79-60-68-12
(161.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

+1л

Вариант А-3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

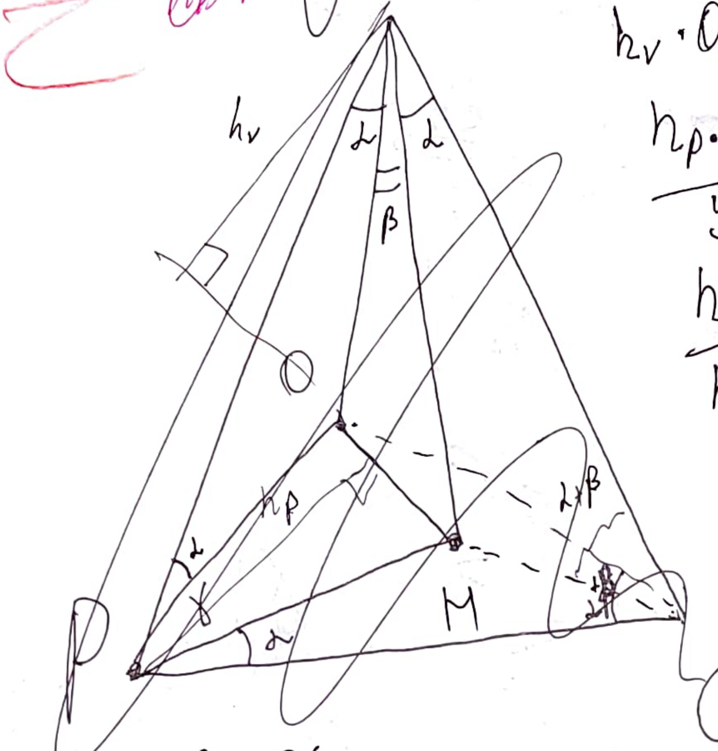
Куклина Ивана Викторовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«7» апреля 2024 года

Подпись участника
КИВ

75

~~чертование~~ Чистовик

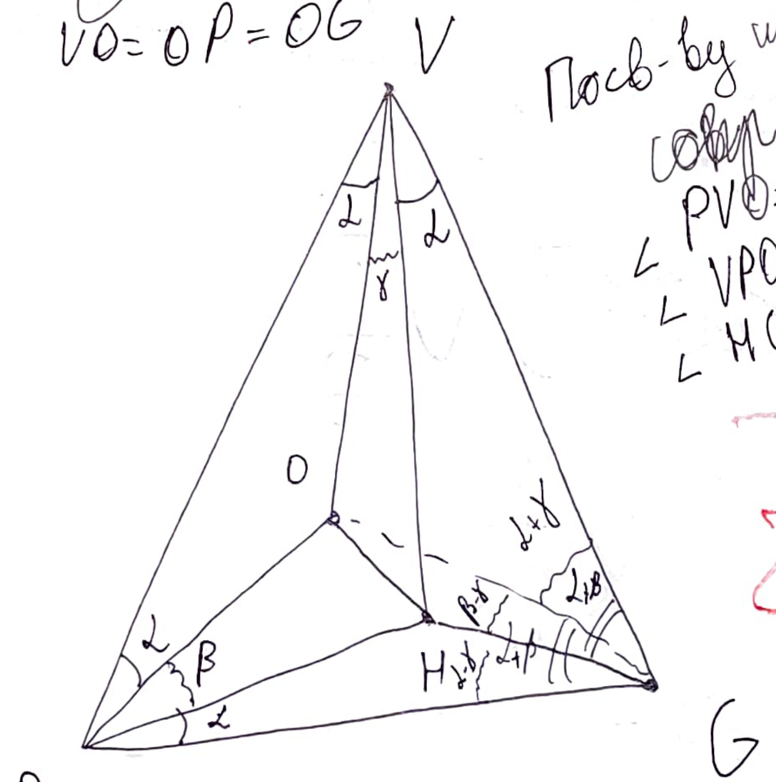


$h_v \cdot OH = 50$

$h_p \cdot OH = 26.$

$\dfrac{h_v}{h_p} = \dfrac{25}{13}.$

$VO = OP = OG$



По св-ву изогонального сопряжения

$\angle PVO = \angle HVG = \alpha$

$\angle VPO = \angle HPG$

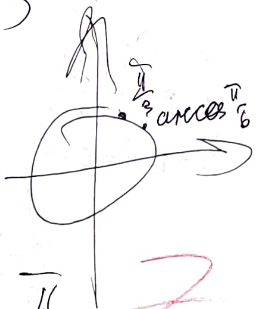
$\angle HGV = \angle OGP$

черновик

$\arccos\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{6}$ $\frac{1}{2}$

π 3



$<$

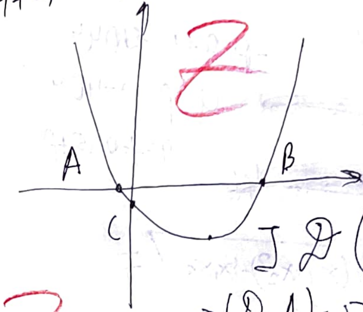
$\arccos\frac{\pi}{6} \vee \frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{6} \vee \frac{1}{2}$

$>$

по т. Виета $x_1+x_2=q$ чистовик $x_{1,2}$ – корни трехчлена

$q\neq 0$, т.к. $A\neq B\neq C$



$C(0;\,q)$

$A(x_1;\,0)$

$B(x_2;\,0)$

$\exists\, D(x;y);\ x+y=-2022$

$\rho(D;A)=\rho(D;B)=\rho(D;C)$

$(x-x_1)^2+y^2=(x-x_2)^2+y^2=x^2+(y-q)^2$

$|x-x_1|=|x-x_2|$

т.к. $x_1\neq x_2$

$x-x_1=x_2-x$

$x=\frac{x_2+x_1}{2}=-\frac{p}{2}$

$-2x_2x+x_2^2=-2yq+q^2$

$y=\frac{q^2+2xx_2-x_2^2}{2q}=$

$=\frac{q^2+2xx_1-x_1^2}{2q}$

~~$x+y=\frac{q(x_1+x_2)+q^2+2xx_1-x_1^2}{2q}$~~

$2y=\frac{2q^2+2x(x_1+x_2)-x_1^2-x_2^2}{2q}=$

$=\frac{2q^2+2x_1x_2}{2q}=\frac{2q^2+2q}{2q}=$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

черновик

$= q+1$.

$y = \frac{q+1}{2}$

$-\frac{p}{2} + \frac{q+1}{2} = -2022$

$-p+q+1 = -4044$

$q-p = -4045$

$q = -4045+p$

~~$-p+2q = -2022 \cdot 2$~~

~~$p+2q = 4046$.~~

$AB = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} =$

$= \sqrt{p^2 - 4q} = \sqrt{p^2 + 4(4045-p)} =$

$= \sqrt{p^2 - 4p + 4 \cdot 4045} = \sqrt{(p-2)^2 + 4 \cdot 4045 - 4} =$

$= \sqrt{(p-2)^2 + 4 \cdot 4044} \geq \sqrt{16176} = 4\sqrt{1011}$

равенство дост при $p = 2$

$$\begin{array}{r} 4044 \\ \times\ 4 \\ \hline 16176 \end{array}$$

Ответ: ~~16176~~. $4\sqrt{1011}$

$$\begin{array}{r|l} 1011 & 3 \\ \hline 9 & 337 \\ 11 & \\ 9 & \\ 27 & \end{array}$$

~~Чистовик~~ Черновик

№ 1

$v_{1x}; v_{1y}$
v_{2x}, v_{2y} > скорости БПЛА по вертикали и горизонтали соотв.

t_1
t_2 – время за которое они упали

h – высота, с которой стартуют

l_1
l_2 > сколько они пролетели.

Имеем: $\frac{l_1}{v_{1x}-3}=t_1$, $l_1=700+l_2$, $t_1=t_2-300$

$\frac{l_2}{v_{2x}-3}=t_2$, $t_1 v_{1y} = t_2 v_{2y} = h$

надо найти

$v_{1x}\frac{l_1}{v_{1y}} - \frac{l_2}{v_{2y}} \cdot v_{2x} =$

$= \frac{t_1(v_{1x}-3)\cdot v_{1x}}{v_{1y}} - \frac{t_2(v_{2x}-3)v_{2x}}{v_{2y}} =$

$=$

$\Downarrow$

$\cancel{t_2(v_{1y}\,300) = t_2 v_{2y}}$

$(t_2-300)v_{1y}=t_2 v_{2y}$

$1-\frac{300}{t_2}=\frac{v_{2y}}{v_{1y}}$

$l_1=t_1(v_{1x}-3)$

$l_2=t_2(v_{2x}-3)$

$2\cdot 2024+6=$

$=2(2024+3)=$

$=2\cdot 2027=$

$=4054$

Чистовик №

№ 1

Альфа пролетела на 300 секунд меньше, значит, ветер отнёс её на 900 метров меньше, чем Бету. Т.к. Бета пролетела на 700 метров меньше, получается, ~~что если бы альфа летела столько же, сколько бета, она бы пролетела~~ что если бы не ветер, то бета пролетела бы на 900−700=200 метров больше альфы.

Ответ: бета на 200 м больше.

79-60-68-12 (161.2)

Черновик

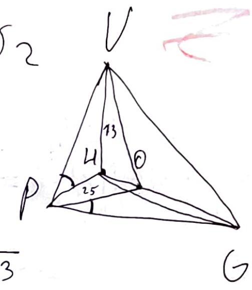
$3\ \frac{м}{с}$

v_1

v_2

$t_{б_1} = t_{б_2} - 300с$

$l_1 = 700 + l_2$



~~$3 \cdot v_1 = 7$~~

$(v_1 - 3)$

$\frac{l_1}{v_1 - 3}$

$(v_2 - 3)$

v_{1x}

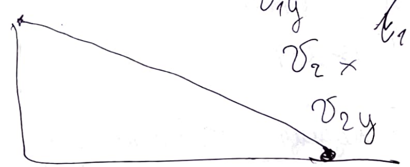
v_{1y}

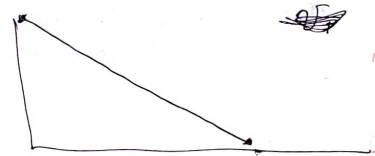
v_{2x}

v_{2y}

$t_{б_1} = t_{б_2} - 300с$

$l_1 = 700 + l_2$





Чистовик

№2

$f(x)=|2x+3|-|2x+1|+4,\ x\in[-2;0]$

$f(-2)=|-1|-|-3|+4=1-3+4=2$

$f(-1)=1-1+4=4$

$f(0)=3-1+4=6$

$f(x+3)\le f(x)+6 = f(x)+4+2 \le f(x+2)+2$

$f(x+1)\le f(x)+2$

~~$f(x\,f(1)\le 6+2=8$~~

$f(x-3)+6 \ge f(x) \ge f(x-2)+4 \quad (*)$

$2+6 \ge f(1) \ge 8$

$f(1)=8$

$f(-1)+6 \ge f(2) \ge f(0)+4$

$4+6 \ge f(2) \ge 6+4$

$f(2)=10$

Покажем по индукции, что $f(n)=2n+6$, где $n\in\mathbb{N}$

База $n=2$; $n=1$
$f(2)=10$. $f(1)=8$

Шаг: $\exists$ верно для n и для всех предыдущих: $f(n)=2n+6$, $f(n-1)=2n+4$.

$f(n-2)=2n+2$, $f(n-3)=2n$ ......

Из (*):

$f(n-2)+6 \ge f(n+1) \ge f(n-1)+4$

$2n+2+6 \ge f(n+1) \ge 2n+4+4$

79-60-68-12 (161.2)

Чистовик

$f(n+1)=2n+8=2(n+1)+6.$

Предположение верно. Значит,

$f(2024)=2\cdot 2024+6=4048+6=4054$

Ответ: 4054.

№3

$36\cos(x+\cos x)\cdot\cos(x-\cos x)+9=\pi^2$

$2\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

$18(\cos 2x+\cos(2\cos x))+9=\pi^2$

$2\cos 2x+2\cos(2\cos x)+1=\left(\frac{\pi}{3}\right)^2$

~~$\exists f(t)=4\cos 2t$~~

~~$f'(t)=-4\sin 2t$~~

~~$2f(t)+2t$~~

$4\cos^2 x+2\cos(2\cos x)=1+\left(\frac{\pi}{3}\right)^2$

$4\cos^2 x+4\cos^2(\cos x)=3+\left(\frac{\pi}{3}\right)^2$

$\exists f(t)=\cos^2 t$

$f(x)+f(\cos x)=\frac{3}{4}+\left(\frac{\pi}{6}\right)^2$

$\cos^2 x-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\left(\cos^2(\cos x)-\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\right)$

$\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\left(\cos\cos x-\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\cos x+\frac{\pi}{6}\right)$

$\cos x=a$

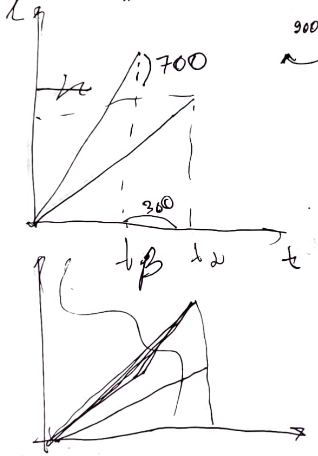
$\left(a-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(a+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\left(\cos a-\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos a+\frac{\pi}{6}\right)$

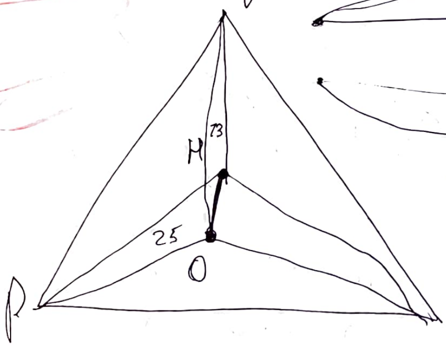
$4\cos^2 x+4\cos^2\cos x=\left(\frac{\pi}{3}\right)^2+3$

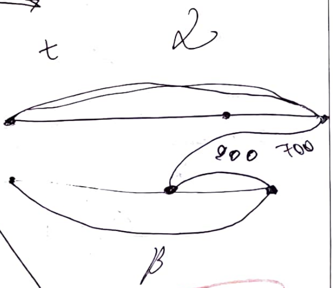
$\cos^2 x+\cos^2\cos x=\left(\frac{\pi}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

черновик.

900м





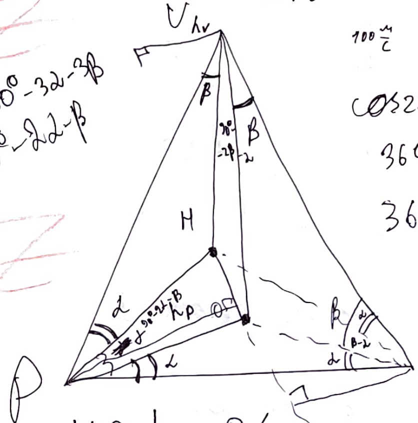


ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

черновик

$180^\circ - 3\alpha - 3\beta$

$90^\circ - 2\alpha - \beta$



100 м/с

$= 1 - 2\sin^2 x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 =$

$36\cos^2 x - 18 + 18 - 36\sin^2 x \cos$

$36\cos^2 x - 36\sin^2 \cos x =$

$= \pi^2 - 9$

$HO \cdot h_V = 26$

$MO \cdot h_P = 50$

$MO \cdot h_G - ?$

$\alpha + \gamma = \beta + \delta$

$\beta + \alpha + 2\alpha + \gamma + 2\beta + \delta = 180^\circ$

$\gamma + \delta = 180^\circ - 3\alpha - 3\beta$

$2\gamma + \alpha = 180^\circ - 3\alpha - 2\beta$

$90^\circ - 2\alpha - \beta$

$\gamma =$

$18\cos 2x + 18\cos 2\cos x + 9 = \pi^2$

$f(x)$

$\exists\ f(t) = 2\cos 2t$

$9 f(x) + 9 f(f(x)) + 9 = \pi^2$

$f(x) + f(f(x)) = \frac{\pi^2}{9} - 1$

$f(t) = \cos 2t$

$18 f(t) + 18 f(f(t)) = \pi^2 - 9$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик

$36\cos(\underbrace{x+\cos x}_{\alpha})\cdot\cos(\underbrace{x-\cos x}_{\beta})+9=\pi^2$

~~$36(\cos x\cos\cos x+\cos$~~

$2\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

$1+4\cos\alpha\cos\beta=1+2\cos(\alpha+\beta)+2\cos(\alpha-\beta)=$

$=1+2\cos 2x+2\cos 2\cos x=\frac{\pi^2}{9}$

$4\cos^2 x-3+4\cos^2\cos x=\frac{\pi^2}{9}$

$\cos^2 x+\cos^2\cos x=\frac{\pi^2}{36}+\frac{3}{4}$

$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f(t)=\cos^2 t$

$f(x)+f(\cos x)=\frac{\pi^2}{36}+\frac{3}{4}$

$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x=\frac{\pi}{6}$

$\cos\cos x=\frac{\pi}{6}$

$\cos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$

$\left(\frac{\pi}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

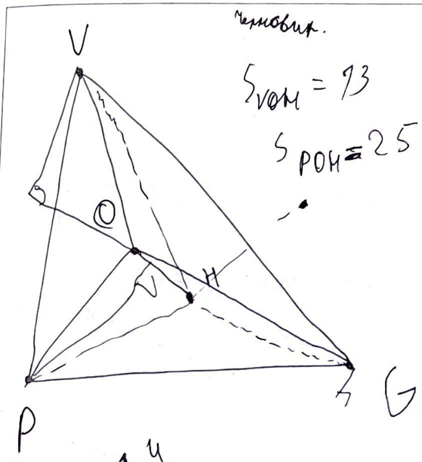
$\cos x=\frac{\pi}{6}$ $\cos(\cos x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x=$ ~~…~~ $\arccos\frac{\pi}{6}$ $\cos x=$ ~~…~~

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

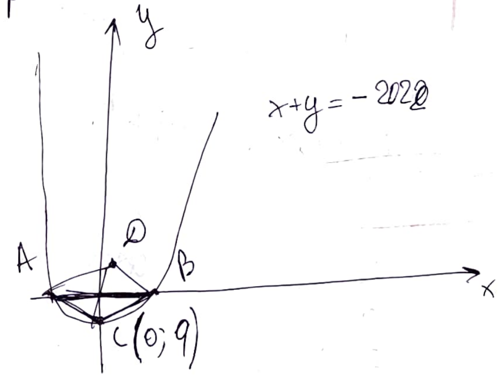
ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик.



$S_{VOH}=73$

$S_{POH}=25$



$x+y=-2020$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик

$18(\cos 2x + \cos 2\cos x)$ $\quad 2t = \sin 2t$

$\alpha = 0.$

$2\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$

$18\cos 2x + 18\cos 2\cos x + 9 = \pi^2$

$f'(t) = -2\cos t \sin t + 2t = 2(t - \cos t \sin t)$

$\cancel{18t + 18\cos 2t + 9 = \pi^2}$

$\cos\frac{\pi}{3}$

$9 \quad 36\cos^2 x + 18\cos(2\cos x) - 9 = \pi^2$

$36t^2 + 18\cos 2t - 9 = \pi^2$

$36t^2 + 36\cos^2 t = \pi^2 = 27$

$\frac{1}{2}\sin 2x$

$t^2 + \cos^2 t = \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$(t - \cos t \sin t)' =$ $\quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos^2 t \quad \cos t$

$= 1 - \cos 2x \cdot \sin x$

$\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{36} \vee \frac{3}{4}$ $\quad \frac{\pi^2}{36} \vee \frac{3}{4} \vee 1$ $\quad \frac{\pi^2}{36} \vee \frac{1}{4}$ $\quad \pi^2 \vee 9$

$\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{36} \vee \frac{3}{4}$ $\quad \frac{8\pi^2}{36} \vee \frac{3}{4}$ $\quad \frac{\pi^2}{16} \vee \frac{\pi^2}{36} + \frac{3}{4}$

$\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{9} \vee 3 \mid \cdot 36$ $\quad \frac{2\pi^2}{9} \vee \frac{3}{4}$ $\quad \pi^2 \mid \cdot 36$

$5\pi^2 \vee 108$

Чистовик

(продолжение № 3)

$t = \cos x \in [-1; 1]$

$t^2 + \cos^2 t = \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$f(t) = \cos^2 t + t^2$

~~если $t > \frac{\pi}{4}$, то $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{16} > \frac{\pi^2}{36} + \frac{3}{4}$~~

~~если $t \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $f(t) \geq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} > \frac{\pi^2}{36} + \frac{3}{4}$~~

~~аналогично если $t < -\frac{\pi}{2}$, то $f(t) > \frac{\pi^2}{36} + \frac{3}{4}$.~~

значит, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

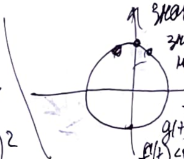
$f'(t) = -2\cos t \sin t + 2t = 2\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)$

$g(t) = t - \frac{1}{2}\sin 2t$

$g'(t) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \cos 2t \cdot 2 = 1 - \cos 2t \geq 0$ при $t \in [-1; 1]$

значит, $g(t) \uparrow\uparrow$

значит, у не более 1 корня



на $[0; 1]$ и $[-1; 0]$ — не более одного корня

$f(t) = \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$t = 0$ — корень $g(t)$, значит, $f'(t) < 0$ при $t < 0$, $f'(t) > 0$ при $t > 0$

значит, $t = \pm\frac{\pi}{6}$, откуда $\cos x = \pm\frac{\pi}{6}$

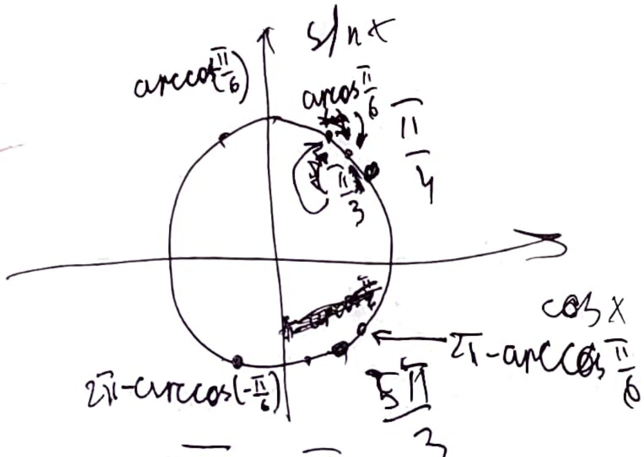
$x = \pm\arccos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

на $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{3}\right]$ корней нет.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6}$; 0.

Чистовик

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\arccos\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k\in Z \\ x = \pm\arccos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2\pi k, k\in Z \end{array}\right.$$



$\arccos\frac{\pi}{6} \vee \frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{6} \wedge \cancel{\cos} \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{2}\pi \wedge 6$

$<$

$\arccos\frac{\pi}{6} \vee \frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{6} \wedge \frac{1}{2}$

$\pi > 3$

сумма корней равна $2\pi \pm \arccos\frac{\pi}{6}$

Ответ: $2\pi \pm \arccos\frac{\pi}{6}$

$\left[x = \pm\arccos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) + 2\pi k, k\in Z \right.$