0 830922 250005

83-09-22-25
(161.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант А-3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы Горы
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Степичева Евгения Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«7» Апреля 2024 года

Подпись участника

100 (050) ДП ам

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

83-09-22-25
(161.3)

Черновик

V_A t
V_B $V_A - V_B$

$(V_A - 3)\cdot t = (V_B - 3)(t + 300)$

$(V_B - 3)(t + 300)$

$V_A \cdot t - \cancel{3t} = tV_B - \cancel{3t} + 300V_B - 900$

$V_A \cdot t - V_B(t + 300) = -900$

$f(x+3) \le f(x) + 6$ $f(x)+6 \ge f(x+1) + 4$

$f(x+2) \ge f(x) + 4$ $f(x) \ge f(x+1) - 2$

$f(x+3) \ge f(x+1) + 4$ $1 - 1 + 4$

$f(x+2) \ge f(x) + 4 \ge f(x-2) + 8 \ge f(x-4) + 12 \ldots$

$f(x+3) \le f(x) + 6 \le f(x-3) + 12 \le f(x-6) + 18 \ldots$

$f(2024) \ge f(2022) + 4 \ge f(2020) + 8 \ge \ldots \ge f(0) + 4048 = 6 + 4048$

$f(2024) \le f(2021) + 6 \le f(2017) + 12 \le \ldots \le f(-1) + 4050$

$36\cos(x + \cos x)\cos(x - \cos x) + 9 = \pi^2$

$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$\frac{\pi}{2} = \sqrt{2}$

$x = y = 0$

$3 - 1 + 4$

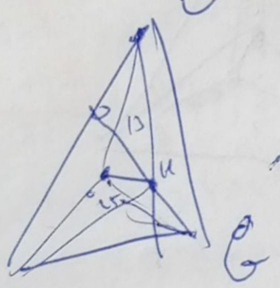
$\cos x + \cos y$ $x = \frac{\pi}{2}$ $y = 0 = 1$

$\cos x$ $\frac{x+y}{2}$ $\cos\frac{x-y}{2}$

$2\cos$

$\frac{x}{2} - 1 = 2024$

$x = 4050$



$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\frac{2x + 2\cos x}{2}$

$36\cos\left(\frac{2x + 2\cos x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x - 2\cos x}{2}\right) + 9 = \pi^2$

$18(\cos(2x) + \cos(2\cos x)) + 9 = \pi^2$

$18(\cos^2 x - \sin^2 x + \cos^2(\cos x) - \sin^2(\sin x)) + 9 = \pi^2$

$18(2\cos^2 x - 1 + 2\cos^2(\cos x) - 1) + 9 = \pi^2$

$36(\cos^2 x + \cos^2(\cos x) - 1) + 9 = \pi^2$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ (7) $x = \frac{\pi}{...}$ Черновик

$18(\cos(2x) + \cos(2\cos x)) + 9 = \pi^2$

$\cos x($

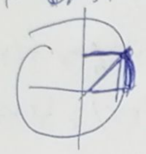
$(\cos x\cos(\cos x) - \sin x\sin(\cos x))(\cos x\cos(\cos x) + \sin x\sin(\cos x))$

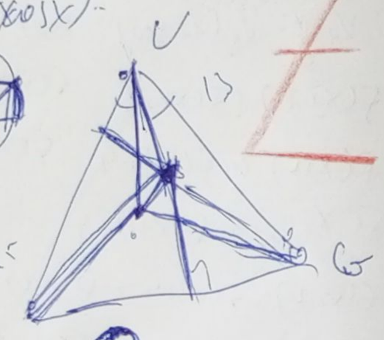
$(\cos x\cos(\cos x))^2 - (\sin x\sin(\cos x))^2$ $\cos x = a$, $\cos(\cos x) = b$

$(\cos x)^2\cdot\cos^2(\ldots) - (1-\cos^2 x)(1-\cos^2(\cos x))$

$= a^2b^2 - (1-a^2)(1-b^2)$

$a^2b^2 - 1 - a^2b^2 + a^2 + b^2$





$36(\cos^2 x + \cos(\cos x)^2 - 1) + 9 = \pi^2$

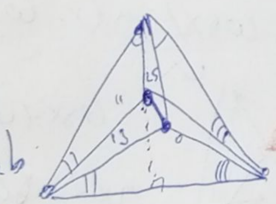
$36(t^2 + \cos(t)^2 - 1) + 9 = \pi^2$

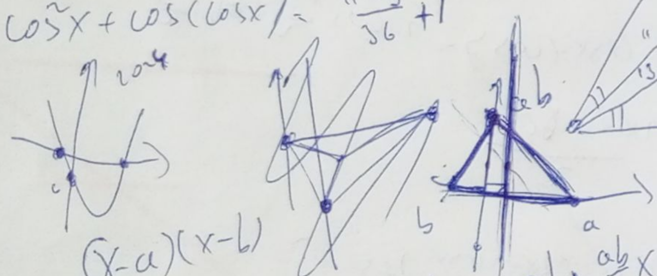
$\cos^2 x\cos^2(\cos x) - \sin^2 x\sin^2(\cos x)$

$\cos^2 x\cos^2(\cos x) - (1-\cos^2 x)(1-\cos^2(\cos x)) =$

$= (\cos^2 x + \cos^2(\cos x) - 1)\cdot 36 + 9 = \pi^2$ $\cos^2(1)$

$\cos^2 x + \cos^2(\cos x) = \frac{\pi^2 - 9}{36} + 1$





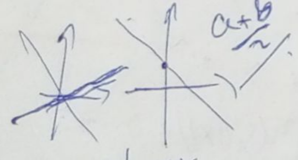
$(x-a)(x-b)$ $x = b$

$ab + \frac{ab}{b}x$ $ab + kx$

$ab + kb = 0$

$k = -a$

$\frac{\pi^2 - 9}{36}$



$\frac{a+b}{2}$

$ab - ax$

$\cos x + a$

$1\cdot 2 = 1\cdot x$

$ab = ax$

$\frac{1}{a}x$ $\frac{1}{a}\cdot\frac{b}{2} + k = \frac{ab}{2}$

$k = \frac{ab}{2} - \frac{b}{2a}$

83-09-22-25
(161.3)

Чистовик

№1.

Обозначим за V_α и V_β - скорости моделей Альфа и Бета соответственно (скорость в м/сек). А t - время, которое может находиться в воздухе модель Альфа. Тогда модель Бета будет находится в воздухе $t+300$ секунд. Тогда из условия следует:

$t\cdot(V_\alpha - 3) - (t+300)(V_\beta - 3) = 700$

$tV_\alpha - 3t - (t+300)V_\beta + 3t + 900 = 700$

$tV_\alpha - (t+300)V_\beta = 700 - 900 = -200 \Rightarrow$ без ветра модель β пролетит на 200 метров дальше. Ответ: Бета на 200

№2.

Из $f(x+2) \geq f(x) + 4$ можно получить:

$f(2024) \geq f(2022) + 4 \geq f(2020) + 8 \geq \ldots \geq f(0) + 4048 =$

$= |2\cdot 0 + 3| - |2\cdot 0 + 1| + 4 + 4048 = 3 - 1 + 4 + 4048 = \underline{4054}$

Также: $f(x+3) \leq f(x) + 6$

$\Rightarrow f(2024) \leq f(2021) + 6 \leq f(2018) + 12 \leq \ldots \leq f(-1) + 4050 \leq$

$\leq |-2+3| - |-2+1| + 4 + 4050 = 1 - 1 + 4 + 4050 = \underline{4054}$.

$\Rightarrow \begin{cases} f(2024) \geq 4054 \\ f(2024) \leq 4054 \end{cases} \Rightarrow f(2024) = \underline{4054}$ Ответ: 4054

№3

$36\cos(x + \cos x)\cos(x - \cos x) + 9 = \pi^2$

$36(\cos x\cos(\cos x) - \sin x(\sin(\cos x)))(\cos x\cos(\cos x) + \sin x\sin(\cos x)) + 9 = \pi^2$

$36(\cos^2 x\cos^2(\cos x) - \sin^2(\sin(\cos x))^2) + 9 = \pi^2$

$36(\cos^2 x\cos^2(\cos x) - (1 - \cos^2 x)\sin^2(\cos x)) + 9 = \pi^2$

$36(\cos^2 x(\cos^2(\cos x) + \sin^2(\cos x)) - \sin^2(\cos x)) + 9 = \pi^2$

$36(\cos^2 x - \sin^2(\cos x)) + 9 = \pi^2$; $t = \cos x$

$36(t^2 - \sin^2 t) + 9 = \pi^2$ $t \in [-1, 1]$

При $t \in [0, 1]$; $t^2 - \sin^2 t$ - строго убывающая функция, поэтому корень может быть только один. $t = \frac{\pi}{6}$ - подходит.

Чистовик

$36(t^2-\sin^2 t)+9=\pi^2$

$36\left(\frac{\pi^2}{36}-\frac{1}{4}\right)+9=\pi^2$

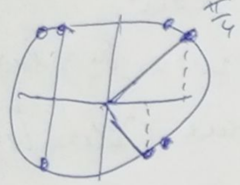
$\underline{0=0}.$

аналогично, ~~при~~ ~~~~ ~~ко~~ $t^2-\sin^2 t$ – четная функция

$\Rightarrow$ при $t<0$ тоже только 1 корень: $t=-\frac{\pi}{6}$.

$\Rightarrow$ ~~$x=\pm\frac{\pi}{6}$~~. $t=\pm\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=\cos x=\pm\frac{\pi}{6}\Rightarrow \underline{x=\pi k\pm\arccos\frac{\pi}{6}}$

от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{5\pi}{3}$.



$\Rightarrow$ Ответ: $x=\pi k\pm\arccos\frac{\pi}{6}$
$k\in\mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{6}>\frac{1}{2}$; но $\frac{\pi}{6}<\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow$ у нас будет ~~4 корня~~ 3 корня:

$\arccos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\pi-\arccos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ и $\pi+\arccos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow$ их сумма: $\underline{2\pi+\arccos\frac{\pi}{6}}$.

$\cancel{p=b}$

пусть $x=\frac{a}{b}$; $a[\ldots]=c$; ~~$a,b,c\in\mathbb{Z}$~~ $a,c\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}$.

тогда $|2c+1|^{\frac{a}{b}}=c^2+2$

$|2c+1|^a=(c^2+2)^b$; заметим, что $c^2+2\geq 2c+1$
$c^2-2c+1\geq 0$
$(c-1)^2\geq 0$

$\Rightarrow c^2+2\geq 2c+1\Rightarrow a\geq b$. Но тогда, какое-то простое число p входит $c^2+2 \,\vdots\, 2c+1$, если иначе в $2c+1$ больше число раз, чем в c^2+2, а т.к. $b\leq a$; равенства не будет. $\Rightarrow$ $c^2+2 \,\vdots\, 2c+1$

$2c^2+4 \,\vdots\, 2c+1$ | $-(2c+c)$

$4-c \,\vdots\, 2c+1$

$8-2c \,\vdots\, 2c+1$

$7 \,\vdots\, 2c+1\Rightarrow \left[\begin{array}{l}2c+1=\pm 7;\\ 2c+1=\pm 1\end{array}\right.$ ($2c+1=0$ – не подходит; т.к. $c^2+2>0$.

также, $2c+1=\pm 1$ не подходит, т.к. $(c^2+2)^b>2$; $(b\neq 0)$.

$\Rightarrow 2c+1=\pm 7\Rightarrow$ ~~...~~ $\left[\begin{array}{l}c=3\\ c=-4\end{array}\right.$

83-09-22-25
(1613)

Черновик.

$36\cos(x+\cos x)\cos(x-\cos x)+9=\pi^2$

$36(\cos x\cos\cos x-\sin x\sin\cos x)(\cos x\cos\cos x+\sin x\sin\cos x)+9=\pi^2$

$36(\cos^2 x\cos^2(\cos x)-\sin^2 x\sin^2(\cos x))+9=\pi^2$ $\quad$ $x=a\sin\ldots$

$36(\cos^2 x\cos^2(\cos x)-(1-\cos^2 x)\sin^2\cos x)+9=\pi^2$

$36(\cos^2 x-\sin^2(\cos x))+9=\pi^2$ $\quad$ $\sin^2\cos x=$

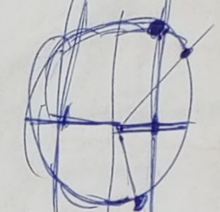
$36(t^2-\sin^2 t)+9=\pi^2$ $\quad$ $\frac{\pi^2-9}{36}$ $\quad$ $\frac{(\pi-3)(\pi+3)}{6^2}$

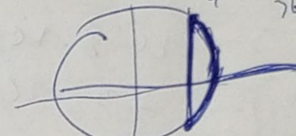
$(t-\sin t)(t+\sin t)$

$t=\frac{\pi}{2}$ $\quad$ $\frac{\pi^2}{4}-1$ $\quad$ $36\left(\frac{\pi^2}{36}-\frac{1}{4}\right)+9=\pi^2$

$t\in[-1,1]$

$\frac{\pi}{6}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $a=\frac{2}{3}$ $\quad$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad$ $\frac{a}{\sqrt{3}}=2$





$1+\frac{2}{3}\pi$

(b,c)

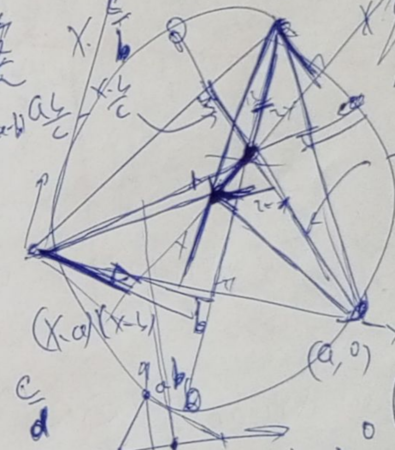
$x\cdot\frac{c}{b}$ $\quad$ $x\cdot\frac{b}{c}$ $\quad$ $x\cdot\frac{a}{b}+k=0$

$\frac{b}{c}(a-b)$ $\quad$ $\frac{b}{c}(a-b)\frac{ab}{c}$

$x\cdot\left(-\frac{b}{c}\right)+k$

$-\frac{ab}{c}+k=0$

$k=\frac{ab}{c}$



$\frac{b}{c}(a-b)$

$b,\ \frac{b}{c}(a-b)$

$(x-a)(x-b)$ $\quad$ $(a,0)$

$b^2+\left(\frac{b}{c}(a-b)\right)^2$ $\quad$ $\frac{c}{d}$

(a,ab) $\quad$ $a+b$

$-\frac{1}{b}x+k$

$|2b+1|^x=b^2+2$

$b^2+2=k(2b+1)^a$ $\quad$ $2b^2+b$

bx $\quad$ $a+b$

$\frac{(a+b)}{2}$

$2c+1=7$

$2c=(b^2+2 \,\vdots\, (2b+1)$

$c^2+2<2c+1$

$2c+1=\ldots$ $\quad$ $c^2-2c+1<0$

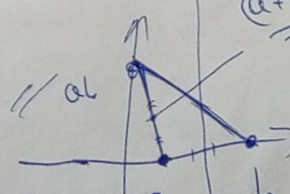
$2(c^2+2) \,\vdots\, 2c+1$

$2-2c \,\vdots\, 2c+1$

$2c=-8$

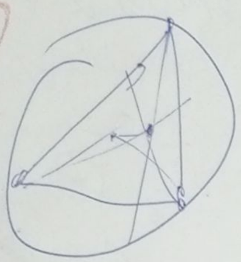
18 $\quad$ 7

ab $\quad$ a_n



$-bx+ab$

$\frac{a+b}{2b}+\frac{ab}{2}-\frac{a}{2b}$ $\quad$ $\frac{1}{b}x+k$ $\quad$ $\frac{1}{b}\cdot\frac{a}{2}+k=\frac{ab}{2}$ $\quad$ $k=\frac{ab}{2}-\frac{a}{2b}$ $\quad$ $1=\frac{1}{b}x+\frac{ab}{2}-\frac{a}{2b}$



$(2c+1)^a=(c^2+2)^b$ $a\geq b$

$c^2+2 \vdots 2c+1$

$2c^2+4 \vdots 2c+1$

$2c^2+4-(2c^2+c) \vdots 2c+1$

$4-c \vdots 2c+1$

$c-4 \vdots 2c+1$

$2c-8 \vdots 2c+1$

$-9 \vdots 2c+1$

Черновик

$2c+1=1$ $c=0$ 2

$2c+1=-1$ $c=-1$ 3

$2c+1=3$ $c=1$ 3

$2c+1=-3$ $c=-2$ 6

$2c+1=9$ $c=4$ 18

$2c+1=-9$ $c=-5$ 27

№6.

Пусть $[tg\,a]=c$; $x=\frac{a}{b}$; $a, c\in\mathbb{Z}$; $b\in\mathbb{N}$ Числовая

это другое a.

тогда:

$|2c+1|^{\frac{a}{b}}=c^2+2$

$|2c+1|^a=(c^2+2)^b$.

Заметим, что $c^2+2\geq 2c+1 \Leftrightarrow c^2-2c+1\geq 0 \Leftrightarrow (c-1)^2\geq 0$ – верно.

Но тогда c^2+2 должно делится на $2c+1$.

Но тогда c^2+2 должно делится на $2c+1$. Но тогда c^2+2 ...

Из того $c^2+2\geq 2c+1$ и равенства можно получить, что $b\leq a$. Но тогда, степень вхождения любого простого числа в $2c+1$ должна быть не больше, чем в c^2+2, ведь иначе при $b\leq a$ не будет равенства.

$\Rightarrow$ $c^2+2 \vdots 2c+1$

$2c^2+4 \vdots 2c+1$

$2c^2+4-(2c^2+c) \vdots 2c+1$

$4-c \vdots 2c+1$

$c-4 \vdots 2c+1$

$2c-8 \vdots 2c+1$

$-9 \vdots 2c+1 \Rightarrow 9 \vdots 2c+1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2c+1=\pm 1 \\ 2c+1=\pm 3 \\ 2c+1=\pm 9 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=-1 \\ c=1 \\ c=-2 \\ c=4 \\ c=-5 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \Rightarrow c^2+2=2;\ 2c+1=1 \\ c=-1 \Rightarrow c^2+2=3;\ 2c+1=-1 \\ c=1 \Rightarrow c^2+2=3;\ 2c+1=3 \\ c=-2 \Rightarrow c^2+2=6;\ 2c+1=-3 \\ c=4 \Rightarrow c^2+2=18;\ 2c+1=9 \\ c=-5 \Rightarrow c^2+2=27;\ 2c+1=-9 \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} 1^a=2^b \\ 1^a=3^b \\ 3^a=3^b \\ 3^a=6^b \\ 9^a=18^b \\ 9^a=27^b \end{array}$ – тут подходят только $\begin{array}{l} 3^a=3^b \\ 9^a=27^b \end{array}$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} c=1 \\ c=-5 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} [tg\,a]=1 \\ [tg\,a]=-5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\,a\in[1,2) \\ tg\,a\in[-5,-4) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a\in[\pi k+\frac{\pi}{4};\pi k+arctg\,2) \\ a\in(\pi k+arctg\,{-5};\pi k+arctg(-4)] \end{array}\right.$ $k\in\mathbb{Z}$

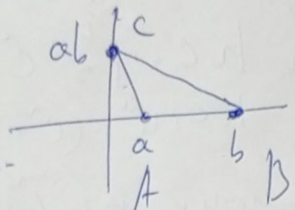
Ответ:

$\left[\begin{array}{l} a\in[\pi k+\frac{\pi}{4};\pi k+arctg(2)) \\ a\in(\pi k+arctg(-5);\pi k+arctg(-4)] \end{array}\right.$

№5. Пусть координата по Ox точки A это a, а B – это b. Чистовик.

тогда a и b – корни и $x^2+px+q=(x-a)(x-b)$.

тогда при $x=0$: $x^2+px+q=\underline{ab}$.



тогда координата точки D по оси Ox – это $\frac{a+b}{2}$. Прямая CA имеет коэффициент наклона $-b$ тогда коэффициент наклона прямой, перпендикулярной CA: $\frac{1}{b}$. ~~она пр~~ Серединный перпендикуляр к AC проходит через точку $(\frac{a}{2}, \frac{ab}{2})$.

$\Rightarrow \frac{1}{b}\cdot\frac{a}{2}+k=\frac{ab}{2} \Rightarrow k=\frac{ab}{2}-\frac{a}{2b} \Rightarrow$ при $x=\frac{a+b}{2}$ она принимает значение $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{1}{b}+\frac{ab}{2}-\frac{a}{2b}=\frac{b}{2b}+\frac{ab}{2}=\underline{\frac{1}{2}+\frac{ab}{2}}$.

это и есть точка D. $\Rightarrow \frac{a+b}{2}+\frac{1}{2}+\frac{ab}{2}=-2022$.

$a+b+1+ab=-4044 \quad b=a+D$

$a+a+D+1+a(a+D)=-4044$

$2a+D+1+a^2+aD=-4044$

$D(a+1)=-4044-a^2-2a-1$

* $D=\frac{-4044-a^2-2a-1}{a+1}$ – мы хотим сделать это как можно меньше по модулю

$-\frac{4044+a^2+2a+1}{a+1}=-\frac{4044}{a+1}-a-1$; $\left(-\frac{4044}{a+1}-a-1\right)'=4044\cdot\frac{1}{(a+1)^2}-1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a+1)^2=4044 \Rightarrow$ при $(a+1)^2=4044$ будет минимум. (~~так как при ...~~ была)

$\Rightarrow D=\frac{-4044-4044}{\sqrt{4044}}=-2\sqrt{4044}$. $\Rightarrow$ Ответ: $\underline{2\sqrt{4044}}$.

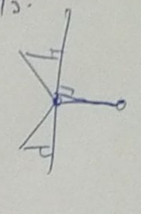
* в случае, если $b=0$, $ab=0$, и точки B и C совпадут $\Rightarrow b\neq0$.

И a при $a+1=0$ корней вообще не будет

Чистовик.

№4.

Опустим перпендикуляры из A, B, C на прямую OH. Пусть их длины равны h_1, h_2 и h_3. Пусть $h_3 > h_1 \geq h_2$.



Но сумма длин тех высот, что находятся с одной стороны от OH равна сумме длин тех, что находятся с другой стороны. $\Rightarrow h_3=h_1+h_2$.

Площади треугольников OHP; OHV; OHG – это $\frac{1}{2}OH\cdot h_1$; $\frac{1}{2}\cdot OH\cdot h_2$; $\frac{1}{2}\cdot OH\cdot h_3$ теперь есть 2 варианта. 1-й: Когда

$S_{OHG}=\frac{1}{2}OH\cdot h_3=\frac{1}{2}OH(h_1+h_2)=13+25=\underline{38}$.

либо $S_{OHV}=\frac{1}{2}OHh_3=25$; тогда $S_{OHG}=25-13=\underline{12}$.

То есть площадь равна либо 38, либо $\underline{12}$.

Осталось применить условие на то, что H – ортоцентр.