0 364761 480007

36-47-61-48
(161,3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант А-3

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы Горы"
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Пелевина Леонида Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«7» АПРЕЛЯ 2024 года

Подпись участника

Леод

80 (восемьдесят) ~~Ли~~

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

36-47-61-48
(161.3)

Черновик.

x, y – 1/2 $(x-3)t = (y-3)(t+300)+700$

t $(xt - y(t+300))$ – ?

$\cancel{xt-3t} = \cancel{y(t+300)} - 3t - 900 + 700$ $xt - 3t = y(t+300) - 3(t+300) + 700$

$\cancel{xt \geq yt}$ $xt - y(t+300) = 700 - 900 = -200$

$y(t+300) - xt = 200$ вторая на 20

$f(2024)$ – ?

$\begin{cases} f(x) = |2x+3| - |2x+1| + 4 \\ x \in [-2; 0] \end{cases}$

при всех целых

$f(x+3) \leq f(x) + 6$

$f(x+2) \geq f(x) + 4$

$f(-2) = |-1| - |-3| + 4 = 2$

$f(-1) = |1| - |-1| + 4 = 4$

$f(0) = 3 - 1 + 4 = 6$

$f(1) \leq f(-2) + 6 = 8$ $f(1) = 8$

$-2+3$

$f(1) \geq f(-1) + 4 = 4 + 4 = 8$

$-1+2$

$f(2) \leq f(1) + 6 = 10$

$f(2) \geq f(0) + 4 = 6 + 4 = 10$

$f(k) = \underline{2(k+3)}$

$f(k) \leq f(k-3) + 6 = 2(k+3-3) + 6 = 2k + 6 = 2(k+3)$

$f(k) \geq f(k-2) + 4 = 2(k-2+3) + 4 = 2k + 6 = 2(k+3)$

$\Downarrow$

$f(k) = 2(k+3)$, для целых нат

$\Downarrow$

$f(2024) = 2(2024+3) = 2 \cdot 2027 = \underline{4054}$

$36\cos(x+\cos x)\cos(x-\cos x) + 9 = \pi^2$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$18\cos 2x + 18\cos(\cos x) = \pi^2 - 9$

$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

Чистовик.

№1 Пусть скорость первого – x, второго – y; время первого – t

тогда по условию:

$(x-3)t = (y-3)(t+300)+700$

Расстояние первого в безветренную погоду: xt

второго: $y(t+300)$ т.к. время не меняется.

$\Rightarrow$ найдем $xt - y(t+300)$

$xt - 3t = y(t+300) - 3t - 900 + 700$

$xt - y(t+300) = -200$

$y(t+300) - xt = 200 \Rightarrow$ вторая модель пролетит дальше на 200 м.

Ответ: Бета пролетит дальше на 200 м.

№2. $\begin{cases} f(x) = |2x+3| - |2x+1| + 4 \\ x \in [-2;0] \end{cases}$

для $x \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} f(x+3) \le f(x)+6 \\ f(x+2) \ge f(x)+4 \end{cases}$

$f(-2) = 2$

$f(-1) = 4$

$f(0) = 6$

$f(1) \le f(-2)+6 = 8$

$f(1) \ge f(-1)+4 = 8$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(1) = 8$

Заметим, что для целых $x \ge -2$ $f(x)$ имеет вид

$f(k) = 2(x+3)$ (пока что для $x \in \{-2;-1;0;1\}$)

Докажем это по индукции: (Для всех целых $-2 \le x < k$ $f(x) = 2(x+3)$ выполняется по предположению индукции)

$f(k) \le f(k-3)+6 = 2(k+3-3)+6 = 2(k+3)$

$f(k) \ge f(k-2)+4 = 2(k-2+3)+4 = 2(k+3)$

$f(k) \le 2(k+3)$

$f(k) \ge 2(k+3)$ $\Rightarrow f(k) = 2(k+3)$ для целых $x \ge -2$

$f(2024) = 2(2024+3) = 2 \cdot 2027 = 4054$

Ответ: 4054.

36-47-61-48 (161.3)

Черновик: $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

$36\cos(x+\cos x)\cos(x-\cos x) + 9 = \pi^2$

$18\cos 2x + 18\cos(2\cos x) + 9 = \pi^2$

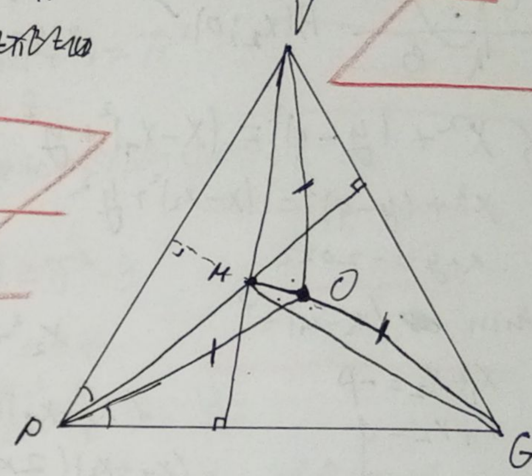
$S_{POH} = 25$ S_{OHG} – ?

$S_{OHV} = 13$

$S_{OHV} = OH \cdot R \cdot \sin\angle HOV$

$S_{POH} = OH \cdot R \cdot \sin\angle POH$

$S_{HOG} = OH \cdot R \cdot \sin\angle HOG$

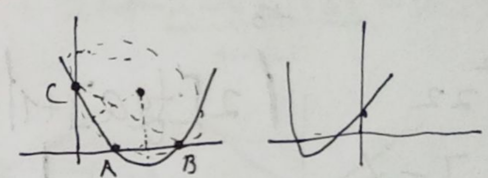


$y = x^2 + px + q$

$C(0;q)$

$A(x_1;0)$

$B(x_2;0)$



$D(x;y)$. $x^2 + (y-q)^2 = (x-x_1)^2 + q^2$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q \end{cases}$

$(x-x_2)^2 + q^2 = x^2 + (y-q)^2$

$x_1 + x_2 = -p$

$x_1 x_2 = q$

min $\sqrt{D}$:

$D = p^2 - 4q$

min $\sqrt{p^2-4q}$ – ?

$|x_2 - x_1|$ – min

$x + y = -2022$

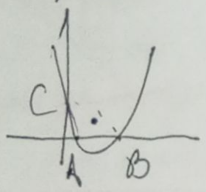
$|x_2 - x_1|$ – min

$(x_2 - x_1)(2x + x_2 + x_1) = 0$, $x_2 - x_1 \neq 0$

$2x + x_2 + x_1 = 0$

$x + y = -2022$

черновик.



$C(0;q)$
$A(x_1;0)$
$B(x_2;0)$
$D(x;y)$

$x+y=-2022$

$y=x^2+px+q=$
$=(x-x_1)(x-x_2)$

$$\begin{cases} x^2+(y-q)^2=(x-x_1)^2+y^2 \\ x^2+(y-q)^2=(x-x_2)^2+y^2 \end{cases}$$
$x+y=-2022$

$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2yq+q^2=\cancel{x^2}-2xx_1+x_1^2+\cancel{y^2}$
$-2yq+q^2=-2xx_2+x_2^2$
$x+y=-2022$

$\min |x_2-x_1| - ?$

$x_2^2-x_1^2+2x_1x-2xx_2=0$

$x_1+x_2=-p$
$x_1x_2=q$

$(x_2-x_1)(x_2+x_1+2x(x_1-x_2))=0$
$(x_1-x_2)(2x-x_1-x_2)=0$
$\ne 0$

$2x=x_1+x_2$
$x+y=-2022$

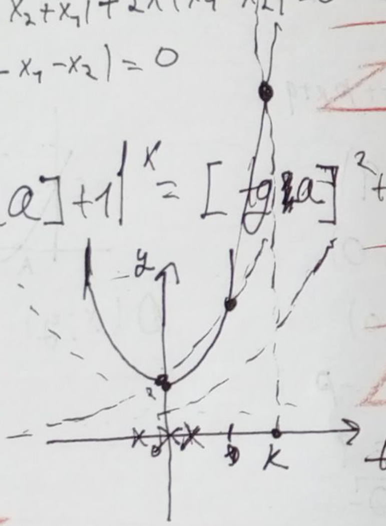
$|2[\operatorname{tg}a]+1|^x=[\operatorname{tg}a]^2+2$

$[\operatorname{tg}a]=t$

$|2t+1|^x=t^2+2$

$2t+1\ne0$
$2t+1\ne\cancel{1}$

$|2t+1|\in(0;1)\cup(1;+\infty)$



$|2t+1|=\cancel{k}$ $\quad x$ $\quad k^{\pm x}$
$|2t+1|=\frac{1}{k}$ $\quad -x$

$x=\log_{|2t+1|}(t^2+2)-$
- рациональный

$2t+1\ne0$
$2t+1\ne1$
$2t+1\ne-1$

$t\ne-\frac12$

$$\begin{cases} t\ne-1 \\ t\ne0 \end{cases}$$

$\boxed{t=1:\ \log_3(3)=1}$ $\quad (t^2+2)=|2t+1|^x$

$t=2:\ \log_5(6)$
$t=3:\ \log_{7}(11)$
$t=4:\ \log_9(18)$
$t=5:\ \log_{11}(27)$
$t=6:\ \log_{13}(38)$
$\cancel{t=-1}$;
$t=-2:\ \log_3(6)$
$t=-3:\ \log_8(10$

$$\begin{cases} t^2+2-2t-1\equiv0 \\ t^2+2+2t+1\equiv0 \end{cases}$$
p любое
p любое

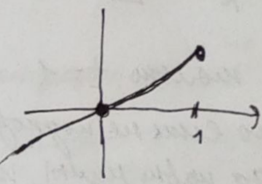
36-47-61-48
(161.3)

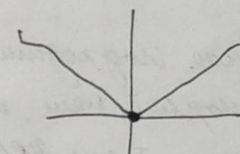
Черновик:
$$\begin{cases} t^2-2t+1\underset{p}{\equiv}0 \\ t^2+2t+3\underset{p}{\equiv}0 \end{cases}$$
$p=1$ $\quad (t-1)^2=0$ $\quad t=1$
$D=4-12<0$ $\quad (t+1)^2+2\underset{p}{\equiv}0$

$36\cos(x+\cos x)\cos(x-\cos x)+9=\pi^2$
$18(\cos2x+\cos(2\cos x))=\pi^2-9$
$18(2\cos^2x-1+2\cos^2(\cos x)-1)=\pi^2-9$
$\cos x=t\in[-1;1]$
$18(2t^2-1+2\cos^2t-1)=\pi^2-9$
$36(t^2+\cos^2t)=\pi^2+27$

$t=\frac{\pm\pi}{6}$ $\quad \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt3}{2}$ $\quad \left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2=\frac34\cdot36=27$

$f(t)=t^2+\cos^2t$ $\quad f'(t)=2t-\underbrace{2\cos t\cdot\sin t}_{\sin2t}=$
$f'(t)=2t-\sin2t$
$f''(t)=2-2\cos2t$





$\frac{1}{\sqrt2}>\frac{\pi}{6}$ $\quad \pi<\frac{6}{\sqrt2}=\frac{6\sqrt2}{2}=3\sqrt2$

Чистовик

№6 $|2[\operatorname{tg} a]+1|^x = [\operatorname{tg} a]^2+2$ x – рациональный

Замена $[\operatorname{tg} a] = t$ ограничения $2t+1 \neq 0$, т.к. $0 \neq 2$

$|2t+1|^x = t^2+2$ $2t+1 \neq \pm 1$ $1 \neq 3$

$x = \log_{|2t+1|}(t^2+2)$ – рациональное число,

то есть $|2t+1| \in N$ не имеют разных простых множителей

$t^2+2 \in N$

то есть $t^2+2 \equiv \pm(2t+1) \mod p$, p – любое простое
$(2t+1>0)$

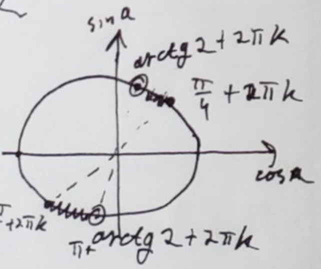
$$\left[\begin{array}{l} t^2+2 \underset{p}{\equiv} 2t+1 \\ t^2+2 \underset{p}{\equiv} -2t-1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} t^2-2t+1 \underset{p}{\equiv} 0 \\ t^2+2t+3 \underset{p}{\equiv} 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{ll} (t-1)^2 \underset{p}{\equiv} 0 & (1) \\ (t+1)^2+2 \underset{p}{\equiv} 0 & (2) \end{array}\right.$$
$(2t+1<0)$ для любых p

в первом случае подходит только $t=1$

во втором корней нет, но если не подходит
(выражение должно быть всегда равно нулю), также $t^2+2 \geq 2$
поэтому дроби не рассматриваем

$t=1$ $[\operatorname{tg} a]=1$ $1 \leq \operatorname{tg} a < 2$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} a \geq 1 \\ \operatorname{tg} a < 2 \end{cases} \Rightarrow$$



$\Rightarrow a \in \left[\frac{\pi}{4}+2\pi k; \operatorname{arctg} 2+2\pi k\right) \cup$

$\cup \left[\frac{5\pi}{4}+2\pi k; \operatorname{arctg} 2+\pi(2k+1)\right)$ $k \in Z$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k; \operatorname{arctg} 2+2\pi k\right) \cup \left[\frac{5\pi}{4}+2\pi k; \operatorname{arctg} 2+\pi(2k+1)\right)$,
$k \in Z$.

Чистовик.

№3. $36\cos(x+\cos x)\cos(x-\cos x)+9=\pi^2$ + сумма корней $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{3}\right]$

$18(\cos 2x+\cos(2\cos x))+9=\pi^2$

$18(2\cos^2 x-1+2\cos^2(\cos x)-1)+9=\pi^2$

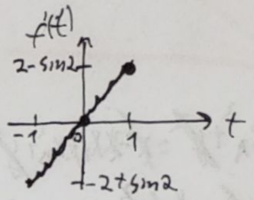
Замена $\cos x = t \in [-1; 1]$

$36(t^2+\cos^2 t)=\pi^2+27$

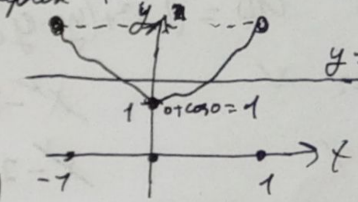
Пусть $f(t)=t^2+\cos^2 t$

$f'(t)=2t+2\cos t(-\sin t)=2t-\sin 2t$

$f''(t)=2-2\cos 2t \geq 0 \Rightarrow f'(t)$ – неубывает



$\Rightarrow$ график f(t) имеет вид:



$y = \frac{27+\pi^2}{36} > 1$

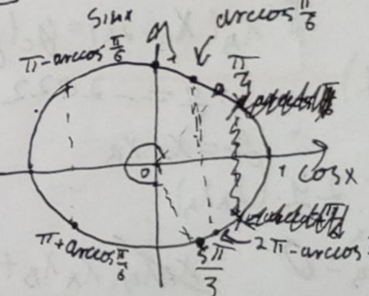
$t=0$ – точка минимума f(t)

корня только 2, угадываем:
(в силу монотонности)

$\boxed{t=-\frac{\pi}{6}}$ $36\left(\left(-\frac{\pi}{6}\right)^2+\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\pi^2+27=\pi^2+27$ ✓

$\boxed{t=\frac{\pi}{6}}$ $36\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)^2+\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\pi^2+27=\pi^2+27$ ✓

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{\pi}{6} \\ \cos x = -\frac{\pi}{6} \end{array}\right.$$



$$\left[\begin{array}{l} x=\pm\arccos\frac{\pi}{6}+2\pi k \\ x=\pm\arccos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2\pi k \end{array}\right. \quad k \in Z$$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \vee \frac{\pi}{6}$ $3\sqrt{2} > \pi$

$-\arccos\frac{\pi}{6}+2\pi > \frac{5\pi}{3}$ $\left(\frac{\pi}{6} > \frac{1}{2}\right)$

$\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{\pi}{6} \Rightarrow \arccos\frac{\pi}{6} > \frac{\pi}{4}$

Получаем сумму корней на $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{3}\right]$:

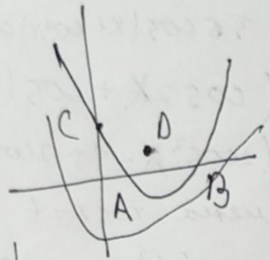
$\arccos\frac{\pi}{6}+\left(\pi-\arccos\frac{\pi}{6}\right)+\left(\pi+\arccos\frac{\pi}{6}\right)=2\pi+\arccos\frac{\pi}{6}$.

Ответ: $x=\pm\arccos\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $x=\pm\arccos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2\pi k$, $k \in Z$,
сумма: $2\pi+\arccos\frac{\pi}{6}$.

черновик..

$y = x^2 + px + \cancel{q}\, y_c$ $\quad (x-x_A)(x-x_B)$

$x+y=-2022$



$A(x_A;0)$

$B(x_B;0)$

$C(0;y_c)$

$D(x;y)$

$\min|x_B-x_A|$ — ?

$(x-x_A)^2+y^2=(x-x_B)^2+y^2$

$(x-x_A)^2+y^2=x^2+(y-y_c)^2$

$|\vec{AD}|=|\vec{BD}|=|\vec{CD}|$

$|\vec{AD}|=\sqrt{(x-x_A)^2+y^2}$

$|\vec{BD}|=\sqrt{(x-x_B)^2+y^2}$

$\vec{CD}=\sqrt{x^2+(y-y_c)^2}$

$y_c=x_Ax_B$

$$\begin{cases} x+y=-2022 \\ y_c=x_Ax_B \\ (x-x_A)^2+y^2=(x-x_B)^2+y^2 \\ (x-x_B)^2+y^2=x+(y-y_c)^2 \\ \min(x_B-x_A) \end{cases}$$

$\cancel{x^2}-2xx_A+x_A^2+\cancel{y^2}=\cancel{x^2}-2xx_B+x_B^2+\cancel{y^2}$

$\cancel{x^2}-2xx_B+x_B^2+\cancel{y^2}=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2yy_c+y_c^2$

$\cancel{x_A(x_A-2x)=x_B(x}$

$$\begin{cases} x_A^2-x_B^2-2x(x_A-x_B)=0 \\ x_B(x_B-2x)=y_c^2-2yy_c \end{cases}$$

$x_A+x_B-2x=0$

$x_B(x_B-2x)=y_c(y_c-2y)$

$x+y=-2022$

$y_c=x_Ax_B$

$2x=x_A+x_B$

$x_B^2-2xx_B=x_Ax_B(x_Ax_B-2y)$

$x_B^2-(x_A+x_B)x_B=(x_Ax_B)^2-2y\cdot(x_Ax_B)$

$-x_Ax_B+2yx_Ax_B-x_Ax_B^2=0$

$\cancel{x_Ax_B}(x_Ax_B+1-2y)=0$

$-1+2y-x_Ax_B=0$

$x_Ax_B+1-2y=0$

$x_Ax_B=\underbrace{2y}-1$

$x_B+x_A=k$

$x_A(k-x_A)=2y-1$

$y=-2022+\frac{x_A+x_B}{2}$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

черновик

~~$x_Ax_B=2\left(-2022+\frac{x_A+x_B}{2}\right)-1$~~

~~$x_A(k-x_A)=-k-4045$~~

~~$x_A^2-kx_A+k-4045=0$~~

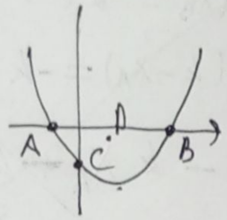
~~$D\geq 0:\quad k^2+4(k-4045)\geq 0$~~

~~$k^2+4k+16180\geq 0$~~

~~$4\cdot 4044=4\cdot 4\cdot 1011=$~~

$$\begin{array}{r|l} 1011 & 3 \\ -9 & \overline{337} \\ \hline 11 & \\ -9 & \\ \hline 21 & \end{array}$$

Чистовик №5   т.е. $|x_B - x_A|$ – ?



$y = x^2 + px + q = (x - x_A)(x - x_B)$

$A(x_A; 0)$ по условию:

$B(x_B; 0)$

$C(0; x_A x_B)$

$y_C = q = x_A x_B$

$$\begin{cases} (x-x_A)^2 + y^2 = (x-x_B)^2 + y^2 \\ (x-x_B)^2 + y^2 = x^2 + (y - x_A x_B)^2 \\ x + y = -2022 \end{cases}$$

$D(x; y)$ из 1: $-2x x_A + x_A^2 = -2x x_B + x_B^2$

$(x_A - x_B)(x_A + x_B - 2x) = 0$ $x_A \neq x_B$ $A \neq B$

$x + y = -2022$

$2x = x_A + x_B$ из 2: $-2x x_B + x_B^2 = -2y x_A x_B + (x_A x_B)^2$

$y = -2022 - \frac{x_A + x_B}{2}$

$-(x_A + x_B) x_B + x_B^2 = (2022 \cdot 2 + (x_A + x_B)) x_A x_B + (x_A x_B)^2$

$(x_A x_B)^2 + (x_A x_B)(2022 \cdot 2 + 1 + (x_A + x_B)) = 0$ $x_A x_B \neq 0$, $A \neq C$, $B \neq C$

$x_A x_B + x_A + x_B + 2022 \cdot 2 + 1 = 0$

Пусть $x_B - x_A = k$ $x_B = x_A + k$

$x_A(x_A + k) + x_A + x_A + k + 4045 = 0$ $4044 \times 4 = 16176$

$x_A^2 + (2 + k) x_A + k + 4045 = 0$

$D \geq 0$ $(2+k)^2 - 4(k + 4045) \geq 0$

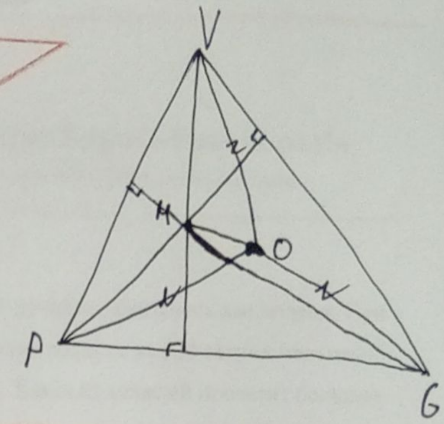
$k^2 + 4k + 4 - 4k - 4 \cdot 4045 \geq 0$

$k^2 \geq 4 \cdot 4045 - 4 = 4 \cdot 4044 = 16176$

$k \geq \sqrt{16176}$, для данного k находятся x_A, x_B, y_C из системы, точки не совпадают $\Rightarrow |x_B - x_A| \geq \sqrt{16176} = 4\sqrt{1011}$

Ответ: $\sqrt{16176}$

Чистовик №4.



$S_{POH} = 25$

$S_{OHV} = 13$

S_{OHG} – ?