0 962467 860002

96-24-67-86
(163.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант А-3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы Горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Матвилова Александра Андреевна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«7» апреля 2024 года

Подпись участника

80 (воспользуйся) ✗ [illegible]

96-24-67-86 (163.1)

Черновик

№2

$f(x)=|2x+3|-|2x+1|+4$, при $x\in[-2;0]$

$f(x+3)\le f(x)+6$, $f(x+2)\ge f(x)+4$

$f(x+4)\ge f(x+2)+4\ge f(x)+8$

$f(x+2\cdot k)\ge f(x)+\cancel{2k}\ 2k$

$f(x+6)\le f(x+3)+6\le f(x)+12$

$f(x+3\cdot n)\le f(x)+2\cdot n$

$f(x+6\cdot r)\le f(x)+2\cdot 6r$ $\quad f(x+6r)=f(x)+2\cdot 6r$

$f(x+6\cdot r)\ge f(x)+2\cdot 6r$

$f(x+6\cdot r)\ge f(x)+12$

$f(x)+12\le f(x+6)\le f(x)+12$

$f(x+6)=f(x)+12$

$f(2024)=f(6\cdot 337+2)=$

$f(x+6r)=f(x)+\cancel{2r}$

$f(x+12)=f(x+6)+12=f(x)+24$

$f(x+6r)=f(x)+2\cdot 6r$

$f(2024)=f(2)+2\cdot 6\cdot 337$

$f(2)=f(0+2)\ge f(0)+4=|3|-|1|+4+4=8+2=10$

$f(2)=f(-1+3)\le f(-1)+6=|3-2|-|1-2|+4+6=$

$=|1|-|1|+10=10$

$2024:6=337$ (ост. 2)

$337\cdot 6=2022$

№3 $36\cos(x+\cos x)\cdot\cos(x-\cos x)+9=\pi^2$

~~$\cos(x+\cos x)=\cos x\cdot\cos(\cos x$~~ $\cos x=y$

$\cos(x+\cos x)=\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$

$\cos(x+\cos x)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y$

$\cos(x-\cos x)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y$

$\frac{\pi^2-9}{36}=\cos^2x\cdot\cos^2y-\sin^2x\cdot\sin^2y=y^2-\sin^2y$

$\cos^2x\cdot\cos^2y = y^2\cdot\cos^2y$, $\quad \sin^2x\cdot\sin^2y = (1-y^2)\cdot\sin^2y$

$$\frac{\pi^2-9}{36} = \cos^2 x - \sin^2(\cos x) = \cos^2 x - (1-\cos^2(\cos x)) = \cos^2 x + \cos^2(\cos x) - 1$$

$$\frac{\pi^2}{36} - \frac{1}{4} = \cos^2 x - \sin^2(\cos x)$$

$t_\alpha - t_\beta = -300$

$t_\alpha,\ t_\beta,\quad t_\alpha = t_\beta - 300$

$(V_\alpha - 3)t_\alpha = 700 + (V_\beta - 3)\cdot t_\beta$

$(V_\alpha - 3)t_\alpha = 700 + V_\beta \cdot t_\beta - 3t_\beta$

$V_\alpha \cdot t_\alpha - 3\cdot t_\alpha$

$S_\alpha = 700 + 3(t_\alpha - t_\beta) + S_\beta$

$700 - 900 = -200$

$S_\alpha + 200 = S_\beta$

$(V_\alpha - 3)t_\alpha = -700 - (V_\beta - 3)t_\beta$

$V_\alpha t_\alpha = 3(t_\alpha + t_\beta) - 700 - V_\beta t_\beta$

$$\frac{\pi^2-9}{36} = (\cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y)(\cos x\cdot\cos y + \sin x\cdot\sin y) = \cos^2 x\cdot\cos^2 y - (1-\cos^2 x)\sin^2 y =$$
$$= \cos^2 x\cdot\cos^2 y - \sin^2 x\cdot\sin^2 y - \sin^2 y = \cos^2 x - \sin^2 y =$$
$$= \cos^2 x(\cos^2 y + \sin^2 y)$$
$$= y^2 - \sin^2 y$$

$y = \cos x$ $\quad x\nearrow,\ y\searrow,\ \sin y\searrow$

$\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{5\pi}{3}\right]$ $\quad -1 \le y \le 1 < \frac{\pi}{2}$

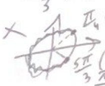
$y = \frac{\pi}{6}:\ \frac{\pi^2}{36} - \frac{1}{4} = y^2 - \sin^2 y$

$\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$

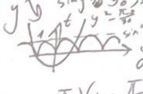
$x\nearrow\ \cos x\searrow,\ y\searrow$

$\frac{5\pi}{3} = \pi + \frac{2\pi}{3}$ $\quad y = \cos x$ $\quad -1 \le y <$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin y\ y_0,\ \sin^2 y\ y_0$



$\left[\frac{\pi}{4};\ \pi\right]:\ x\nearrow,\ y\searrow$



$\frac{\pi^2+27}{36}$

$\sin^2 y - \frac{1}{4} = y^2 - \frac{\pi^2}{36}$

$y^2 = \sin^2 y + \frac{\pi^2-9}{36}$

$(\sin y - \frac{1}{2})(\sin y + \frac{1}{2}) = (y - \frac{\pi}{6})(y + \frac{\pi}{6})$

$y^2 - \sin^2 y$

$\frac{\pi^2-9}{36}$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

96-24-67-86 (163.1)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик

№ 2

Заметим, что $\forall x \in \mathbb{Z}:\ f(x+6) = f((x+4)+2) \ge f(x+4)+4 = f((x+2)+2)+4 \ge f(x+2)+8 \ge f(x)+12$ и $f(x+6) = f((x+3)+3) \le f(x+3)+6 \le f(x)+12$, т. $f(x)+12 \le f(x+6) \le f(x)+12$, т.е. $f(x+6) = f(x)+12$

Докажем по индукции, что $f(x+6r) = f(x)+12r$

I База: $r=1$ $\quad f(x+6) = f(x)+12$ по пред. док-ву (+)

II Шаг: Дано: $r=k$ $\quad f(x+6k) = f(x)+12k$

Док-ть: $r=k+1$ $\quad f(x+6(k+1)) = f(x)+12(k+1)$

Док-во: $f(x+6(k+1)) = f(x+6k+6) = f(x+6k)+12 = f(x)+12k+12 = f(x)+12(k+1)$

III Вывод: по ММИ доказали, что $\forall r \in \mathbb{N}:\ f(x+6r) = f(x)+12r$

$2024 = 337\cdot 6 + 2$, т. $f(2024) = f(2) + 12\cdot 337$

$f(2) = f(0+2) \ge f(0)+4$, $f(0) = |0+3| - |0+1| + 4 = 6$

$f(2) = f(-1+3) \le f(-1)+6$, $f(-1) = |-2+3| - |-2+1| + 4 = 4$

т. $f(0)+4 = 10$, $f(-1)+6 = 10$, т. $10 \le f(2) \le 10$, т. $f(2) = 10$

т. $f(2024) = f(2) + 12\cdot 337 = 10 + 12\cdot 337 = 10 + 2022\cdot 2 = 10 + 4044 = 4054$

$$\begin{array}{r} \times\ 337 \\ 6 \\ \hline 2022 \end{array}$$

Ответ: $f(2024) = 4054$

№ 1

Пусть t_α сек. – время модели Альфа в воздухе, а t_β сек. – время модели Бета в воздухе. V_α м/с – скорость модели Альфа (при безветренной погоде), V_β м/с – скорость модели Бета (при безветренной погоде). Тогда при встречном ветре 3 м/с скорость Альфы будет $(V_\alpha - 3)$ м/с, а скорость Беты $(V_\beta - 3)$ м/с.

Тогда $(V_\alpha - 3)\,t_\alpha = 700 + (V_\beta - 3)t_\beta$, т.к. модели летят в одну сторону и Альфа пролетела на 700 м. дальше, то $t_\alpha + 300 = t_\beta$, т.к. Бета летела на 300 сек. дольше. Следовательно $V_\alpha\cdot t_\alpha - 3\cdot t_\alpha = 700 + V_\beta\cdot t_\beta - 3\cdot t_\beta$, т. $V_\alpha t_\alpha + 3(t_\beta - t_\alpha) - 700 = V_\beta\cdot t_\beta$, $t_\beta - t_\alpha = 300$, т. $V_\alpha\cdot t_\alpha + 900 - 700 = V_\beta t_\beta$, т. $V_\beta\cdot t_\beta = 200 + V_\alpha\cdot t_\alpha$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик
(№1)

Заметим, что $V_\alpha \cdot t_\alpha$ м Альфа пролетит при безветренной погоде, а $V_\beta \cdot t_\beta$ м Бета при безветренной погоде. Получается при безветренной погоде Бета пролетит на 200 м. дальше.

Ответ: Бета пролетит дальше на 200 м.

№3

$36 \cdot \cos(x+\cos x)\cdot\cos(x-\cos x)+9=\pi^2$

$\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)=\frac{\pi^2-9}{36}$

Пусть $y=\cos x$, тогда

$(\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y)(\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y)=\frac{\pi^2-9}{36}$

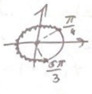
$\cos^2x\cdot\cos^2y-\sin^2x\cdot\sin^2y=\frac{\pi^2-9}{36}$

то $\cos^2x\cdot\cos^2y-(1-\cos^2x)\cdot\sin^2y=$

то $\frac{\pi^2-9}{36}$

$=\cos^2x(\cos^2y+\sin^2y)-\sin^2y=\cos^2x-\sin^2y=y^2-\sin^2y$

то $\left(\frac{\pi}{6}\right)^2-\frac{1}{4}=\cos^2x-\sin^2(\cos x)$



При $x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{3}\right]$, $\cos x\in\left[-1;\frac{1}{\sqrt2}\right]$,

т.е. $y\in\left[-1;\frac{1}{\sqrt2}\right]$

Однако $\frac{\pi}{6}<\frac{1}{\sqrt2}$, т.к. $\pi<4<3\sqrt2$

то $x=\arccos\frac{\pi}{6}$ – корень уравн., т.к. тогда $y=\frac{\pi}{6}$, $y^2-\sin^2y=\left(\frac{\pi}{6}\right)^2-\frac{1}{4}=\frac{\pi^2-9}{36}$

$\sin y=\frac12$, то $y=\frac{\pi}{6}\notin\left[-1;\frac12\right]$

$\frac{\pi}{6}>\frac12$, т.к. $\pi>3$, то $x=\arccos\frac{\pi}{6}$ ~~подходит~~

то $x=-\arccos\frac{\pi}{6}+2\pi\notin\left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{3}\right]$, то $x=\arccos\frac{\pi}{6}$ – единственное решение.

Ответ: $\arccos\frac{\pi}{6}$

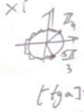
96-24-67-86 (163.1)

Черновик

$\left(\frac{\pi}{6}\right)^2-\frac14=y^2-\sin^2y$

$-1\le y\le\frac{1}{\sqrt2}$, $0\le y^2\le1$

$-1\le\sin y\le1$, $0\le\sin^2y\le1$



$[tg\,a]=-5$

$|2[tg\,a]+1|^x=[tg\,a]^2+2$

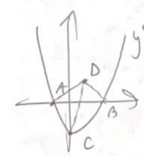
$9^x=27$

$x=\log_9 27=\frac32\log_3 3=1{,}5$

$3^x=3$

$x=\log_3 3=1$

$D=p^2-4q$



$y=x^2+px+q$

$C(0;q)$

$B\left(\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2};0\right)$

$A\left(\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2};0\right)$

$\frac{p}{2}=4{,}97$

$AB=\sqrt{p^2-4q}=\sqrt D$

$D(x;y)$, $x+y=-2022$

$AD=BD=CD$, то $AD^2=BD^2=CD^2$

$D\left(-\frac{p}{2};y\right)$ $y=-2022+\frac{p}{2}$

$D+y^2=\frac{p^2}{4}+y^2-2yq+q^2$

$D=\frac{p^2}{4}+q^2-2\left(\frac{p}{2}-2022\right)q=$

$=\frac{p^2}{4}+q^2-pq+4044q$

$\left(\frac{p}{2}-q\right)^2+4044q$

$BD^2=p^2-4q+y^2$

$CD^2=\frac{p^2}{4}+(y-q)^2$

$p^2-4q+y^2=\frac{p^2}{4}+(y-q)^2$

$p^2-4q+\left(\frac{p}{2}-2022\right)^2=\frac{p^2}{4}+\left(\frac{p}{2}-2022-q\right)^2$

$p^2-4q+\frac{p^2}{4}-2022p+2022^2=\frac{p^2}{4}+\frac{p^2}{4}+2022^2+q^2-2022p-pq+2\cdot2022q$

$p^2-4q=\frac{p^2}{4}+q^2-pq+4044q$

$4p^2-16q=p^2+4q^2-4pq+4\cdot4044q$

$3p^2+4pq-4q^2=4\cdot4048q$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

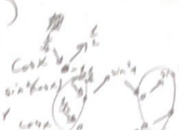
Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик

$\frac{\pi^2-9}{36} = y^2 - \sin^2 y$ $\quad (\frac{\pi}{6})^2 - \frac{1}{4} = \cos^2 x - \sin(\cos x)$

$x = \log_{|2[tg\, a]+1|}([tg\, a]^2+2)$

$[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}]$



$|2[tg\, a]+1|^x = [tg\, a]^2+2$

$x=1$: $([tg\, a]-1)^2 = 0$ $\quad [tg\, a] = 1$

$x=2$: $4[tg\, a]^2 + 4[tg\, a] + 1 = [tg\, a]^2 + 2$

$3[tg\, a]^2 + 4[tg\, a] - 1 = 0$

$y^2 + \frac{1}{4} = \sin^2 y + (\frac{\pi}{6})^2$

$D = 16 + 12 = 28$

$y > \frac{\pi}{k}$

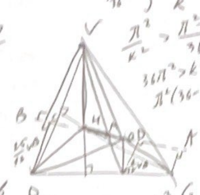
$|2t+1|^x = t^2+2, \quad t \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi^2}{k^2} > \frac{\pi^2-9}{36}$

$36\pi^2 > k^2\pi^2 - 9k^2$

$\pi^2(36-k^2) > -9k^2$

$x = \log_{|2t+1|}(t^2+2)$



$x = \frac{a}{b}, \quad a \in \mathbb{Z}, \quad b \in \mathbb{N}$

$|2t+1|^a = (t^2+2)^b \geq 2^b$

$\pi^2 > \frac{9k^2}{36-k^2}$

$AB = \sqrt{p^2+4p-4\cdot 4043} = \sqrt{(p+2)^2 - 4\cdot 4044}$

$p = 4\cdot 4044 - 2 + \ldots$

$y > \frac{\pi}{6}$ $\quad y > \frac{\pi}{4}$

$y^2 > \frac{\pi^2}{36}$ $\quad y^2 - \sin^2 y > \frac{\pi^2}{36} - 1$

$(\frac{\pi}{5})^2 - 1 >$

$y^2 - \sin^2 y \geq \frac{9\pi^2}{36} - 1 = \frac{9\pi^2-36}{36} = \frac{9(\pi^2-4)}{36}$

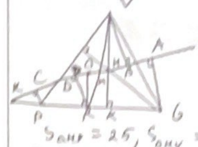
$y > \frac{\pi}{3}$ $\quad y^2 > \frac{\pi^2}{4} = \frac{9\pi^2}{36}$

$x > \frac{\pi^2-9}{36}$

$36x + 9 > \pi^2$

Чистовик

№4



$VH \cap PG = K$

M — т. пересечения медиан $\triangle PVG$

$M \in OH$, $\frac{OM}{MH} = \frac{1}{2}$ | по св-ву прямой Эйлера

Пусть $GA \perp OH$, $VB \perp OH$, $PC \perp OH$, тогда $S_{OHP} = \frac{1}{2}\cdot OH \cdot PC$, $S_{OHV} = \frac{1}{2}\cdot OH\cdot VB$

$S_{OHP} = 25$, $S_{OHV} = 13$ по усл., т.е. $\frac{PC}{VB} = \frac{S_{OHP}}{S_{OHV}} = \frac{25}{13}$

Пусть $VM \cap PG = R$, тогда R — сер. PG по опр. мед.,

т.е. $OR \perp PG$, т.к. O — т. пер. сер. перп. к сторонам по св-ву центра опис. окр., ~~$VH \perp PG$~~

~~$VH \parallel OR$~~ $\quad \frac{VM}{MR} = \frac{2}{1}$ | по св-ву т. пер. мед. в треуг.

Пусть $RD \perp OH$, тогда $\angle RDM = \angle VBM = 90°$ по опр. перп., $\angle VMB = \angle DMR$ по св-ву вертик. угл., т.е. $\triangle DMR \sim \triangle VMB$ по I признаку

т.е. $\frac{RD}{VB} = \frac{RM}{VM} = \frac{1}{2}$, $\quad R$ — сер. PG по пред. док-ву

$PC \parallel DR \parallel AG$, т.е. $PCAG$ или трап., или парал.

~~1) Если $PCAG$ — парал., тогда RD — ср. л. в этой парал. по признаку (R — сер. PG, $DR \parallel AG$)~~

~~т.е. $DR = CP = AG$ по св-ву ср. л. парал.~~

~~т.е. $GA = CP = \frac{25}{13} VB$~~

~~2) Если $PCAG$ — трап., тогда RD — ср. л. в этой трап. по признаку (R — сер. PG, $DR \parallel AG$)~~

~~т.е. $DR = \frac{1}{2}\cdot(CP + AG)$ по св-ву ср. л. трап.~~

~~т.е. $\frac{1}{2} VB = \frac{1}{2}(\frac{25}{13} VB + AG)$, т.е. $AG = VB - \frac{25}{13} VB = -\frac{12}{13} VB$~~

~~т.е. $\vec{RD} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{PC} + \vec{GA})$ по св-ву векторов~~

т.к. $\vec{RD} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{PC} + \vec{GA})$ по св-ву векторов

$\triangle PVG$ остроуг., т.е. O внутри треуг. $\triangle PVG$

т.е. $\vec{RD} \uparrow\downarrow \vec{VB}$, т.е. $\vec{RD} = -\frac{1}{2}\cdot\vec{VB}$

т.е. $-\vec{VB} = \vec{PC} + \vec{GA}$

1) Если $\vec{PC} \uparrow\uparrow \vec{VB}$, тогда $\vec{PC} = \frac{25}{13}\vec{VB}$, $\vec{GA} \uparrow\downarrow \vec{VB}$,

то $\vec{GA} = -\vec{VB} - \vec{PC} = -\frac{38}{13}\vec{VB}$

(№4)

2) Если $\vec{PC} \uparrow\downarrow \vec{VB}$, тогда $\vec{PC} = -\frac{25}{13}\cdot\vec{VB}$

т. $\vec{GA} = -\vec{VB} - \vec{PC} = \frac{12}{13}\vec{VB}$

т. $\left[\begin{aligned} GA &= \frac{12}{13} VB \\ GA &= \frac{38}{13} VB \end{aligned}\right.$

$S_{OHG} = \frac{1}{2}\cdot OH \cdot GA$, т. $S_{OHG} = S_{OHV}\cdot\frac{GA}{VB} = 13\cdot\frac{GA}{VB}$

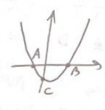
т. $\left[\begin{aligned} S_{OHG} &= 12 \\ S_{OHG} &= 38 \end{aligned}\right.$

Ответ: $S_{OHG} = 12$ или $S_{OHG} = 38$ ($\vec{AG} \uparrow\downarrow \vec{VB}$ в других случаях)

($\vec{AG} \uparrow\uparrow \vec{VB}$, когда $OH \cap PG \in$ отр. KG, и $\vec{AG} \uparrow\downarrow \vec{VB}$ в других случаях)

№5

$A(x_a;0)$, $B(x_b;0)$, $C(0;y_c)$, $D(x;y)$



1) $y_c = 0 + p\cdot 0 + q = q$, т. $C(0;q)$

2) $0 = x^2 + px + q$

$D = p^2 - 4q$, т. $x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2-4q}}{2}$

Без ограничения общности можно сказать, что $x_a < 0$, тогда $x_a = \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$,

$x_b = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$

т. $A\left(\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2};0\right)$, $B\left(\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2};0\right)$

3) $AD = BD = CD$

(1) $AD = BD$; т. $AD^2 = BD^2$, т. $\left(x - \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x - \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)^2 + y^2$, т. $\left(x - \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)^2 = 0$, т. $\left(\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} - \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)\cdot\left(2x - \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} - \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\right) = 0$, т. $\sqrt{p^2-4q}\,(2x+p) = 0$, если $\sqrt{p^2-4q} = 0$, то $x_a = x_b$, т. A и B совпадают, что противоречит усл.,

т. $\sqrt{p^2-4q} \neq 0$, т. $x = -\frac{p}{2}$

(2) $AD = CD$, т. $AD^2 = CD^2$, т. $\left(-\frac{p}{2} - \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)^2 + y^2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 + (y-q)^2$, т. $\frac{p^2-4q}{4} + y^2 = \frac{p^2}{4} + y^2 - 2yq + q^2$

т. $-q = -2yq + q^2$, т. $(-2y + q + 1)q = 0$

(№5)

Если $q = 0$, то $C(0;0)$, т. C будет пересечением кривой с OX, т. C совп. с A или B, что противоречит условию, т. $q \neq 0$, т. $y = \frac{q+1}{2}$, т. $D\left(-\frac{p}{2}; \frac{q+1}{2}\right)$

4) т. вычислили, что только при таких значениях x и y $AD^2 = BD^2$ и $AD^2 = CD^2$, что необходимо, также $AD > 0$, $BD > 0$, $CD > 0$, т. $AD = BD = CD$, т. D равноудал. от A, B и C, т. она удовл. усл., т. искомая точка D может иметь только координаты

$\left(-\frac{p}{2}; \frac{q+1}{2}\right)$

5) $x + y = -2022$ по условию, т. $-\frac{p}{2} + \frac{q+1}{2} = -2022$

$-p + q + 1 = -2\cdot 2022 = -4044$, т. $q = p - 4044 - 1 = p - 4045$

6) $AB = \sqrt{\left(\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} - \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)^2} = \left|\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}+p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\right| = \sqrt{p^2-4q} = \sqrt{p^2-4(p-4045)} = \sqrt{p^2-4p+4\cdot 4045} = \sqrt{p^2-4p+4+4\cdot 4044} = \sqrt{(p-2)^2+4\cdot 4044} \geq \sqrt{4\cdot 4044} = 4\sqrt{1011}$

т. $AB_{min} = 4\sqrt{1011}$ и достигается при $p = 2$, $q = -4043$

При таких p и q A, B и C не совпадают, т.к.

$\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} = \frac{-2-4\sqrt{1011}}{2} = -1-2\sqrt{1011}$

$\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} = \frac{-2+4\sqrt{1011}}{2} = -1+2\sqrt{1011}$

т.е. $A(-1-2\sqrt{1011}, 0)$, $B(-1+2\sqrt{1011}; 0)$, $C(0;-4043)$

Получается данные p и q удовлетворяют условию, т. $AB_{min} = 4\sqrt{1011}$ достижимо.

Ответ: $AB_{min} = 4\sqrt{1011}$ (при $p = 2$, $q = -4043$)

Черновик

$y^2 - \sin^2 y \cancel{\ } = \frac{\pi^2}{36} - \frac{1}{4}$

$\frac{\pi^2}{k^2} - 1 > \frac{\pi^2}{36} - \frac{1}{4}$

$36\pi^2 - 36k^2 > k^2\pi^2 - 9k^2$

$\cancel{35k\pi^2 > 27k^2}$

$(36 - k^2)\pi^2 > 45k^2$

$\pi^2 > 9$ $\quad 9(36-k^2) > 45k^2$

$9 \cdot 36 > 54k^2$

$k^2 < \frac{9 \cdot 36}{54} = \frac{36}{6} = 6$

$k < \sqrt{6}$