0 886116 440004

88-61-16-44
(157.1)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Покори Воробьевы Горы"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Лемперта Алексея Игоревича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«07» апреля 2024 года

Подпись участника
АЛ

Шифр работы: 88-61-16-44 М

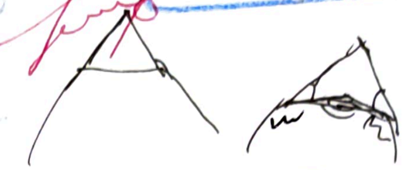
Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Σ прописью
Оценка	15	0	15	15	5	15			65	65 (шестьдесят пять)

88-61-16-44
(157.1)

Черновик

65 (шестьдесят пять)

1. 156 кр., 312 т. 390 р.



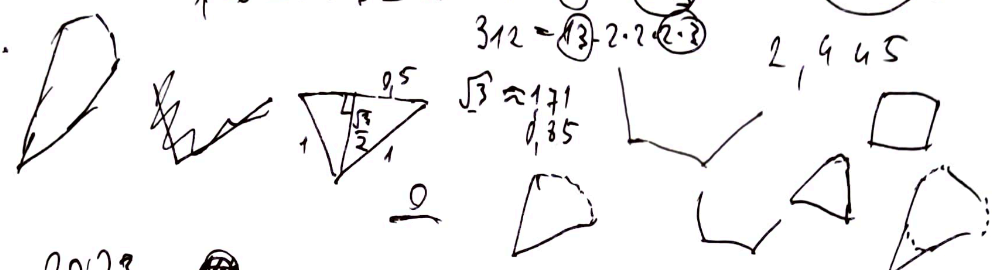
2.

$156 = 52\cdot 3 = 26\cdot 2\cdot 3 = 13\cdot 2\cdot 2\cdot 3$ $390 = 13\cdot 3\cdot 2\cdot 5$

$312 = 13\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3$

2, 4 4 5

3.



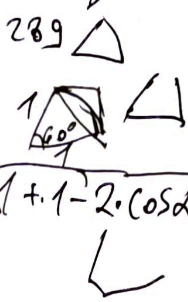
$\sqrt{3} \approx 1{,}71$

$0{,}85$

4. 2023

$2023 = 7\cdot 17^2$

$2023 \mid 7 = 289$



5. $f(x) = x^2 + px + q$

1) $f(2023) = 2025^{24} = 45^{48}$

2) $(2023)^2 + 2023p + q = 45^{48}$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$

$\sqrt{1+1-2\cdot\cos\alpha}$

$q = 45^{48} - 2023^2 - 2023p$

6.

$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ $x = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}$ $2x = \frac{4\sqrt{3}-4}{\sqrt{3}} = \frac{2(2\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}} =$

$2-(2-\sqrt{3})-(2-\sqrt{3}) = 2-2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3} = 2\sqrt{3}-2$

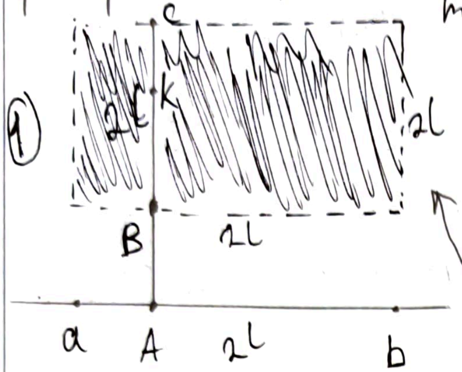
120°

$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3}-2)\left(\frac{6-2\sqrt{3}}{3}\right) =$

$= (\sqrt{3}-1)\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3-1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

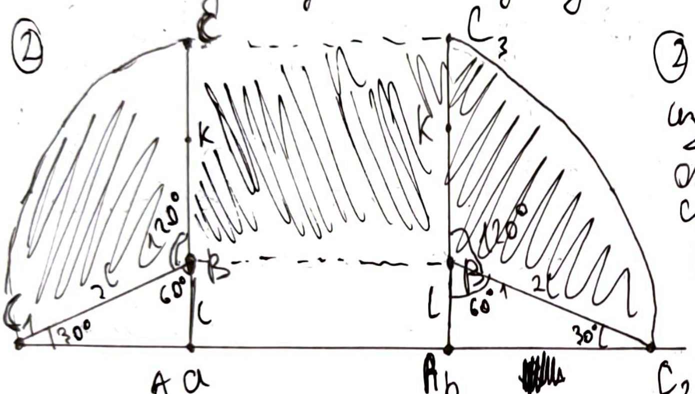
1/5

~~2~~. 6. Рассмотрим части стены, которые может раскрасить робот (так как K свободно двигается по BC, то будем считать, что там, где прошла BC, — закрашенная область)



① ~~Поставив~~ Поставив насадку ~~BC~~ BC параллельно AB, то есть так, чтобы точка C была максимально высоко, закрасим следующий прямоугольник

Его площадь — длина BC × длину ab: $2l \cdot 2l = 4l^2$



② Вращая насадку из крайних случаев описанного ранее способа размещения насадки (когда A совп. с a, B совпадает с b)

во внешнюю сторону относительно отрезка ab ~~получим~~ ~~2 части окружности~~ (в левую и правую полуплоскости, на которые делит плоскость AB), получим две части окружности. Рассмотрим левую, т.к. правая рассматривается аналогично. В прямоугольном $\triangle ABC$ ($\angle BAC = 90°$) $AB = l = \frac{1}{2}BC$ ($BC = 2l$) $\Rightarrow \angle BCA = 30°$ (по св-ву) $\Rightarrow \angle CBA = 90° - 30° = 60°$ (по т. о сумме углов в треуг.)

Отсюда $\angle CBC_1 = 180° - 60° = 120°$ (как смежный с $\angle CBA$) (C_1, C_3, C_2 см. на рисунке). Т.к. B — центр, то $\angle CBC_1$ — центральный, тогда мы имеем $\frac{120°}{360°} = \frac{1}{3}$ окружности. С правой стороны так же получим $\frac{1}{3}$ окр., итого $\frac{2}{3}$ окружн.

$S_{окр} = \pi r^2 = \pi \cdot (2l)^2 = 4l^2\pi \Rightarrow S_{\frac{2}{3} окр.} = 4l^2\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3} l^2\pi$

~~Таким образом, мы закрасим.~~

См. продолж.

88-61-16-44
(157.1)

2/5

~~Двигая AB~~ Двигая робота из положения ABC_1 в положение

(3) $A_1B_1C_3$ (A совп. с a, A_1 совп. с b) и двигая его из положения $A_1B_1C_2$ в положение ABC_4 (в обоих случаях дальнейшее увеличение невозможно) мы закрасим оставшиеся $\triangle ABC_1$ и $\triangle A_1B_1C_2$ (равные по катету и гипотенузе) площадью $2S_{ABC_1} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot \sin\angle C_1BA \cdot BC_1 AB = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2l\cdot l = \sqrt{3}l^2$

и прямоугольник ABB_1A_1 площадью $2l\cdot l = 2l^2$ без треугольника C_3DC_4 (D см. на рис.) (робот не может его закрасить никаким образом)

$\angle B_1C_3A = \angle BC_4A = 30°$ $\left(B_1A_1 = \frac{B_1C_3}{2} = \frac{BC_4}{2} = BA\right) \Rightarrow \angle C_3DC_4 = 180° - 30°\cdot 2 =$
$= 120°$ (по т. о сумме углов в треуг.). По т. синусов для $\triangle C_3DC_4$:

$$\frac{C_4D}{\sin\angle DC_3C_4} = \frac{C_3C_4}{\sin\angle C_3DC_4} \Rightarrow C_4D = \frac{C_3C_4\cdot \sin 30°}{\sin 120°} = \frac{(2\sqrt{3}-2)\cdot 1\cdot 2l}{\sqrt{3}\cdot 2} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}l$$

$(C_3C_4 = 2\sqrt{3}l - 2l = (2\sqrt{3}-2)l$, т.к. $C_3A_1 = AC_4 = \sqrt{3}l$ (по т. Пифагора))

Тогда $S_{C_3DC_4} = \frac{1}{2}\sin\angle DC_4C_3 \cdot C_4D\cdot C_3C_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}l\cdot\sqrt{3}l =$
$= \frac{\sqrt{3}-1}{2}l^2 \Rightarrow S_{\text{закр. вн. } ABB_1A_1} = 2l^2 - \frac{\sqrt{3}-1}{2}l^2 = \frac{5-\sqrt{3}}{2}l^2$

Таким образом, мы закрасим всю макс. приближенную и удалённую площадь от отрезка ab:

$$4l^2 + \frac{8}{3}l^2\pi + \sqrt{3}l^2 + \frac{5-\sqrt{3}}{2}l^2 = \left(\frac{13+\sqrt{3}}{2} + \frac{8}{3}\pi\right)l^2$$

Ответ: $\left(\frac{13+\sqrt{3}}{2} + \frac{8}{3}\pi\right)l^2$.

1. В каждом букете должно быть несколько хризантем, несколько тюльпанов и несколько роз. Значит, наибольший общий делитель (количеств цветов) и будет максимальным кол-вом букетов.

$156 = 3\cdot 2\cdot 2\cdot 13$
$312 = 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 13$
$390 = 3\cdot 2\cdot 5\cdot 13$

Заметим, что НОД $(156; 312; 390) = 13\cdot 3\cdot 2 = 78$

Тогда в каждом букете будет 2 хризантемы, 4 тюльпана и 5 роз.

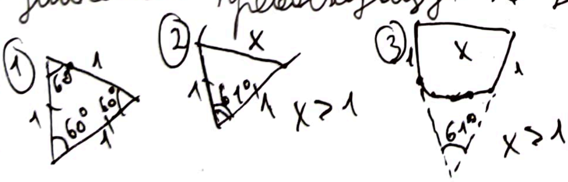
Ответ: 78 букетов.

См. продолж.

3/5

4. Если добыча золота и алмазов равномерно распределена по королевствам, то очевидно, что это возможно, т.к. $1012 > \frac{2023}{2}$. Возьмём противоположный крайний случай: в 1011 королевствах добывают только алмазы, а в остальных 1012 — только золото. Несмотря на то, что это недостижимо (по условию в каждом королевстве добывают оба вида ресурсов), мы можем взять 506 королевств с наибольшей добычей золота (в них производят не менее 50% всего золота) и 506 королевств с наибольшими производствами алмазов (в них не менее 50% всего производства алмазов), что и требовалось.
А если даже этот случай неравномерного распределения ~~[illegible] соответствует~~ имеет вариант необходимого выбора королевств, то другие (реальные) и подавно.
Ответ: да.

3. Ответ: ~~1~~ 2. Предположим, что это не так, и ~~[illegible] может быть больше 2~~ сторон длиной 1 может быть 3 или больше. Угол между прямыми, на которых лежат стороны длиной 1, ~~не менее 60~~ более 60°, в противном случае мы всегда можем соединить концы этих отрезков длиной 1 так, что получим диагональ превосходящую по длине 1!



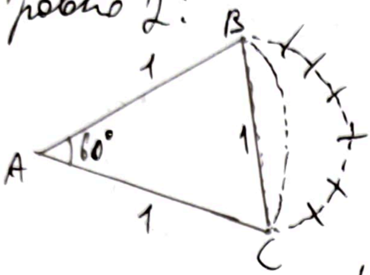
! А если стороны длиной 1 не соседние, то указанный угол должен быть < 60°

Но расположить таким образом 3 или более сторон многоугольника можно только тогда, когда это треугольник (как в примере (1)), иначе, исходя из вышедоказанного, как минимум 1 из 3 углов между 3 прямыми должен быть < 60°, тогда сумма углов треугольника, образованного этими 3 прямыми, равна $60° + 60° + x = 120° + x$, где $x < 60° \Rightarrow x + 120° < 180° \Rightarrow$ пришли к противоречию

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

88-61-16-44 (157.1)

Приведём пример, когда сторон длиной 1 у 2024-угольника ровно 2:



Диагональ $BC = 1$ ($\triangle ABC$ равностор.) $\boxed{\frac{4}{5}}$

Выбрали 3 вершины ~~точки~~ (A, B и C), остальные $2024 - 3 = 2021$ расположим ~~на окружности~~ на дуге окружности, для которой A — центр, B и C лежат на ней. Тогда диагонали, соединяющие B/C с одной из точек на окружности очевидно меньше 1 т.к. хорда BC больше любой хорды, стягивающей меньшую (часть окружности дугу). ~~Диагонали~~ Аналогично диагонали, связывающие ~~точки на~~ вершины на окружности дуге, меньше 1, А диагонали, связывающие A с точками на окр., равны 1 как радиусы.

5. $f(x) = x^2 + px + q$

2) Уравнение $f(x) = 0$ имеет целый корень $\Leftrightarrow x^2 + px + q = 0$ имеет целый корень $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \sqrt{p^2 - 4q} = k$, где $k \in \mathbb{Z}$!

Откуда $p^2 - 4q = k^2 \Rightarrow p^2 - k^2 = 4q \Rightarrow (p-k)(p+k) = 4q$

Если $k = 0$, то $p^2 = 4q \Rightarrow p^2 \vdots 4 \Rightarrow p \vdots 2,\ p \vdots q$

~~Если $k \neq 0$, то~~ Если $k \neq 0$, то $\longrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (p-k) \vdots 2 \\ (p+k) \vdots 2 \end{cases} \\ (p-k) \vdots 4 \\ (p+k) \vdots 4 \end{array}\right.$

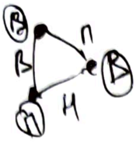
1) $f(2023) = 2025^{24} \Leftrightarrow 2023^2 + 2023p + q = 45^{48}$ $(2025 = 45^2)$

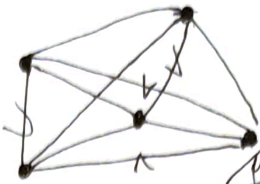
т.к. $2023^2 \not\vdots\, 2$ и $45^{48} \not\vdots\, 2$, то $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} p \vdots 2 \\ q \vdots 2 \end{cases} \\ \begin{cases} p \not\vdots\, 2 \\ q \not\vdots\, 2 \end{cases} \end{array}\right.$

См. продолж. →

черновик

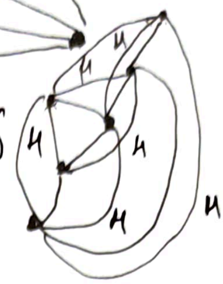
$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!}$





$\frac{n(n-1)}{2}$

$\frac{4\cdot 3}{2}=6$



$x^2+px+q=0$

$\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1\cdot x_2=q \end{cases}$

$q : x_2$

$\frac{q}{x_2}+x_2=-p$

$\cancel{\frac{q}{x_2}(x_2-p)(x_2)=q}$

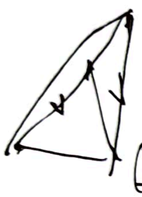
$x^2+2x+2=0$

$D=4+8=12$

$45^{43}=2023^2+2023p+q,\ q$

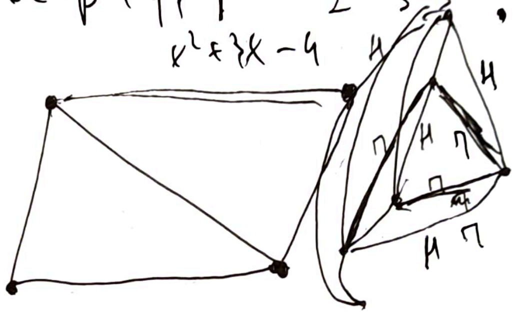
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\cdot 3$

x^2+3x-4



$\frac{(n-1)2}{2}$

$\frac{n(n-1)}{2}$



$\frac{n(n-1)}{2}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}<\frac{3\cdot 2}{2}=3$

$n-1<n-3$

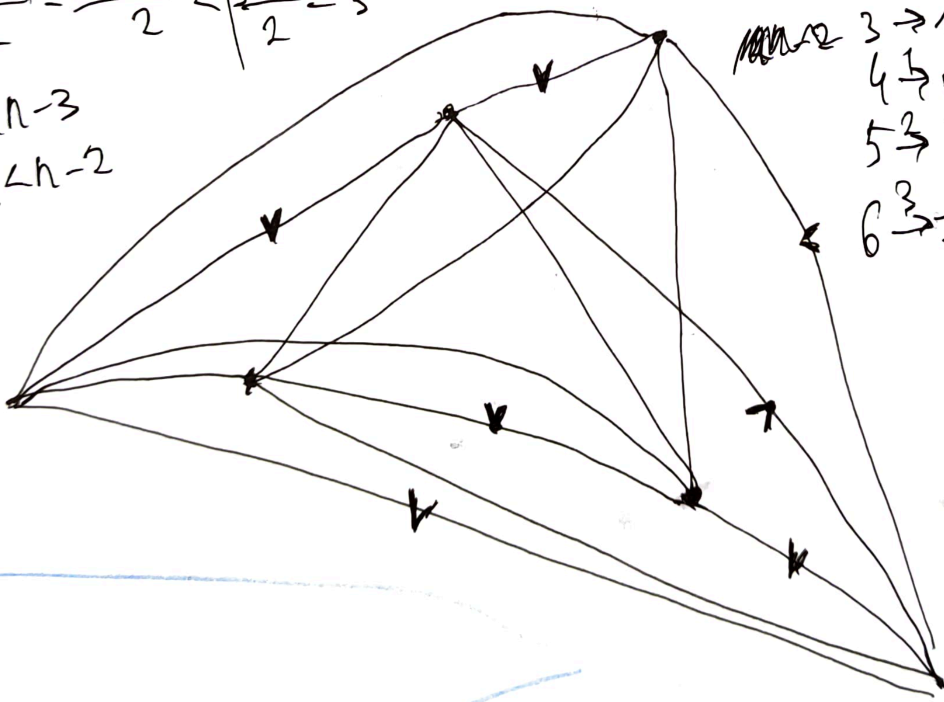
$n<n-2$

$3\to 1$

$4\xrightarrow{1}2$

$5\xrightarrow{3}4$

$6\xrightarrow{3}7$



$\frac{5}{5}$

2. Так каждый участник сыграл с каждым, то всего было проведено $\frac{n(n-1)}{2}$ партий, где n – количество участников.
~~Представим~~ Переформулируем задачу ~~как~~ в задачу, в которой необходимо найти полный граф с максимальным кол-вом вершин (участники = вершины, партии = рёбра), у которого рёбра будут раскрашены так, что в любом цикле из трёх вершин как минимум одно ребро будет раскрашено жёлтым (ничья), ~~и как ми~~ и как минимум ~~одной~~ одно – в зелёный пунктир (игра с победителем) (это может быть одно и тоже ~~приведём примеры, как вы~~ ребро). Рассмотрим, ~~как~~ как меняется минимальное кол-во раскрашенных рёбер при увеличении кол-ва ~~рёбер~~. вершин

3 — 1 4 — 2 5 — 4 6 — 7

+1 +2 +3

Заметим, что прирост мин. кол-ва закрашенных рёбер растёт в арифметической прогрессии, но кол-во партий растёт быстрее (соотв. прирост равен $n-3$):

$$\frac{n(n-1)}{2}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}<n-3 \Leftrightarrow \frac{(n-1)(n-n+2)}{2}<n-3 \Leftrightarrow n-1<n-3$$

(невозможно)

Значит, число участников макс. неограниченное.

конец

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!