0 653772 740003

65-37-72-74

(161.1)

+1 лист

Отл

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант А-3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Калинина Александра Олеговича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«7» апреля 2024 года

Подпись участника

Кол

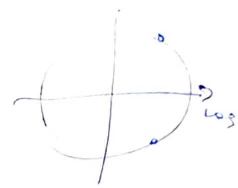
80 (восемьдесят)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

~~$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$~~



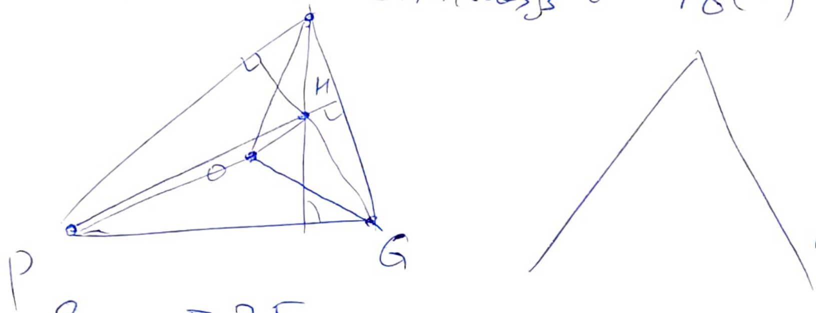
$\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

$1 > \cos(\cos x) > 0$

$36\cos(x+\cos x)\cos(x-\cos x) =$

$= 18(\cos 2x + \cos(2\cos x)) + 9 = \pi^2 \approx 10$

$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$ $\quad 0 < 18(\cdot) < 1$



$S_{OHP} = 25$

$S_{OHV} = 13$

$S_{OHG} = ?$

$x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{3}\right]$

$\cos P \cos(P-G)$

$18(\cos 2\alpha + \cos\beta) + 9 = \pi^2$

~~$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}$~~

$\cos(\alpha-\beta) -$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик

Вар

α β Хочу $v(t-300)$ и ut

$v_\alpha - 3$ $u-3$

$t-300$ $t=\frac{S_\beta}{u-3}$

$S+700$ $S=(u-3)t$

$v-3=\frac{S+700}{t-300}$ $u-3=\frac{S}{t}$

$\frac{S+700}{v-3}$ $\frac{S}{u-3}=t-300$

$\frac{S}{(u-3)} - \frac{S+700}{(v-3)} = 300$

$(u-3)=y$, $(v-3)=x$

~~$Sx - Sy - 700y = 300xy$~~

~~$Sv - 3S - Su - 700 + 3S + 3\cdot 700 = 300uv + 2700 - 900(u+v)$~~

$(v-3)(t-300)-(u-3)t=700$

$v(t-300) + 3t + 900 - ut + 3t = 700$

$2(x-1)+6=$
$=2x+4$ $(x=1)$

65-37-72-74
(161.1)

Чистовик лист 1 из

1

Пусть скорость α равна v, а скорость β равна u, а их время полёта равно $t-300$ и t соотв (из усл.)

Тогда $(v-3)(t-300)-(u-3)t=700 \Leftrightarrow$

$v(t-300) - 3t + 900 - ut + 3t = 700 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v(t-300) - ut = -200 \Leftrightarrow ut - v(t-300) = 200$

т.е. в безветр. погоду беспилотник β пролетит на 200 м дальше чем α.

Ответ: β дальше на 200 м

2

$\forall x \in (-2,0)$ $f(x) = |2x+3| - |2x+1| + 4$

$\forall x \in \mathbb{Z}$ $f(x+3) \le f(x)+6$ и $f(x+2) \ge f(x)+4$

$\Leftrightarrow f(x+3) \ge f(x+1)+4$

т.е. $f(x+1)+4 \le f(x+3) \le f(x)+6$ (*)

$f(-2)=2$, $f(-1)=4$, $f(0)=6$

но из (*) $4+4 \le f(1) \le 2+6 \Leftrightarrow f(1)=8$

Докажем по индукции по x, что

$\forall x \in \mathbb{Z}, x \ge -2$ $f(x)=2x+6$

База для $x=-2$, $x=-1$, $x=0$, $x=1$ доказана ранее

Переход: $x \to x+1$

Из (*) $\underset{2x+8}{f(x-1)+4} \le f(x+1) \le \underset{2x+8}{f(x-2)+6}$

$\Leftrightarrow f(x+1) = 2(x+1)+6$ – переход доказан

$f(2024) = 4048+6 = 4054$

Ответ: 4054

черновик

$x\in[-2,0]$ $f(x)=|2x+3|-|2x+1|+4$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x+3)\le f(x)+6$ и $f(x+2)\ge f(x)+4$

$f(x+3)\ge f(x+1)+4$

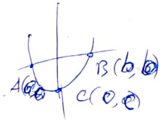
$f(-2)=1-3+4=2$

$f(-1)=1-1+4=4$ $4+4\le f(1)\le 2+6$

$f(0)=3-1+4=6$

$f(x-2)+4\le f(x)\le f(x-3)+6$ $a-x_0=2a+b$

$y=x^2+px+q$



$D(x_0,y_0)$ – центр (ABC)

$x_0+y_0=-2022$ $|\overline{AB}|\to\min$

$a+b=-p$

$ab=q$

$(a+b)^2=p^2$

$(a+b)^2-4q=p^2-4q$

$AB^2=(a-b)^2=p^2-4q$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$

$(a-x_0)^2-(b-x_0)^2=$

$=(a-b)(a+b+x_0)=0$

$a+b=-x_0$

$(a-q)(a+q)+(a+q)\alpha=(a+q)(a-q+\alpha)$

65-37-72-74 (161.1)

Чистовик лист 2 из 8

5

$y=x^2+px+q$

пусть $A(a,0)$, $B(b,0)$, $C(0,c)$, $D(x_0,y_0)$

тогда $x_0+y_0=-2022$ $c=q$

из т. Виета $a+b=-p$, $ab=q$ $\Rightarrow \underbrace{(a-b)^2}_{AB^2}=p^2-4q$

Запишем уравнение окр (ABC):

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2,\ r>0$

A: $(a-x_0)^2+y_0^2=r^2$ $\to$ $\overset{-p}{a+b}=-x_0$, т.к. $a\ne b$

B: $(b-x_0)^2+y_0^2=r^2$ $p=x_0$

C: $x_0^2+(c-y_0)^2=r^2$

$\cancel{(a-b)^2}$ $p^2+(q-y_0)^2=r^2$

$p^2+q^2+y_0^2-2qy_0=r^2$

A – C: $(a-x_0)^2+y_0^2-x_0^2-(q-y_0)^2=0$

$(\underbrace{a-x_0+q-y_0}_{a+q+2022})(a-x_0-q+y_0)+(y_0-x_0)(\underbrace{y_0+x_0}_{-2022})=0$

$(a+q+2022)(a-q-x_0+y_0)+(y_0-x_0)(-2022)=0$

пусть $y_0-x_0=\alpha$

$(a+q+2022)(a-q+\alpha)+\alpha(-2022)=0$

$a^2-q^2+(a+q)\alpha+2022a-2022q+2022\alpha-2022\alpha=0$

$\cancel{a^2-q^2+(a+q)\alpha(a+q)\alpha}$ $a^2-q^2+(a+q)\alpha+2022(a-q)=0$

Чистовик лист 3 из 8

5 продолж 1

Аналогично записав B–C получим $b^2-q^2+(b+q)\alpha+2022(b-q)=0$

вычтя полученные уравнения получим

$a^2-b^2+(a-b)\alpha+2022(a-b)=0$

т.к. $a\neq b$

$a+b+\alpha+2022=0$; $p+\alpha=2022$

$y_0-x_0=2022-p$

$\alpha=\dfrac{\quad}{b+q}$ $\quad (b+q)\alpha=-2022(b-q)+q^2-b^2$

~~если~~ $b\neq -q$, то $\alpha=\dfrac{-2022(b-q)}{b+q}+q-b \Rightarrow$

т.к. иначе $b=q=0$

$\boxed{q=ab}$

$\Rightarrow \dfrac{-2022(b-q)}{b+q}+q-b=\dfrac{-2022(a-q)}{a+q}+q-a$

$\dfrac{+2022(b-q)+b^2+bq}{b+q}=\dfrac{+2022(a-q)+a^2+aq}{a+q}$

b ~~$2022(b-q)(a+q)+(b^2+bq)(a+q)=2022(a-q)(b+q)+(a^2+aq)(b+q)$~~

~~$2022(ab+bq-aq-q^2)$~~$+ab^2$ $\quad a,b\neq 0$

$\dfrac{2022(b-ab)+b^2+ab^2}{ab+b}=\dfrac{2022(a-ab)+a^2+a^2b}{ab+a}$

$\dfrac{2022(1-a)+b+ab}{a+1}=\dfrac{2022(1-b)+a+ab}{b+1}$

$2022(-ab-a+b+1)+b^2+ab^2+b+ab=2022(-ab-b+a+1)+a^2+a^2b+a+ab$

$2022(-2a+2b)=a^2-b^2+a-b+a^2b-ab^2$

$4044(b-a)=(a-b)(a+b+1+ab) \Leftrightarrow a+b+ab=-4044$

$\boxed{p+q=-4044}$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик лист 4 из 8

5 продолж 2

$AB^2=p^2-4q=$ $\qquad p+q=-4044$

$q=-p-4044$

$=p^2+4p+4\cdot 4044 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ min AB достигается при $p=\dfrac{-4}{2}=-2$, т.е.

$AB^2\geq 4-8+4\cdot 4044=4(\cdot 4043)=4\cdot 4043$

$(AB)_{min}=\sqrt{4\cdot 4043}$ оценка достигается

т.к. из уравнений A, B, C мы однозн. опред. x_0 и y_0 отн. заданной кривой $y=x^2+px+q$,

а т.к. по усл. A, B, C, D сущ. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ окружн. (ABC) всегда $\exists$.

Ответ: $2\sqrt{4043}$.

Черновик $\quad b = \frac{3^\alpha - 1}{2}$

$|2[\operatorname{tg}\alpha]+1|^x = [\operatorname{tg}\alpha]^2 + 2 \quad b^2 = \frac{3^{2\alpha} - 2\cdot 3^\alpha + 1}{4} + 2$

$x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{m}{n}$

$[\operatorname{tg}\alpha] = b \in \mathbb{Z}$

$\cancel{2b}$

$\sqrt[n]{|2b+1|}^m = [b]^2 + 2 \quad$ mod 4 $\quad$ $\begin{array}{c|c} n & 3^n \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{array}$

$(|2b+1|)^m = (b^2+2)^n$

$3^{2\alpha} - 2\cdot 3^\alpha + 1 + 8 = 3^\beta \cdot 4$

$(2b+1)^m = (b^2+2)^n$ $\quad$ т.е. если $2b+1 \,\vdots\, p$, $p \neq 2$, то $b^2+2 \,\vdots\, p$

$b^2 - 2b + 1 \,\vdots\, p \quad \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4}) = -1$

$(b - 1)^2 \,\vdots\, p \quad \operatorname{tg}(0) = 0 \quad b \,\vdots\, p$

$b - 1 \,\vdots\, p$

$b - 2 \,\vdots\, p$

mod 9

$\begin{array}{c|c} b & b^2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ 4 & 16 = 7 \\ 5 & 25 = 16 \end{array}$

$b \underset{3^\beta}{\equiv} 1$

$2b+1$

$2b + 1 = 3^\alpha$

$b^2 + 2 = 3^\beta$

$b^2 - 2b + 1 = 3^\beta - 3^\alpha$

$(b-1)^2 = 3^\alpha(3^{\beta-\alpha} - 1) \,\vdots\, 2$

$3^{\beta-1}$ $\quad \alpha \,\vdots\, 2 \quad \vdots\, 4$

$2b \underset{9}{\equiv} -1$

$4b^2 \underset{9}{\equiv} 1$

$4b^2 \underset{9}{\equiv} -2\cdot 4 \equiv 8$

Чистовик лист 5 из 8

(6)

Пусть $b = [\operatorname{tg}\alpha] \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

$|2b+1|^m = (b^2+2)^n \Rightarrow$ ~~m,n~~ $m \geq 0$ т.к.

если $m < 0$, то $2b+1 \leq 1$, а $(b^2+2)^n > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ если $2b+1 \,\vdots\, p$ (простое), то $b^2+2 \,\vdots\, p \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 + 2 - 2b - 1 \,\vdots\, p \Leftrightarrow (b-1)^2 \,\vdots\, p \Leftrightarrow b - 1 \,\vdots\, p$

т.е. $b - 1 \,\vdots\, p$, $2b+1 \,\vdots\, p \Rightarrow b + 2 \,\vdots\, p \Rightarrow 3 \,\vdots\, p \Leftrightarrow p = 3$

~~но $b^2+2 \,\vdots\, 3$, т.к. $b^2 \not\equiv_3$~~ т.е. и $(2b+1)$, и b^2+2 являются степенями 3. $\Rightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b+1 = 3^\alpha \\ b^2+2 = 3^\beta \end{cases}$ ~~$b^2+2 = 3^\beta$, $b^2 = 3^\beta - 2 \Rightarrow b^2 \underset{3^\beta}{\equiv} -2$, то $b-1 \,\vdots\, p$, т.е. $b \underset{3^\beta}{\equiv} 1$~~

$2b = 3^\alpha - 1$

~~если~~ $4b^2 = 3^{2\alpha} - 2\cdot 3^\alpha + 1$

~~легко видеть~~ $4b^2 \underset{9}{\equiv} -2\cdot 3^\alpha + 1$

То есть наше уравнение равносильно системе $\begin{cases} 2b+1 = \pm 3^\alpha \\ b^2+2 = 3^\beta \end{cases}$, $\alpha, b \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow b = \frac{\pm 3^\alpha - 1}{2} \Rightarrow b^2 = \frac{3^{2\alpha} \mp 2\cdot 3^\alpha + 1}{4}$

$3^{2\alpha} \pm 2\cdot 3^\alpha + 1 + 8 = 3^\beta \cdot 4$;

$3^{2\alpha} \pm 2\cdot 3^\alpha - 3^\beta \cdot 4 = -9 \Rightarrow$ если $\alpha, \beta \geq 3$, то

$-9 \,\vdots\, 3^3$ – противоречие

Чистовик лист 6 из 8

в продолж.

если $\alpha, \beta \le 2$

$\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}$ $\begin{cases}|2b+1|=1\\ b^2+2=1\end{cases}$ $\varnothing$

~~$\alpha \ge 1$~~

$b^2+2=3^\beta \Rightarrow \beta \ge 1$

$\begin{cases}\beta=1\\ \alpha=0\end{cases}$ $\begin{cases}|2b+1|=1 \to b=-1 \text{ и } b=0\\ b^2+2=3 \to b=\pm 1\end{cases} \Rightarrow \boxed{b=-1}$

$\begin{cases}\beta=2\\ \alpha=0\end{cases}$ $\begin{cases}|2b+1|=1 \to b=-1 \text{ и } b=0\\ b^2+2=9\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}b=0\\ b=-1\end{array}\right.\\ b^2+2=9\end{cases}$ нет реш.

$\begin{cases}\beta=2\\ \alpha=1\end{cases}$ $|2b+1|=3$ при $\beta=2$ $b^2+2=9 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2=7 \Rightarrow b \notin \mathbb{Z}$.

Откуда только реш. $b=-1$

$[tg\, a]=-1 \Leftrightarrow tg\, a \in [-1, 0) \Leftrightarrow$

$a \in [-\frac{\pi}{4}, 0)$ из перер. тангенса

Ответ

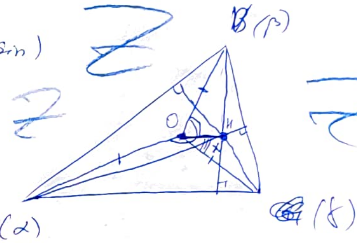
Черновик

$64\cos(x+\cos x)\cos(x-\cos x) - 8 = \frac{\pi^2}{9}$

$2(\cos 2x + \cos(\cos x)) = \frac{\pi^2}{9} - 1$

$\cos 2x + \cos(\cos x) = \left(\frac{\pi}{3\sqrt2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2$

$\Sigma S = \frac12 R \cdot OH(\Sigma \sin)$



$\Sigma \sin =$

$= \sin(2\beta + x) +$

$\sin x + \sin(2\alpha - x) =$

$= \sin 2\beta \cos x + \sin x \cos 2\beta +$

$+ \sin 2\alpha \cos x - \sin x \cos 2\alpha + \sin x =$

$= \cos x(\sin 2\beta + \sin 2\alpha) +$

$+ \sin x(\cos 2\beta + \cos 2\alpha + 1)$

$\angle POH = 2\beta + x$

$\angle HOG = x$

$\angle BOH = 2\alpha - x$

$\frac12 R \cdot OH(25-13)$

$\sin(2\beta - x) - \sin(2\alpha - x) =$

$= \cos x(\sin 2\beta - \sin 2\alpha) -$

$- \sin x(\cos 2\beta - \sin 2\alpha) =$

$= \cos x \cdot 2\sin(\beta-\alpha)\cos(\alpha+\beta) -$

$- \sin x \cdot 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) =$

$\frac12 R \cdot OH \cdot \sin(2\beta - x) = 25$

$\frac12 R \cdot OH \sin(2\alpha - x) = 13$

$\frac{\sin 2\beta \cos x - \sin x \cos 2\beta}{\sin 2\alpha \cos x - \sin x \cos 2\alpha} = \frac{25}{13}$

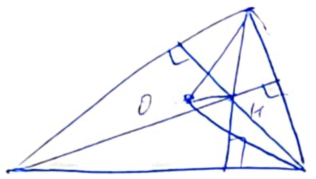
$\sin 2\beta$

$= -2\cos(\alpha+\beta)(+\sin x \cos(\alpha-\beta) +$

$+ \cos x \sin(\alpha - \beta)) =$

$= -2\cos(\alpha+\beta)\sin(x+\alpha-\beta)$

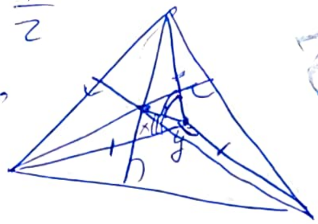
Черновик



$\pm \cancel{0}$

$\frac{\pi}{6} > \frac{1}{2}$

$4\pi > 6$

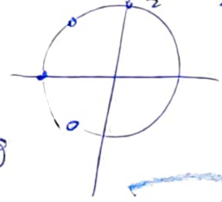


$\frac{\pi}{6} < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$2\pi^2 \le 36$

$\frac{\pi^2}{36} < \frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{2} = \frac{3{,}14}{2} > 1{,}5$



$36 \cos(x + \cos x)\cos(x - \cos x) = \pi^2 - 9$

$18(\cos 2x + \cos(2\cos x)) = \pi^2 - 9$

$2\cos x \in [-2, 2]$

$36 - 9 =$

$= 27$

$\cos(2\cos x) = 2\cos^2(\cos x) - 1$

$18(\cos 2x + 2\cos^2(\cos x)) = \pi^2 + 9 < 20$

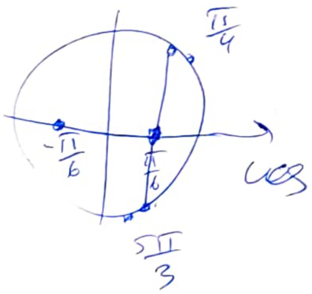
$36(\cos^2 x + \cos^2(\cos x)) = \pi^2 + 18$

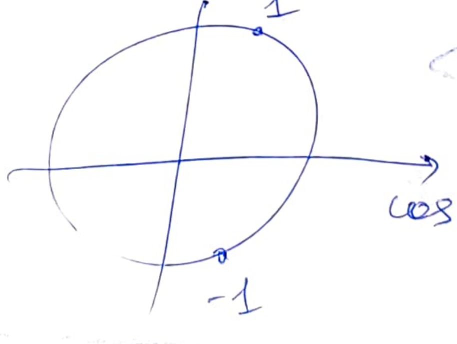
$\frac{36}{2}$

$+ 18 \cdot 2$

$\cos^2 x + \cos^2(\cos x) = \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{2}$

$18 \cdot 2 + 9$





3 Чистовик

лист 7 из 8

$$36\cos(x+\cos x)\cos(x-\cos x)+9=\pi^2$$

$$18(\cos 2x+\cos(2\cos x))=\pi^2-9$$

$$18(2\cos^2 x-1+2\cos^2(\cos x)-1)=\pi^2-9$$

~~$36(\cos^2 x+\cos^2(\cos x))=\pi^2+$~~

$$18(2\cos^2 x+2\cos^2(\cos x))-36=\pi^2-9$$

$$36(\cos^2 x+\cos^2(\cos x))=\pi^2+27$$

$$\cos^2 x+\cos^2(\cos x)=\left(\frac{\pi}{6}\right)^2+\frac{27}{36}=\left(\frac{\pi}{6}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt3}{6}\right)^2=$$

~~Пусть $t=\arccos$~~ x

$$=\left(\frac{\pi}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2$$

Пусть $t=\cos x \in[1,1]$, тогда

$$\underbrace{t^2+\cos^2 t}_{=f(t)}=\left(\frac{\pi}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2 \quad (*)$$

Заметим, что при $t\in[0,1]$ $f(t)$ ~~$\nearrow$~~, $\downarrow$

а при $t\in[-1,0)$ $f(t)\nearrow$ $\Rightarrow$ уравн. $(*)$ имеет не более двух реш. отн. t

$t=\frac{\pi}{6}$ и $t=-\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \cos x=\pm\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x=\pm\arccos\frac{\pi}{6}+2\pi k \\ x=\pm\arccos-\frac{\pi}{6}+2\pi k \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

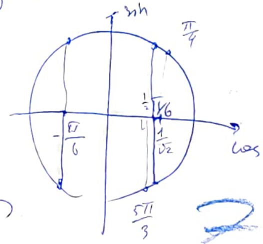
ответ

Чистовик лист 8 из 8

3 продолжение

Легко видеть, что

$\frac{1}{2} < \frac{\pi}{6} < \frac{1}{\sqrt{2}}$



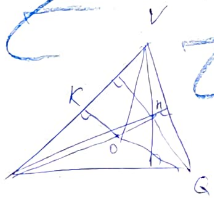
т.к. $2\pi > 6$, $2\pi^2 < 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ отрезку $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}\right]$ принадлежат

только $\arccos\frac{\pi}{6}$, $2\arccos -\frac{\pi}{6}$.

Ответ.

(4)



$S_{OHV} = \frac{1}{2}R \cdot OH \sin\angle HOV$

$S_{OHP} = \frac{1}{2}R \cdot OH \sin\angle HOP$

$S_{OHG} = \frac{1}{2}R \cdot OH \sin\angle HOG$

Заметим, что $\angle OGH = 2\angle P + \angle V$

пусть $OK \perp PV$, $K \in PV \Rightarrow OK = R\cos\angle G$, но

$GH = 2OK = 2R\cos\angle G$ из св-ва ортоцентра $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{OHG} = \frac{1}{2}R \cdot 2R\cos\angle G \cdot \sin(2\angle P + \angle V) = R^2 \sin(2P + 2V)$.

$\angle G = 2V - 180$

$= R^2(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\sin\alpha\cos\alpha) = R^2\cos G(\cos(G-P))$

Аналогично

получим ос. площади. $= R^2\cos\angle G \sin(\angle V - \angle P) =$

$= R^2\cos(2P+V)\sin(2V-2P)$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

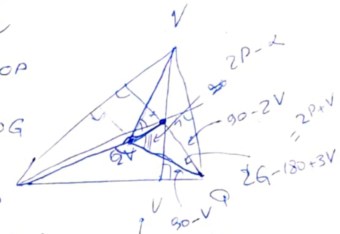
~~Чистовик~~ Черновик

(4)

$S_{OHV} = \frac{1}{2}R \cdot OH \cdot \sin\angle HOV$

$S_{OHP} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot OH \cdot \sin\angle HOP$

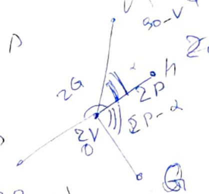
$S_{OHG} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot OH \sin\angle HOG$



$\sin(x)$, $\sin y$

$x + y = 2P$

$\sin(2G + y)$



$\sin(2G + \alpha)$, $\sin\alpha$, $\sin(2P - \alpha)$

$= 180 - 2P + \alpha + 180 - 2G - 3V =$

$= 360 - 180 + \alpha - V =$

$= 180 + \alpha - V$

$S_{OPQ} = \frac{1}{2}R^2\sin 2V$

S_{PQH}

$(2P + V) = 90 - G + P =$

$= \cos(G - P)$

$h = R\cos V$

$S_{OHG} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot 2R\cos G \sin(2P + V) =$

$= R^2\cos G\sin(2P+V)$ $\quad \cos G = \cos(90 - P + V) =$

$= \sin(P + V)$

$\cos G(\sin 2P\cos V + \sin V\cos 2P) =$

$\sin P\cos V + \sin V\cos P$ $\quad 2\sin P\cos P\cos V + \sin V\cos^2 P - \sin V\sin^2 P$

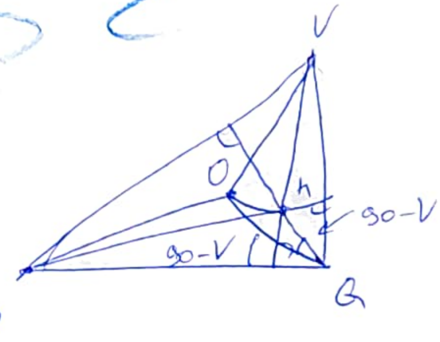
$= (\sin P\cos V + \sin V\cos P)(2\sin P\cos V\cos P + \sin V(\cos^2 P - \sin^2 P))$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Черновик

$S = R^2 \cancel{\sin G}$

$R^2 \cos G \sin(2P+V)$



~~G 90+V-G~~

$P+V+G=180$

$G-180+2V=$

$=90-P+V-180=$

$=V-P-90=$

$=$

$V-P$

$\sin(V-P-90)=$

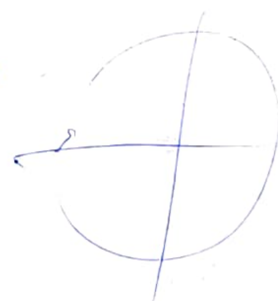
$=-\sin(90+P-V)=$

$=-\cos(P-V)$

~~2V>P~~

$R^2\cos G\sin(V-P) = R^2\cos$

$180-\cancel{V}-P$



$-\cos(V+P)$

$-R^2\cos(V+P)\sin(V-P)$

$(\cos V\cos P-\sin V\sin P)(\sin V\cos P-\sin P\cos V)$