0 313644 470000

31-36-44-47
(162.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант А – 4

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы Горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Ченчика Михаила Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«7» апреля 2024 года

Подпись участника

70 (семьдесят) Исправлено по апелляции ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

~~60 (Шестьдесят)~~

черновик

$A_1 \quad v-2 \quad t \quad S \qquad S = vt - 2t$

$Б \quad 2 \quad \frac{S-900}{t+400} \quad t+400 \quad S-900 \qquad vt = S+2t$

при безв. $\quad v \quad 2t \quad S_1 \quad vt = S+2t$

$36 \sin(x+\sin x)\sin(x-\sin x) \quad t+9=\pi^2 \quad \frac{S-900}{t+400}+2 \quad t+400 \quad S_2$

$-2\sin\alpha \sin\beta =$

$=\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)= \quad (S-900)+2(t+400) = S+2t-100$

$(v_2-2)(t+400) = S-900$

$-18(\cos 2x - \cos(2\sin x))(\frac{t+9}{\pi^2}-2)\, t = S \quad v_1 t = S+2t$

$(v_2-2)(t+400) = S-900 \quad v_2 t =$

$f(x+3) - f(x) \le 6 \qquad \begin{cases} f(x+6)-f(x+3) \le 6 \\ f(x+3)-f(x) \le 6 \end{cases} \quad f(x+6)-f(x) \le 12$

$\begin{cases} f(x+2)-f(x) \ge 4 \\ f(x+4)-f(x+2) \ge 4 \\ f(x+6)-f(x+4) \ge 4 \end{cases} + \quad f(x+6)-f(x) \ge 12$

$\boxed{f(x+6)-f(x)=12}$

$2024 \equiv 6 \qquad f(x+6)=f(x)+12$

338

$f(-2) = 2^{-2} - 4 + 4 = 5$

$2024 - 6 \cdot 1 \quad +k \cdot 1$

$2024 - 6 \cdot 338 + 12 \cdot 338$

$2024 : 6 = 337$, -18, 22, -18, 46, -42, 4

$12 \cdot 338 = 3380 + 676 =$

$3380 + 676 = 4056$

$= 4056$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

1 ЧИСТОВИК №1

путь у A_1 ск V_1 время полёта t, а расстояние при встречной погоде S

тогда

$$(V_1-2)t=S$$

а у Б-2 ск V_2, время полёта $t+400$ (секунд) а расстояние при ~~[illegible]~~ ветр погоде $S-900$

$$(V_2-2)(t+400)=S-900$$

А при безв погоде ~~при~~ A_1 пролетит $V_1 t = S+2t$

Б-2 при безв погоде пролетит $V_2(t+400)=S-900+2(t+400)$

$$S_1 = V_1 t = S+2t$$

$$S_2 \quad V_2(t+400)=S+2t-100 \qquad S_1-S_2=100$$

т.е. ~~[illegible]~~ A_1 пролетит на 100 метров больше.

Ответ: A_1 на 100 метров больше.

№2

$f(x+3)-6 \le f(x) \Rightarrow f(x+3)-f(x) \le 6$ (1), $x \in Z$

тогда ~~на~~ $x := x+3$ $x+3$ тоже целое

$f(x+6)-f(x+3) \le 6$ (2)

сложим эти 2 неравенства

$f(x+6)-f(x) \le 12$ (*) $\forall\ x \in Z$

$f(x+2)-4 \ge f(x)$

$f(x+2)-f(x) \ge 4$ (3)

$x := x+2$ $\quad f(x+4)-f(x+2) \ge 4$ (4)

$x := x+4$ $\quad f(x+6)-f(x+4) \ge 4$ (5)

(3) + (4) + (5)

$f(x+6)-f(x) \ge 12$ (**) $\forall x \in Z$

см след лист

2 ~~[illegible]~~ получили, что $f(x+6)-f(x) \ge 12$ и $f(x+6)-f(x) \le 12$ из (*)

чистовик

из (0)

тогда получили для всех целых x

$f(x+6)-f(x)=12$ $\qquad 2024 = 6\cdot 338-2$

$f(x+6)=f(x)+12$

$f(2024) = f(2018)+12 = f(2012)+12\cdot 2 = \ldots = f(-2)+12\cdot 338$

$f(-2) = |3\cdot(-2)+4| - |3\cdot(-2)+2| + 7$

$f(-2) = 2-4+7=5$

$f(2024) = 5+12\cdot 338 = 4061$

Ответ: 4061

Смотреть дальше на стр номера ~~[illegible]~~ 3, 4, 5, 6

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

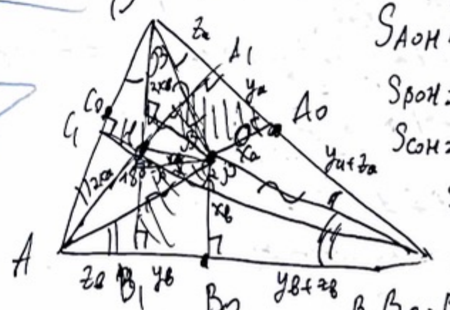
Черновик

$-18(\cos 2x - \cos(2\sin x)) + 9 = \pi^2$

$\cos 2x - \cos(2\sin x) = \frac{9-\pi^2}{18} = \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{18}$

$-2\sin^2 x + 2\sin^2(\sin x) = \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{18}$

$\sin^2 x - \sin^2(\sin x) = \frac{1}{4} - \frac{\pi^2}{36}$



$S_{AOH} \& S_{BOH}$

$S_{BOH} = 5$

$S_{COH} = ?$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ f'

$\sin^2 x - \frac{\pi^2}{36} = \sin^2(\sin x) - \frac{1}{4}$

$f(x) = \sin^2 x - x^2$

$B_1B_0 \cdot BH = 10$

$BH = 2\,OB_0$

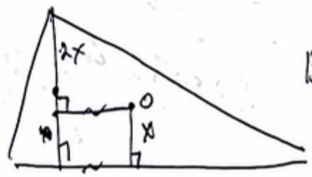
$B_1B_0 \cdot OB_0 = 5$

$A_1A_0 \cdot AH = 18$

$A_1A_0 \cdot 2OA_0 = 18$

$A_1A_0 \cdot OA_0 = 9$

$C_1C_0 \cdot OC_0 = ?$



$\cos 2x - \frac{1}{2} = \cos(2\sin x) - \left(\frac{\pi}{18}\right)^2$

$\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} = \sin^2\frac{\pi}{6}$

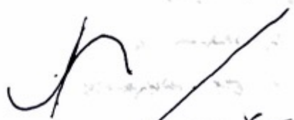
$\sin^2 x - \frac{\pi^2}{36} = \sin^2(\sin x) - \sin^2\frac{\pi}{6}$

$\cos 2x + \frac{\pi^2}{18} = \cos(2\sin x) + \frac{1}{2}$

$\sin^2 x + \sin^2\frac{\pi}{6} - \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 =$

$= \sin^2(\sin x) - \sin^2 x$

$f(x)$ $f(\sin x)$



функция чётная

$f(x) = \sin^2 x - x^2$

$f'(x) = \sin 2x - 2x$

$2x \geq \sin x$ $x = 0$

$x_1 = -x_2$

$f''(x) = 2\cos 2x - 2 \geq 0$

$\frac{\pi}{6}$ $\sin(x) = -\frac{\pi}{6}$

$x = \arcsin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\arcsin\frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$x = \pi - \arcsin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \pi + \arcsin\frac{\pi}{6}$

31-36-44-47
(162.1)

3 № 3 Чистовик

$36\sin(x+\sin x)\sin(x-\sin x) + 9 = \pi^2$

$-18(\cos 2x - \cos(2\sin x)) + 9 = \pi^2$

$\cos 2x - \cos(2\sin x) = \frac{9-\pi^2}{18}$

$1 - 2\sin^2 x - 1 + 2\sin^2(\sin x) = \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{18}$

$2\sin^2(\sin x) - 2\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{18}$ $|:2$

$\sin^2(\sin x) - \sin^2 x = \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \left(\frac{\pi}{6}\right)^2$

введём функцию $f(x) = \sin^2 x - x^2$

и изучим её $f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x - 2x =$

$= \sin 2x - 2x$

$f''(x) = 2\cos 2x - 2$ Заметим, что $2\cos 2x - 2$ всегда ~~больше~~ меньше либо равно нулю т.к. $\cos 2x \leq 1$ значит $f'(x)$ ~~возрастает~~ убывает, но в нуле $f'(x) = 0$ монотонно

$f'(0) = \sin(2 \cdot 0) - 0 = 0$, тогда $\xrightarrow{\;+\quad 0 \quad -\;} x$ $f'(x)$

тогда ~~корни~~ $f(x_1) = f(x_2)$ только если эти ~~точки~~ x_1 и x_2 равны, либо находятся ~~по~~ разные стороны от 0 и при это $f(x)$ - чётная т.к.

$f(-x) = \sin^2(-x) - (-x)^2 = \sin^2 x - x^2 = f(x)$, тогда

$f(x_1) = f(x_2)$ только тогда, когда $\left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{array}\right.$

других случаев нет, ~~т.к. если~~ ~~x_1~~ ~~$f(x_1) = f(x_2+x_0) = f(x_2)$ то он располагается по одну из сторон от нуля и тогда если же корень, то значение функции в этой точке равно значению в точке x_1 и равно значению~~

Т.к. если есть ещё случай и ~~без ограничения общности~~ если корень располагается по одну сторону от нуля с x_1, то он тождественно равен x_1, а если по другую сторону, то он тождественно равен $-x_1$, т.к. на промежутках $[-\infty; 0]$ и $[0; +\infty)$ функция монотонна и убывает или возр чистовик

И тогда получим $\sin x = \frac{\pi}{6}$ $f(\sin x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{\pi}{6} \\ \sin x = -\frac{\pi}{6} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} x = \arcsin\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \pi - \arcsin\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \arcsin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2\pi n = -\arcsin\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \pi + \arcsin\frac{\pi}{6} + 2\pi n \end{array}$$

$n \in \mathbb{Z}$

Заметим, что каждая серия может войти только 1 раз (т.к. период 2π, а промежуток меньше 2π)

$\sin x$ Заметим, что $\arcsin\frac{\pi}{6} > \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

т.к. $\frac{\pi}{6} > \frac{1}{2}$ $\pi > 3$

значит эта серия входит при $n=0$

$\frac{7\pi}{4} > \pi > \pi - \arcsin\frac{\pi}{6} > \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{6}$ значит этот корень входит

$\frac{\pi}{6} < \pi < \pi + \arcsin\frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{2} < \frac{7\pi}{4}$ и этот корень входит

а вот серия $-\arcsin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2\pi n$ не будет входить,

т.к. $-\arcsin\frac{\pi}{6} < -\arcsin\frac{1}{2}$

далее заметим, что $-\arcsin\frac{\pi}{6} > -\frac{\pi}{4}$, тогда точка $-\arcsin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2\pi n$ будет выше чем точка $\frac{7\pi}{4}$,

но равносильно тому что

$-\arcsin\frac{\pi}{6} > -\frac{\pi}{4}$ $\arcsin\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\pi}{6}$

т.к. $\frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{2}{3} = \frac{4}{6} > \frac{\pi}{6}$ т.к. $\pi < 4$

$\frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{2}{3}$ т.к. $3\sqrt{2} > 4$

$18 > 16$

значит серия $-\arcsin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2\pi n$ не входит, а все остальные входят по 1 разу

тогда сумма равна $\arcsin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \pi - \arcsin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \pi + \arcsin\frac{\pi}{6} =$
$= 2\pi + \arcsin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Ответ: $2\pi + \arcsin\frac{\pi}{6}$

черновик

$x^2 + px + q$ $A(x_A; 0)$ $B(x_B; 0)$ $x_A + x_B = -p$

$x_A x_B = q$

$AB^2 = (|x_A - x_B|)^2 = p^2 - 4q$ $C(0; y_C)$ $p^2 - 4q$

$x^2 + \sqrt{8104}\,x - 3 = 0$ $x_B > x_A$ $y_C = 0 + p \cdot 0 + q = q$

D — центр оп. окр. треуг. ABC $C(0; q)$ найти max AB

$D(x_D; y_D)$ $x_D^2 + y_D^2 = 2021$

$4 \cdot 2023$

$(x_D - x_A)^2 + y_D^2 = (x_D - x_B)^2 + y_D^2$ $x_D = 0$

$(x_D - x_A)^2 = (x_D - x_B)^2$ $x_D - x_A = x_B - x_D$

$x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = -\frac{p}{2}$

$p^2 + (q+1)^2 = 8084$ $x_A \neq x_B$

$p^2 - 4q$ $x_A = -x_B$ тогда $p = 0$

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 + (y_D - y_C)^2 = \left(\frac{p}{2} + x_A\right)^2 + y_D^2$

$\frac{p^2}{4} + y_D^2 - 2y_D y_C + y_C^2 = \frac{p^2}{4} + px_A + y_D^2 + x_A^2$

$\left\{\begin{array}{l} 2y_D y_C = y_C^2 - x_A^2 - px_A \\ 2y_D y_C = y_C^2 - x_B^2 - px_B \end{array}\right.$ $8104 + 12 = 8116 = 4 \cdot 2004 =$

и $4y_D q = 2q^2 - (x_A^2 + x_B^2) + 2(x_A + x_B)^2$ $4y_D y_C = 2y_C^2 - (x_A^2 + x_B^2) - p(x_A + x_B) = 16 \cdot 501 = 16 \cdot 3 \cdot 167$

$4y_D q = 2q^2 + x_A^2 + x_B^2 + 4x_A x_B$ $4y_D y_C = 2y_C^2 - p^2 + 2q + p^2$

$4y_D q = 2q^2 + 2q + p^2$ $4y_D y_C = 2y_C^2 + p^2 + 2q$ $\frac{2(x_A x_B)^2 + (x_A + x_B)^2 + 2x_A x_B}{4x_A x_B}$

$x_D = -\frac{p}{2}$

$y_D = \frac{2q^2 + p^2 + 2q}{4q}$ $y_D = \frac{2y_C^2 + p^2 + 2q}{4y_C} = \frac{2q^2 + p^2 + 2q}{4q} =$

$x_B\left(-\sqrt{9104} - x_B\right) = -3$ $D = 9104 + 12 = 9116$ $= \frac{q}{2} + \frac{1}{2} + \frac{p^2}{4q}$

$x_B^2 + \sqrt{9104}\,x_B - 3 = 0$ $y_C = q$

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q+1}{2} + \frac{p^2}{4q}\right)^2 = 2021$ $x_B = \frac{-\sqrt{9104} + D}{2}$ $p = \sqrt{9104}$

$2x_A =$ $x_A + x_B = -\sqrt{9104}$

$x_A x_B = -3$

$CD = BD$ $\frac{2(x_A x_B)^2 + 2x_A x_B + (x_A + x_B)^2}{4x_A x_B}$

$\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + (y_D - x_A x_B)^2 = \left(\frac{x_A + x_B}{2} - x_B\right)^2 + y_D^2$

$\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + (y_D - x_A x_B)^2 = \left(\frac{x_A + x_B}{2} - x_A\right)^2 + y_D^2$

$-4y_D x_A x_B + 2(x_A x_B)^2 = x_A^2 + x_B^2 - x_A(x_A + x_B) - x_B(x_A + x_B)$

5 x^2+px+q чистовик №5

пусть $A(x_A;0)$ $B(x_B;0)$

$C(0;q)$ коорд $y_C=q$ т.к.

по т Виета

$x_A+x_B=-p$

$x_A x_B=q$

$C(0;x_A x_B)$ если подставить 0 то будет q.

без ограничения общности можно считать, что $x_B>x_A$ и $q\neq 0$

т.к. тогда у кв ур-я значит установить O; x_A; x_B либо точки совпадают, но оба случая невозможны, также $x_A\neq 0$ $x_B\neq 0$, т.к. тогда точки A и B совп с C

пусть $D(x_D;y_D)$

$AD=BD \Rightarrow (x_D-x_A)^2+y_D^2=(x_D-x_B)^2+y_D^2$

$(x_D-x_A)^2=(x_D-x_B)^2$

$\left[\begin{array}{l} x_D-x_A=x_D-x_B \quad x_A=x_B \text{ но это невозможно} \\ x_D-x_A=x_B-x_D \quad x_D=\frac{x_A+x_B}{2} \end{array}\right.$

$CD=BD \Rightarrow x_D^2+(x_A x_B-y_D)^2=(x_D-x_B)^2+y_D^2$ подставим $x_D=\frac{x_A+x_B}{2}$

$\left(\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+(x_A x_B-y_D)^2=\left(\frac{x_A-x_B}{2}\right)^2+y_D^2$

$\frac{x_A^2+x_B^2}{4}+\frac{x_A x_B}{2}+(x_A x_B)^2-2x_A x_B y_D+y_D^2=\frac{x_A^2+x_B^2}{4}-\frac{x_A x_B}{2}+y_D^2$

$2x_A x_B y_D=(x_A x_B)^2+(x_A x_B)$

$y_D=\frac{x_A x_B+1}{2}$ $x_D=\frac{x_A+x_B}{2}$

при этом по условию $x_D^2+y_D^2=2021$

$\frac{(x_A+x_B)^2}{4}+\frac{(x_A x_B+1)^2}{4}=2021$ $|\cdot 4$

~~$x_A^2+2x_A x_B+x_B^2+x_A^2x_B^2+2x_A x_B+1=8084$~~

~~$x_A^2(x_B^2+1)+4x_A x_B-8084+(x_B^2)=0$~~

~~кв ур-е отн x_A~~

~~$D_1=4x_B^2+8084(x_B^2+1)-(x_B^2+1)^2=$~~

~~$=4x_B^2+8084x_B^2+8084-x_B^4-2x_B^2-1=-x_B^4+8086x_B^2+8083$~~

~~$x_A=\frac{-2x_B-\sqrt{-x_B^4+8086x_B^2+8083}}{x_B^2+1}$~~

6 ~~$x_A=\frac{-2x_B+\sqrt{-x_B^4+8086x_B^2+8083}}{x_B^2+1}$~~ чистовик

~~$AB=x_B-x_A=\frac{x_B(x_B^2+1)-2x_B+\sqrt{-x_B^4+8086x_B^2+8083}}{x_B^2+1}$~~

$p^2+\frac{(q+1)^2}{4}=2021$

$p^2+(q+1)^2=8084$ $(x_A-x_B)^2=p^2-4q$

нужно $\max p^2-4q$ пусть $\max p^2-4q=d$

тогда $p^2=4q+d$

подставим

$4q+d+q^2+2q+1=8084$

$q^2+6q+d-8083=0$

также q должно существовать, а значит $D\geq 0$

$D_1=9+8083-d\geq 0$ $d\leq 8092$

при $d=8092$ $q=-3$ тогда

$p^2=8092+4\cdot(-3)=8104$

также x_A и x_B будут существовать т.к.

$x^2\pm\sqrt{8104}x-3=0$ имеет корни, т.к. $D>0$

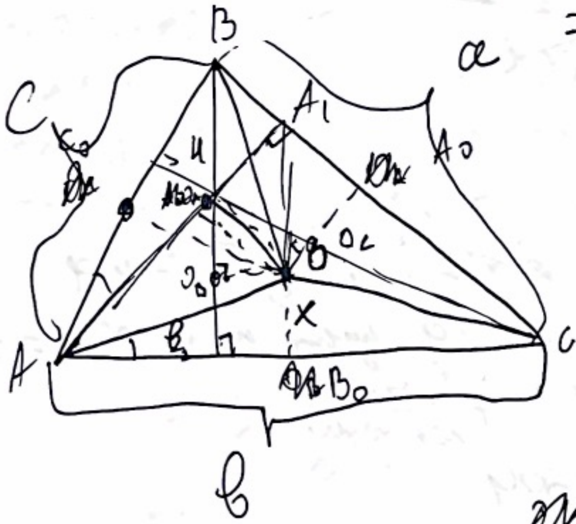
и значит всё выполняется, а $AB=\sqrt{d}$

$AB=\sqrt{8092}=2\sqrt{2023}$

Ответ: $2\sqrt{2023}$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!



$S_{AHO} = \frac{AH \cdot OO_A}{2} = \frac{AH \cdot A_1A_0}{2} =$

$= \frac{2OA_0 \cdot A_0A_1}{2} = OA_0 \cdot A_0A_1 =$

$= 2S_{OA_0A_1} = 9$

$v + \nabla \, ctg\, a = \nabla \geq k\, v$

$(2v+1)^x = v^2 + 2 \quad x \in Q$

без огр общн $2v+1 \geq 0$

$(2v+1)^x - v^2 = 2$

$x = \frac{m}{n} \quad 2v+1 = k^n \in Z$

$v = \frac{k^n - 1}{2}$

$k^m - \frac{(k^n-1)^2}{4} = 2 \mid \cdot 4$

$4k^m - (k^n-1)^2 = 8$

$2(k^m - 2) = (k^n-1)^2$

$k^m - 2$ и $k^n - 1$ имеют общ мн-?

$k^n - 1 \equiv_p 0$

$k^n \equiv_p 1$

$4(k^m - 3) = (k^n-1)^2 - 4 =$

$= (k^n - 3)(k^n + 1)$

$k^n \equiv_4 3$

$k^n \equiv_4 3$ и

Повысить оценку на 10 баллов
(старая оценка - 60 баллов,
новая оценка - 70 баллов)

Председателю апелляционной
комиссии олимпиады школьников "Покори Воробьевы горы!"
Ректору МГУ имени М. В.
Ломоносова академику
В. А. Садовничему
ученика 11 "А" класса
ГАОУ МО "Балашихинского
лицея" в городе Балашиха
Ченько Михаила Сергеевича

апелляция

Прошу пересмотреть выставленные технические баллы за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку считаю, что в соответствии с критериями должны быть выставлены другие баллы, так как в задачах под номерами: 1, 3, 5 были представлены верные обоснованные решения, а в задаче № 2 было представлено доказательство равносильности перехода к равенствам, но получен неверный ответ, за что должно быть выставлено 15 баллов, тогда в сумме должно получиться 75 баллов.

Дата: 21 апреля 2024 г.

Подпись: МЧ