0 292249 870005

29-22-49-87
(178.3)

вых. 13.31
вх.: 13.35

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант А-3

Место проведения Пенза
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Кириллова Андрея Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«7» АПРЕЛЯ 2024 года

Подпись участника

Чистовик
Страница 1

85 (Восемьдесят шесть)

$\boxed{№1}$

Пусть: v_α – собственная скорость модели Альфа;
v_β – собственная скорость модели Бета;
v – скорость ветра (из условия: $v = 3\frac{м}{с}$)
t_α – время нахождения модели Альфа в воздухе
t_β – время нахождения модели Бета в воздухе

Тогда: $(v_\alpha - v)$ – скорость модели Альфа при встречном ветре;
$(v_\beta - v)$ – скорость модели Бета при встречном ветре.

Следовательно: $(v_\alpha - v)t_\alpha$ – расстояние, которое пролетела модель Альфа при встречном ветре;
$(v_\beta - v)t_\beta$ – расстояние, которое пролетела модель Бета при встречном ветре;
$v_\alpha t_\alpha$ – расстояние, которое пролетит модель Альфа при безветренной погоде;
$v_\beta t_\beta$ – расстояние, которое пролетит модель Бета при безветреной погоде.

По условию:

$$\begin{cases} t_\alpha = t_\beta - \Delta t \ (\text{здесь } \Delta t = 300\,с) \Leftrightarrow t_\beta = t_\alpha + \Delta t \quad (1) \\ (v_\alpha - v)t_\alpha = (v_\beta - v)t_\beta + \Delta S_1 \ (\text{здесь } \Delta S_1 = 700\,м) \quad (2) \end{cases}$$

Из (1) и (2): $\underbrace{(v_\alpha - v)t_\alpha}_{v_\alpha t_\alpha - vt_\alpha} = \underbrace{(v_\beta - v)(t_\alpha + \Delta t)}_{v_\beta(t_\alpha + \Delta t) - v(t_\alpha + \Delta t)} + \Delta S \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{v_\alpha t_\alpha - v_\beta (t_\alpha + \Delta t)}_{\Delta S_2} = \cancel{vt_\alpha} - \cancel{vt_\alpha} - v\Delta t + \Delta S =$

ΔS_2 (~~кот~~ модуль которого нужно найти)

$= \Delta S - v\Delta t = 700\,м - 3\frac{м}{с} \cdot 300\,с = -200\,м < 0$

Таким образом, при безветренной погоде: $v_\alpha t_\alpha < v_\beta t_\beta \Rightarrow$
$\Rightarrow$ модель Бета пролетит большее расстояние, чем модель Альфа, причём на $|\Delta S_2| = \boxed{200\,м}$

Ответ: модель Бета пролетит расстояние на 200 м большее, чем модель Альфа при безветренной погоде

Чистовик
Страница 2

№2

~~Заметим, что $f(x)+12$~~

Так как $f(x+3) \le f(x)+6$, то $f(x+6) = f((x+3)+3) \le$
$\le f(x+3)+6 \le (f(x)+6)+6 = f(x)+12$ (1)

Так как $f(x+2) \ge f(x)+4$, то $f(x+6) = f((x+4)+2) \ge f(x+4)+$
$+4 = f((x+2)+2)+4 \ge (f(x+2)+4)+4 = f(x+2)+8 \ge (f(x)+$
$+4)+8 = f(x)+12$ (2)

Из (1) и (2): $f(x)+12 \le f(x+6) \le f(x)+12$. Если точнее, то:
$f(x)+12 \le f(x+2)+8 \le f(x+4)+4 \le f(x+6) \le f(x+3)+6 \le f(x)+12$ (3)

~~Иными словами, мы получили $f(x)+12 \le f(x)+12$. Это выполняется только тогда, когда~~ Противоречия не возникает тогда и только тогда, когда вместо „$\le$" в (3) стоит „$=$" (иначе $f(x)+12 < f(x)+12$, чего не может быть). Значит:

$$\begin{cases} f(x)+12 = f(x+2)+8 \Leftrightarrow f(x+2) = f(x)+4 \ (4) \\ f(x+2)+8 = f(x+4)+4 \xrightarrow{(4)} f(x+4) = f(x)+8 \\ f(x+4)+4 = f(x+6) \xrightarrow{(4)} f(x+6) = f(x)+12 \ (5) \\ f(x+6) = f(x+3)+6 \\ f(x+3)+6 = f(x)+12 \Leftrightarrow f(x+3) = f(x)+6 \end{cases}$$

(как видим, нет несостыковок)

Таким образом: $f(2024) = f(6\cdot 337+2) =$ ~~(из (5)) $f(2) = f(2+0)$~~ $=$
$=$ (заметим, что из (5): $f(x+6\cdot n$ (здесь $n \in \mathbb{N})) = f((x+6\cdot(n-1))+6) = f(x+6(n-1))+12 =$
$=$ (аналогично делаем $(n-1)$ шаг) $f(x)+12n$)
$= f(2)+12\cdot 337 = f(2+0)+2\cdot 2022 =$ (из (4)) $(f(0)+4)+4044 =$ (так как $0 \in [-2;0]$)
$= (|2\cdot 0+3| - |2\cdot 0+1| + 4) + 4048 =$
$= (|3|-|1|+4) + 4048 = (3-1) + 4052 = \boxed{4054}$

```
-2024 | 6
 18   |----
 --   | 337
 -22
  18
  --
  -44
   42
   --
    2
```

Ответ: 4054

Отметим, что если $x \in \mathbb{Z}$, то $\forall m \in \mathbb{N}$: $(x \pm m) \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ наши рассуждения корректны.

29-22-49-87
(178.3)

Чистовик
Страница 3

№3 (Часть 1)

$36\cos(x+\cos(x))\cos(x-\cos(x))+9=\pi^2 \Leftrightarrow$ (по формуле произведения косинусов) $36\cdot\frac{1}{2}(\cos((x+\cos(x))+(x-\cos(x))) +$
$+\cos((x+\cos(x))-(x-\cos(x)))) = \pi^2-9 \Leftrightarrow 18(\cos(2x)+$
$+\cos(2\cos(x))) = \pi^2-9 \Leftrightarrow$ (по формуле косинуса двойного угла) $18((2\cos^2(x)-1)+(2\cos^2(\cos(x))-1)) = \pi^2-9 \Leftrightarrow$ (пусть $t=\cos(x) \Rightarrow t\in[-1;1]$) $18(2t^2+2\cos^2(t)-2) = \pi^2-9 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 36(t^2-(1-\cos^2(t))) = \pi^2-9 \Leftrightarrow$ (по основному тригонометрическому тождеству) $36(t^2-\sin^2(t)) =$
$= \pi^2-9 \Leftrightarrow$ (пусть $f(t) = t^2-\sin^2(t)$; $c = (\frac{\pi}{6})^2-(\frac{1}{2})^2$) $f(t) = (\frac{\pi}{6})^2-(\frac{1}{2})^2$.

Заметим, что $f'(t) = 2t - 2\sin(t)\cdot\cos(t) = 2t-\sin(2t)$,
а $f''(t) = 2-2\cos(2t) = 2(1-\cos(2t)) \ge 0 \Rightarrow f'(t)\nearrow$ на $\mathbb{R}$.
При $t=-1$: $f'(t) = -2-\sin(-2) \le -2-(-1) = -1 < 0$; при
$t=1$: $f'(t) = 2-\sin(2) \ge 2-1 = 1 > 0 \Rightarrow f'(t)$ на $[-1;1]$
принимает значение 0 ровно в одной точке (так как ~~$f'(t)\nearrow$, при этом~~ $f'(t)$ непрерывно $\nearrow$ (и строго, так как $f''(t)=0$ только при $\cos(2t)=1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2t = 2\pi k_s$ $(k_s\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow t=\pi k_s$, а это отдельные точки),
при этом $f'(-1) < 0 < f'(1)$). Её легко найти подбором: $f'(t) =$
$=0$ при $t=0 \Rightarrow f(t)\searrow$ на $(-\infty;0]$ и $f(t)\nearrow$ на $[0;+\infty)$,
при этом $t=0$ — точка минимума $f(t)$.

При $t=0$: $f(t) = 0-0 = 0 < c$ (так как ~~$\pi^2>9$, в~~ $\pi^2-9 =$
$= (\pi-3)(\pi+3) > 0$) $\Rightarrow f(t)$ принимает значение c ровно в 2 точках. Их легко подобрать: $f(t)=c$ при
$t\in\{-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\}$ (так как $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ и $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$).

Отметим, что $\frac{\pi}{6} \in (\frac{3{,}14}{6};\frac{3{,}15}{6}) \subset (\frac{1}{2};1) \Rightarrow -\frac{\pi}{6} \in (-1;-\frac{1}{2})$.
Значит всё корректно.

Чистовик
Страница 4

№3 (часть 2)

Итак:

$t=-\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \cos(x)=-\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\cancel{\pi-\arccos} \arccos(-\frac{\pi}{6})+2\pi k_1 \ (k_1\in\mathbb{Z}) \\ x=-\arccos(-\frac{\pi}{6})+2\pi k_2 \ (k_2\in\mathbb{Z}) \end{array}\right.$

$t=\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \cos(x)=\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\arccos(\frac{\pi}{6})+2\pi k_3 \ (k_3\in\mathbb{Z}) \\ x=\arccos(\frac{\pi}{6})+2\pi k_4 \ (k_4\in\mathbb{Z}) \end{array}\right.$

Заметим, что $\arccos(-\frac{\pi}{6})=\pi-\arccos(\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \arccos(-\frac{\pi}{6})+2\pi k_1=-\arccos(\frac{\pi}{6})+\pi(2k_1+1)$, а $-\arccos(-\frac{\pi}{6})+2\pi k_2=\arccos(\frac{\pi}{6})+\pi(2k_2-1)$. Значит $\boxed{\pm\arccos(\frac{\pi}{6})+\pi k}$ – общий вид корней уравнения. Но чтобы понять, какие из них лежат в отрезке $[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{3}]$, нам понадобятся изначальные ~~виды~~ корней (но с преобразованным ~~1) arccos(~~ $\arccos(-\frac{\pi}{6})$) ~~и учётом~~.

~~1) $-\arccos(\frac{\pi}{6})+\pi+2\pi k_1\in[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{3}]\Leftrightarrow$~~

1) $-\arccos(\frac{\pi}{6})+\pi+2\pi k_1\in[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{3}]\Leftrightarrow k_1\in\left[\frac{\arccos(\frac{\pi}{6})-\frac{3\pi}{4}}{2\pi};\frac{\arccos(\frac{\pi}{6})+\frac{2\pi}{3}}{2\pi}\right]$. Заметим, что $\frac{\pi}{6}\in(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$ (так как во-первых, $\pi>3$, а во-вторых, $\pi<4<4{,}2=3\cdot1{,}4<3\sqrt{2}$ (так как $1{,}96<2$)) $\Rightarrow \arccos(\frac{\pi}{6})\in(\arccos(\frac{\sqrt{2}}{2});\arccos(\frac{1}{2}))=(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3})$. Используем это здесь (и дальше): $\frac{\arccos(\frac{\pi}{6})-\frac{3\pi}{4}}{2\pi}\in\left(\frac{\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}}{2\pi};\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}}{2\pi}\right)=\left(\frac{-\frac{\pi}{2}}{2\pi};\frac{-\frac{5\pi}{12}}{2\pi}\right)=\left(-\frac{1}{4};-\frac{5}{24}\right)$, ~~$\Rightarrow$ подходящих k_1 нет~~

~~2) $\arccos(\frac{\pi}{6})-\pi+2\pi k_2\in[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{3}$~~ $\frac{\arccos(\frac{\pi}{6})+\frac{2\pi}{3}}{2\pi}\in\left(\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}}{2\pi};\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}}{2\pi}\right)=\left(\frac{11}{24};\frac{1}{2}\right)$. Значит $k_1\in[0;0]\Rightarrow k_1=0\Rightarrow$ ~~подходит~~ подходит только 1 корень I вида – это $\boxed{\pi-\arccos(\frac{\pi}{6})}$

2) $\arccos(\frac{\pi}{6})-\pi+2\pi k_2\in[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{3}]\Leftrightarrow k_2\in\left[\frac{\frac{5\pi}{4}-\arccos(\frac{\pi}{6})}{2\pi};\right.$

29-22-49-87
(178.3)

Чистовик
Страница 5

№3 (часть 3)

$\left.\frac{\frac{8\pi}{3}-\arccos(\frac{\pi}{6})}{2\pi}\right]$. Видим, что $\frac{\frac{5\pi}{4}-\arccos(\frac{\pi}{6})}{2\pi}\in\left(\frac{\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{3}}{2\pi};\frac{\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}{2\pi}\right)=\left(\frac{11}{24};\frac{1}{2}\right)$ и $\frac{\frac{8\pi}{3}-\arccos(\frac{\pi}{6})}{2\pi}\in\left(\frac{\frac{8\pi}{3}-\frac{\pi}{3}}{2\pi};\frac{\frac{8\pi}{3}-\frac{\pi}{4}}{2\pi}\right)=\left(\frac{7}{6};\frac{29}{24}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow k_2\in[1;1]\Rightarrow k_2=1\Rightarrow$ подходит лишь 1 корень II вида – это $\boxed{\pi+\arccos(\frac{\pi}{6})}$

3) $\arccos(\frac{\pi}{6})+2\pi k_3\in[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{3}]\Leftrightarrow k_3\in\left[\frac{\frac{\pi}{4}-\arccos(\frac{\pi}{6})}{2\pi};\frac{\frac{5\pi}{3}-\arccos(\frac{\pi}{6})}{2\pi}\right]$.

Видим, что $\frac{\frac{\pi}{4}-\arccos(\frac{\pi}{6})}{2\pi}\in\left(\frac{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}}{2\pi};\frac{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}{2\pi}\right)=\left(-\frac{1}{24};0\right)$ и $\frac{\frac{5\pi}{3}-\arccos(\frac{\pi}{6})}{2\pi}\in\left(\frac{\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{3}}{2\pi};\frac{\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{4}}{2\pi}\right)=\left(\frac{2}{3};\frac{17}{24}\right)\Rightarrow k_3\in[0;0]\Rightarrow$

$\Rightarrow k_3=0\Rightarrow$ подходит лишь 1 корень III вида – это $\boxed{\arccos(\frac{\pi}{6})}$

4) $-\arccos(\frac{\pi}{6})+2\pi k_4\in[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{3}]\Leftrightarrow k_4\in\left[\frac{\frac{\pi}{4}+\arccos(\frac{\pi}{6})}{2\pi};\frac{\frac{5\pi}{3}+\arccos(\frac{\pi}{6})}{2\pi}\right]$.

Видим, что $\frac{\frac{\pi}{4}+\arccos(\frac{\pi}{6})}{2\pi}\in\left(\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}}{2\pi};\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}}{2\pi}\right)=\left(\frac{1}{4};\frac{7}{24}\right)$ и $\frac{\frac{5\pi}{3}+\arccos(\frac{\pi}{6})}{2\pi}\in\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{4}}{2\pi};\frac{\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{3}}{2\pi}\right)=\left(\frac{23}{24};1\right)\Rightarrow k_4\in$ ~~[1;0]~~ ~~(видим, что бред)~~ $\in(0;1)$ (противоречие с целостностью)

Ответ: $\pm\arccos(\frac{\pi}{6})+\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$ – общий вид корней; сумма корней, принадлежащих $[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{3}]$, равна $\arccos(\frac{\pi}{6})+2\pi$

Итак, сумма ~~допустимых~~ 3 корней, лежащих в $[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{3}]$, равна $(\pi-\arccos(\frac{\pi}{6}))+(\pi+\arccos(\frac{\pi}{6}))+\arccos(\frac{\pi}{6})=\boxed{\arccos(\frac{\pi}{6})+2\pi}$

Чистовик
Страница 6

№5 (Часть 1)

$y = x^2 + px + q$

Если $x = 0$, то $y = q \Rightarrow C = (0; q)$

Если $y = 0$, то $x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2-4q}}{2} \Rightarrow$ (пусть A левее B) $A = \left(\underbrace{\frac{-p - \sqrt{p^2-4q}}{2}}_{\overset{\text{(пусть)}}{=} x_1}; 0\right)$ и $B = \left(\underbrace{\frac{-p + \sqrt{p^2-4q}}{2}}_{\overset{\text{(пусть)}}{=} x_2}; 0\right) \Rightarrow AB = \sqrt{p^2-4q}$.

Так как D равноудалена от A и B, то она лежит на сер. перп. AB. Но $AB \parallel Ox$ (так как ординаты A и B одинаковы) $\Rightarrow$ сер. перп. $AB \perp Ox \Rightarrow$ ~~координат~~ абсцисса D равна ~~это~~ (из симметрии графика $y = x^2 + px + q$, то есть параболы) $\frac{x_1 + x_2}{2} =$ (по теореме Виета) $-\frac{p}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ордината D равна $\underbrace{(-2022)}_{\text{(из условия)}} - \left(-\frac{p}{2}\right) = \frac{p}{2} - 2022$.

Итак, $D = \left(-\frac{p}{2}; \frac{p}{2} - 2022\right)$. Далее $CD = AD \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow CD^2 = AD^2 \Leftrightarrow (x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 = (x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2 \Leftrightarrow (\overset{0}{x_C} - x_A)(\overset{0}{x_C} + x_A - 2x_D) = (\overset{0}{y_A} - y_C)(\overset{0}{y_A} + y_C - 2y_D) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x_1(x_1 + p) = -q(q - p + 4044) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (пусть $\sqrt{p^2-4q} = \underset{\geq 0}{t} \Rightarrow q = \frac{p^2-t^2}{4}$ $(D = p^2 - 4q > 0$ (2 корня$))$ и $x_1 = -\frac{p+t}{2}$) $\frac{p+t}{2}\left(p - \frac{p+t}{2}\right) = -\frac{p^2-t^2}{4}\left(\frac{p^2-t^2}{4} - p + 4044\right) \Leftrightarrow 8p(p+t) - 4(p+t)^2 = -(p^2-t^2)^2 + 4p(p^2-t^2) - 16176(p^2-t^2) \Leftrightarrow 4p^2 - 4t^2 = -p^4 - t^4 + 2p^2t^2 + 4p^3 - 4pt^2 - 16176p^2 + 16176t^2 \Leftrightarrow (p^2 - t^2)(4 + (p^2 - t^2) - 4p + 16176) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 0 \\ 4 + 4q - 4p + 16176 = 0 \Leftrightarrow q = p - 4045 \end{array}\right.$

Если бы $q = 0$, то $C \in Ox \Rightarrow$ сер. перп. к AC и сер. перп. к $BC \parallel$ друг к другу. Противоречие $\Rightarrow q \neq 0 \Rightarrow q = p - 4045$

(см. страницу 10)

Чистовик
Страница 7

№6 (Часть 1)

$|2[tg(x)] + 1|^x = [tg(x)]^2 + 2$

Если $x \in \mathbb{Q}$, то $x = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$; $q \in \mathbb{N}$). Пусть $[tg(x)] = b$ (где $b \in \mathbb{Z}$). Тогда:

$|2b + 1|^{\frac{p}{q}} = b^2 + 2 \Leftrightarrow |2b+1|^p = (b^2+2)^q$

$\left\{\begin{array}{l} b^2 + 2 \geq 2 \\ q \geq 1 \end{array}\right. \Rightarrow (b^2+2)^q \geq 2 \Rightarrow p \neq 0$ (иначе $1 \geq 2$, чего не может быть)

Пусть $(b^2+2) \vdots k$ (где k – простое число). Так как $b^2 + 2 \geq 2 > 1$, то такое k $\exists$. Так как $p \neq 0$ и $q \neq 0$, то $|2b+1| \vdots k$. Очевидно, что тогда $(2b+1) \vdots k \Rightarrow ((b^2 + \overset{1}{2}) - (2b + \overset{0}{1})) \vdots k \Rightarrow \underset{(b-1)^2}{}$ $(b-1) \vdots k \Rightarrow$

$\Rightarrow b = mk + 1$ ($m \in \mathbb{Z}$) $\Rightarrow b^2 + 2 = (mk+1)^2 + 2 = (k(m^2k + 2m) + 3) \vdots k \Rightarrow 3 \vdots k \Rightarrow k = 3$. Кстати, если $(2b+1) \vdots k$, то (аналогично) $(b^2+2) \vdots k \Rightarrow$

$\Rightarrow 2b + 1 = 3^n$ ($n \in \mathbb{N}$; если бы $n = 0$, то $b^2 + 2 = 1$, чего не может быть). А ещё $\underbrace{b^2 + 2 = 3^s}_{\text{(ясно, что } s \in \mathbb{N})}$. Если найдём хоть какие-то n и s, то дальше можно взять $p = s$ и $q = n$, и всё ($x = \frac{s}{n}$ – наши)

$\left\{\begin{array}{l} 2b + 1 = 3^n \Leftrightarrow b = \frac{3^n - 1}{2} \\ b^2 + 2 = 3^s \end{array}\right. \Longrightarrow \frac{3^{2n} - 2\cdot 3^n + 1}{4} + 2 = 3^s \Leftrightarrow 3^{2n} - 2\cdot 3^n + 9 = 4\cdot 3^s$.

Пусть $s = 1$ и $n = 1 \Rightarrow 9 - 6 + 9 = 12$ (подходит).

Пусть $s \geq 2$ и $n = 1 \Rightarrow 9 - 6 + 9 = 4 \cdot 3^s \Rightarrow s = 1$ (противоречие).

Пусть $s = 1$ и $n \geq 2 \Rightarrow 3^{2n} - 2\cdot 3^n + \overset{0}{9} = \overset{3}{12} \Leftrightarrow \underset{\vdots 3}{3^{2n-1}} - \underset{\vdots 3}{2\cdot 3^{n-1}} = 1$. Снова противоречие.

Пусть $s \geq 2$ и $n \geq 2 \Rightarrow 3^{2n-2} - 2\cdot 3^{n-2} + 1 = 4\cdot 3^{s-2}$. Если $n = 2$, то $\underset{8}{9} - \underset{0}{2} + \underset{0}{1} = 4 \cdot 3^{s-2} \Leftrightarrow 3^{s-2} = 2$ (невозможно) $\Rightarrow n \geq 3 \Rightarrow$

Чистовик
Страница 8

№5 (часть 2)

$\Rightarrow 3^{n-2} \vdots 3$ и $2 \cdot 3^{n-2} \vdots 3 \Rightarrow (4 \cdot 3^{s-2} - 1) \vdots 3$. Это возможно только при $s = 2$ (тогда $4 - 1 = 3 \vdots 3$) $\Rightarrow 3^{2n-2} - 2 \cdot 3^{n-2} + k^0 = k^3 \Leftrightarrow \underset{\vdots 3}{3^{2n-3}} - 2 \cdot 3^{n-3} = 1 \Rightarrow (2 \cdot 3^{n-3} + 1) \vdots 3$. Это возможно только при $n = 3$ (тогда $2 + 1 = 3 \vdots 3$).

Итак, $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} n=1 \\ s=1 \end{cases} \Rightarrow 9 - 6 + 9 = 4 \cdot 3 \text{ (верно)} \\ \begin{cases} n=3 \\ s=2 \end{cases} \Rightarrow 729 - 54 + 9 = 4 \cdot 9 \text{ (неверно).} \end{array}\right.$

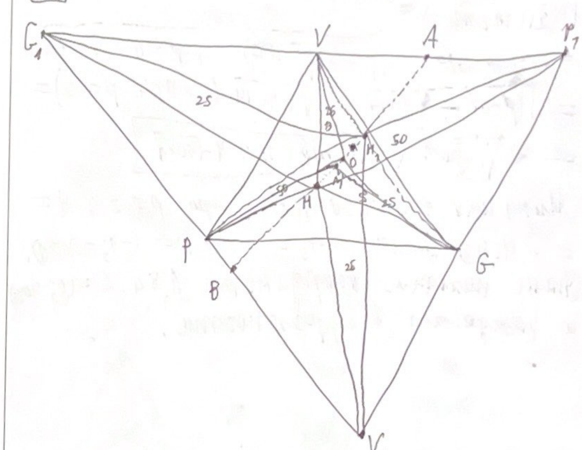
Итак, в $s = n = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2b + 1 = 3 \Leftrightarrow b = 1 \Leftrightarrow [tg(a)] = 1 \Leftrightarrow \\ b^2 + 2 = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow tg(a) \in [1; 2)$. Вспомним, что $tg(a)$ — периодическая функция (с min периодом π) $\Rightarrow$ рассмотрим $a \in [0; \frac{\pi}{2}) \vee (\frac{\pi}{2}; \pi)$ (так как на $[0; \pi)$; $a \neq \frac{\pi}{2}$ по ОДЗ). Так как $tg(a) \geq 1 > 0$, то $a \in [0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ (на $[0; \frac{\pi}{2})$: $tg(a)$ — строго возрастающая непрерывная функция) $a \in [arctg(1); arctg(2)) = [\frac{\pi}{4}; arctg(2))$. Осталось только учесть периодичность: $\boxed{a \in [\frac{\pi}{4} + \pi k; arctg(2) + \pi k), k \in \mathbb{Z}}$

$\boxed{\text{Ответ: } [\frac{\pi}{4} + \pi k; arctg(2) + \pi k), k \in \mathbb{Z}}$

Чистовик
Страница 9

№4



При гомотетии отн. M (т. пер. мед. ΔPVG) с коэфф. $-\frac{1}{2}$: $P \to P_1$; $V \to V_1$; $G \to G_1$; $O \to H$ ~~так как~~ (по св. Δ-а), при этом $MO = \frac{MH}{2}$; $H \to H_1$, (при этом $MH_1 = 2HM$. ~~По св. гом.: Так как HO~~ Пусть $OM = x \Rightarrow HM = 2x \Rightarrow MH_1 = 4x \Rightarrow OH_1 = 3x = HO \Rightarrow S_{\Delta HH_1V} = 2S_{\Delta OHV} = 26$; $S_{\Delta HH_1P} = 2S_{\Delta OHP} = 50$; (пусть $S_{\Delta OHG} = S$) $S_{\Delta HH_1G} = 2S_{\Delta OHG} = 25$. ~~Так как $HO = H_1O$, то~~ Пусть $A = (HH_1) \cap VP_1$; $B = (H_1H) \cap PV_1$. $\Rightarrow$ По св. гом.: $S_{\Delta HH_1P_1} = 2S_{\Delta OHP} = 50$; $S_{\Delta HH_1V_1} = 2S_{\Delta OHV} = 26$, $S_{\Delta HH_1G_1} = 2S_{\Delta OHG} = 25$.

Заметим, что $\frac{S_{\Delta HVA}}{S_{\Delta HAP_1}} = \frac{S_{\Delta H_1VA}}{S_{\Delta H_1AP_1}} = \frac{VA}{AP_1} \Rightarrow \frac{VA}{AP_1} = \frac{26^{13}}{50_{25}}$

Чистовик
Страница 10

№5 (часть 2)

Значит $AB = \sqrt{p^2 - 4(p - 4043)} = \sqrt{(p^2 - 4p + 4) + 4\cdot 4044} =$
$= \sqrt{(p-2)^2 + 4\cdot 4044} \geqslant \sqrt{4\cdot 4044}$ ($=$ при $p = 2$) $=$
$= \boxed{4\sqrt{1011}}$ $\boxed{\text{Ответ: } 4\sqrt{1011}}$

Минимум достигается: при $p = 2$; $q = -4043$. Дальше $-\frac{p}{2} = -1 \Rightarrow D = (-1; -2021)$. Далее находим координаты A, B и $C = (0; -4043)$ и убеждаемся в корректности.

№6

Черновик

$|2[tg(\alpha)] + 1|^x = [tg(\alpha)]^2 + 2$

$[tg(\alpha)] = b \in \mathbb{Z}$

~~p>0, то b²~~

$|2b + 1|^x = b^2 + 2$

$|2b+1|^{\frac{p}{q}} = b^2 + 2$

$|2b+1|^p = (b^2+2)^q$

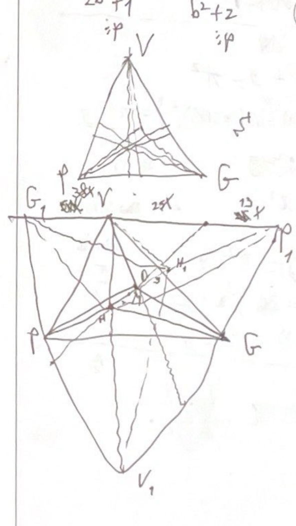
Пусть $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N} \Rightarrow (b^2+2)^q \geqslant 2 > 1 \Rightarrow \begin{cases} b \notin \{-1; 1\} \\ p \neq 0 \end{cases}$

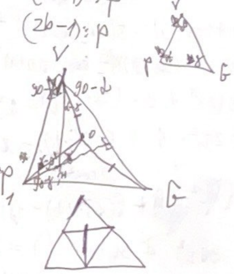
Далее л.ч. $⋮ 2 \Rightarrow b ⋮ 2$

$2b+1 ⋮ p$ $\quad b^2+2 ⋮ p$ $\quad (b^2 - 2b + 1) ⋮ p$

$(b-1) ⋮ p$

$(2b-1) ⋮ p$





Черновик

№1

ветер

$(v_\alpha - 3)(t_\beta - 300) = S_\beta + 700$

$(v_\beta - 3)t_\beta = S_\beta$

Проверка:

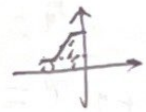
$2t_\alpha = t_\alpha + \Delta t + \Delta S$

$t_\alpha = 1000 \cdot 5$

$t_\beta = 1300 \cdot 4$

№2

$f(x) = |2x+3| - |2x+1| + 4$ при $x \in [-2;0]$



На $[-2;-1{,}5]$: $-2x-3+2x+1+4 = 2$

На $[-1{,}5;-0{,}5]$: $2x+3+2x+1+4 = 4x+8$

На $[-0{,}5;0]$: 6

$f(x+2) = f(x)+1$

$f(x+3) = f(x)$

$f(x+3) \le f(x)+6$ $\quad f(x+2) \geq f(x)+4$

$f(x+6) \le f(x)+12$ $\quad f(x+6) \geq f(x)+12$

№3

$36\cos(x+\cos(x))\cos(x-\cos(x)) + 9 = \pi^2$

$(\cos(x)\cos(\cos(x)))^2 - (\sin(x)\sin(\cos(x)))^2 = \frac{\pi^2-9}{36}$

$18(\cos(2x) + \cos(2\cos(x))) = \pi^2 - 9$ $\quad t = \cos(x)$

$18(2t^2 - 1 + \cos(2t)) = \pi^2 - 9$ $\quad 2t - \sin(2t)$

$2\cos^2(t) - 1$

$36(t^2 + \cos^2(t) - 1) = \pi^2 - 9$

$\frac{\pi}{6}$

$36t^2 + 36\cos^2(t) = \pi^2 + 27$

$36(t^2 - \sin^2(t)) = \pi^2 - 9$

$-\frac{p}{2}$

№4

№5

$y = x^2 + px + q$