\mathbb{Z}.$

Ответ: $\left[\frac{3\pi}{4}+\pi n;\ \pi-\operatorname{arctg}(2)+\pi n\right)$ $n\in\mathbb{Z}$

4



$S_{OHP}=5$

$S_{OHV}=3.$

Проведем из т. O и #сер. пер. на стороны в $\triangle PVG$.

Тогда рассмотрим площади тан $\triangle$.

$$\begin{cases} S_{OHP} = S_{OPM_V} + S_{OHM_V} - S_{HPM_V} \\ S_{OHV} = S_{OVM_P} + S_{OHM_P} - S_{VHM_P} \\ S_{OHG} = S_{OGM_V} - S_{OHM_V} - S_{HGM_V} \\ S_{OHG} = -S_{OGM_P} + S_{HGM_P} + S_{OHM_P} \end{cases}$$

Откуда

Чистовик

$$\begin{cases} 5 = S_{OGM_V} + S_{OHM_V} - S_{GHM_V} \\ S_{OHG} = S_{OGM_V} - S_{OHM_V} - S_{GHM_V}. \end{cases}$$

$S_{OHG} = 5 - 2S_{OHM_V}$

$5+S_{OHG} = 2S_{OGM_V} - 2S_{GHM_V} = 2S_{OHM_V} + 2S_{OHG} = 2\cdot GM_V(M_VO-H_VO).$

~~$\begin{cases} 3 = S_{OGM_P} + S_{OHM_P} - S_{GHM_P}. \\ S_{OHG} = -S_{OGM_P} + S_{HGM_P} + S_{OHM_P}. \end{cases}$~~

~~$S_{OHG} = 3 - 2S_{OHM_B} - 3.$~~

~~$S_{OHG} = 3 + 2S_{OHM_P} + 2S_{OHM_P} - 2S_{OGM_P}$~~

~~$S_{GM_P} = 1 + S_{HM_B} - S_{HM_V}$~~

$\begin{cases} S_{OHP} = \\ S_{OHV} = \end{cases}$ ~~Анал~~

$5+S_{OHG} = \cancel{5}+ 2\cdot PG\cdot(M_VO-H_VO) = PG\cdot M_GH_G$

Аналогично.

$$\begin{cases} 5+3 = PV\cdot|M_GO-H_GO| = PV\cdot M_PH_P \\ S_{OHG}+3 = VG\,|M_PO-H_PO| = VG\cdot M_PH_P \end{cases}$$

$S_{OHG} = \dfrac{VG\cdot M_PH_P + PG\cdot M_GH_G - PV\cdot M_PH_P}{2} =$

$= \dfrac{VG\cdot M_PH_P + PG\cdot M_GH_G}{2} - 4 = \dfrac{2(3+5)}{2} - 4 = 4$

Ответ: 4.