98-04-56-36
(179.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10-1

Место проведения Екатеринбург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьевы горы!"
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Ятченко Кирилла Вячеславовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«7» апреля 2024 года

Подпись участника

98-04-56-36
(179.1)

чистовик

Ош

№1 $l = vt$ (l – путь, v – скорость, t – время)

v_α, v_β – скорости воздухоплавателей (м/с)

t_α, t_β – время нахождения в воздухе (с)

Тогда из условия:

$$\begin{cases} t_\beta - t_\alpha = 150\,с \\ (v_\alpha - 3\,м/с)\cdot t_\alpha - (v_\beta - 3\,м/с)\cdot t_\beta = 500\,м \end{cases} \Rightarrow v_\alpha t_\alpha - v_\beta t_\beta + 3\,м/с\cdot(\underbrace{t_\beta - t_\alpha}_{150\,с}) = 500\,м$$

$\Rightarrow v_\alpha t_\alpha - v_\beta t_\beta = 500\,м - 3\,м/с\cdot(t_\beta - t_\alpha) = 500\,м - 450\,м = 50\,м$, причем

$v_\alpha t_\alpha = l_\alpha$ и $v_\beta t_\beta = l_\beta$ – пройденные расстояния при безветренной погоде

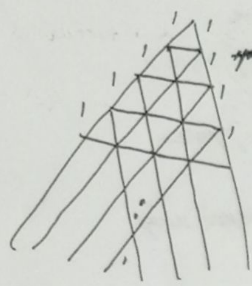
$\Rightarrow l_\alpha - l_\beta = 50\,м$

Ответ: Альфа пролетит на 50 м больше

чистовик

№2 Ответ: да, можно

Разобьем стороны треугольника на отрезки длины 1 (по 45шт.) и проведем через эти точки прямые, параллельные сторонам треугольника.



Такие прямые разобьют треугольник на правильные ~~правильные~~ треугольники со стороной 1 (часть этого разбиения приведена на картинке слева), которых будет $45^2=2025$ (сторона маленьких в 45 раз меньше большого $\Rightarrow$ площадь в $45^2=2025$ раз меньше $\Rightarrow$ маленьких треугольников 45^2)

Заметим, что данные 2025 треугольников ~~…~~ попарно не имеют общих внутренних точек $\Rightarrow$ любая красная точка находится строго внутри не более чем 1 треугольника, точек (красных) 2023 $\Rightarrow$ ~~в (≥ 2025−2023=2)~~ в $\geq 2=2025-\cancel{2013}\,2023$ треугольниках нет красных точек строго внутри, и эти треугольники попарно не имеют общих внутренних точек $\Rightarrow$ из них (из треугольников) можно выбрать 2, которые будут удовлетворять условию: у них нет общих внутренних точек и внутри них нет красных точек, и они правильные со стороной 1.

98-04-56-36
(179.1)

№3 Ответ: 4052

чистовик

Покажем по индукции, что для любого $k \in \mathbb{N}$ $f(x+2k) \geq f(x)+4k$ (для всех целых x)

База ($k=1$) верна: $f(x+2) \geq f(x)+4$

Переход: предположим, для некоторого k верно $f(x+2k) \geq f(x)+4k$. Покажем $f(x+2(k+1)) \geq f(x)+4(k+1)$

~~Тогда~~ $f(x+2+2k) \geq f(x+2)+4k \geq f(x)+4+4k$, т.е. $f(x+2(k+1)) \geq f(x)+4(k+1)$

Аналогично доказывается, что $\forall t \in \mathbb{N}$ $f(x+3t) \leq f(x)+6t$

$2024=2+2\cdot1011=2+3\cdot674$ $(2\cdot1011=3\cdot674=2022)$

$f(2024)=f(2+2\cdot1011) \geq f(2)+4\cdot1011=f(2)+2\cdot2022$

$f(2024)=f(2+3\cdot674) \leq f(2)+6\cdot674=f(2)+2\cdot2022$

$f(2)+2\cdot2022 \geq f(2024) \geq f(2)+2\cdot2022 \Rightarrow f(2024)=f(2)+2\cdot2022$

$f(x)=|2x-1|-|2x-3|+6$ при $x\in[0,2] \Rightarrow f(2)=|3|-|1|+6=3-1+6=8$

$\Rightarrow f(2024)=8+2\cdot2022=8+4044=4052$

чистовик

№5

$|2[tg\,a]-1|^x=[tg\,a]^2+2$

$m=[tg\,a]\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2m-1\not\vdots\,2\Rightarrow 2m-1\neq 0$

$|2m-1|^x=m^2+2$.

Предположим, у этого уравнения есть рациональный корень $x=\frac{b}{c}$ $(b,c\in\mathbb{Z},\ c>0)$

$|2m-1|^{\frac{b}{c}}=m^2+2$

$|2m-1|^b=(m^2+2)^c$

$|2m-1|=\pm(2m-1)\ \vdots\ 2m-1\Rightarrow |2m-1|\ \vdots\ 2m-1\Rightarrow |2m-1|^b\ \vdots\ (2m-1)^b\Rightarrow (m^2+2)^c\ \vdots\ (2m-1)^b$

$2m-2\underset{2m-1}{\equiv}-1\Rightarrow (2m-2)^2\underset{2m-1}{\equiv}1\Rightarrow 4(m-1)^2\underset{2m-1}{\equiv}1\Rightarrow (m-1)^2\underset{2m-1}{\equiv}\frac{1}{4}$ $((4,2m-1)=1$, т.к. $2m-1\not\vdots\,2)$

$(m-1)^2+2m-1\underset{2m-1}{\equiv}\frac{1}{4}$

$m^2\underset{2m-1}{\equiv}\frac{1}{4}$

$m^2+2\underset{2m-1}{\equiv}\frac{1}{4}+2\underset{2m-1}{\equiv}\frac{9}{4}$

$\cancel{(m^2+2)^c\underset{2m-1}{\equiv}\left(\frac{9}{4}\right)^c}$

Заметим, что ~~m=1 не является при~~ при $m=1$ у $|2m-1|^x=m^2+2$ корней нет $(|2m-1|=1$, $m^2+2=3$, т.е. $1^x=3\}$, корней нет, т.к. $1^x=1)$

Докажем $m^2+2>2m-1$ и $m^2+2\geq 1-2m$

$m^2+2>2m-1$

$m^2-2m+3>0$

$(m-1)^2+2>0$

$m^2+2\geq 1-2m$

$m^2+2m+1\geq 0$

$(m+1)^2\geq 0$, причем $m^2+2=1-2m\Leftrightarrow m=-1$

Значит, кроме случая $m=-1$ (в нем решение есть: $x=1\Rightarrow |2(-1)-1|=3$ и $(-1)^2+2=3)$ имеем

$m^2+2>2m-1$, $m^2+2>1-2m\Rightarrow m^2+2>|2m-1|=\left[\begin{array}{l}2m-1\\1-2m\end{array}\right.$ (здесь и далее $m\neq-1$)

$m^2+2>|2m-1|$, $(m^2+2)^c=(2m-1)^b\Rightarrow b>c$

$(m^2+2)^c\ \vdots\ (2m-1)^b\ \vdots\ (2m-1)^c\Rightarrow m^2+2\ \vdots\ 2m-1\Rightarrow m^2+2\underset{2m-1}{\equiv}0\Rightarrow\frac{9}{4}\underset{2m-1}{\equiv}0$

$\Rightarrow 9\underset{2m-1}{\equiv}0\Rightarrow 9\ \vdots\ 2m-1\Rightarrow 2m-1\in\{-9;-3;-1;1;3;9\}\Rightarrow m\in\{-4;-1;0;1;2;5\}$

Рассмотрим все эти случаи:

$m=-4$: $|2(-4)-1|^x=(-4)^2+2\Rightarrow 9^x=18\Rightarrow 9^{x-1}=2\Rightarrow x=1+\log_9 2\notin Q$ $(\log_9 2\notin Q)$, рац. корней нет

$m=-1$: $|2(-1)-1|^x=(-1)^2+2\Rightarrow 3^x=3\Rightarrow \underline{x=1\in Q}$

$m=0$: $|2\cdot 0-1|^x=0^2+2\Rightarrow 1^x=2$, корней нет $(1^x=1)$

$m=1$: $|2\cdot 1-1|^x=1^2+2\Rightarrow 1^x=3$, корней нет $(1^x=1)$

$m=2$: $|2\cdot 2-1|^x=2^2+2\Rightarrow 3^x=6\Rightarrow x=\log_3 6=1+\log_3 2\notin Q$ $(\log_3 2\notin Q)$, рац. корней нет

$m=5$: $|2\cdot 5-1|^x=5^2+2\Rightarrow 9^x=27\Rightarrow \underline{x=\frac{3}{2}\in Q}$

$\log_3 2\notin Q$, т.к. если $\frac{d}{f}=\log_3 2$ $(d\in\mathbb{Z},\ f\in\mathbb{N})\Rightarrow 3^{\frac{d}{f}}=2\Rightarrow 3^d=2^f$, но $f\in\mathbb{N}\Rightarrow 2^f\ \vdots\ 2\Rightarrow 3^d\ \vdots\ 2$, но $\forall d\in\mathbb{Z}$ $3^d\not\vdots\,2$, противоречие. Аналогично доказывается, что $\log_9 2\notin Q$

98-04-56-36
(179.1)

чистовик

Значит, уравнение имеет решение только при $m=-1$ или $m=5$

$m=[tg\,a]$

1) $m=-1$

$-1=[tg\,a]$

$\Updownarrow$

$-1\leq tg\,a<0$

$\Updownarrow$

$-\frac{\pi}{4}+\pi n\leq a<\pi n$ для некоторого $n\in\mathbb{Z}$

$\Updownarrow$

$a\in\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}[\pi n-\frac{\pi}{4};\pi n)$,

для любого $a\in\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}[\pi n-\frac{\pi}{4};\pi n)$

будет верно $[tg\,a]=-1$

2) $m=5\Leftrightarrow$

$5=[tg\,a]\Leftrightarrow$

$5\leq tg\,a<6\Leftrightarrow$

$\pi n+arctg\,5\leq a<\pi n+arctg\,6$ для некоторого $n\in\mathbb{Z}$

$\Updownarrow$

$a\in\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}[\pi n+arctg\,5;\pi n+arctg\,6)$,

для любого $a\in\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}[\pi n+arctg\,5;\pi n+arctg\,6)$

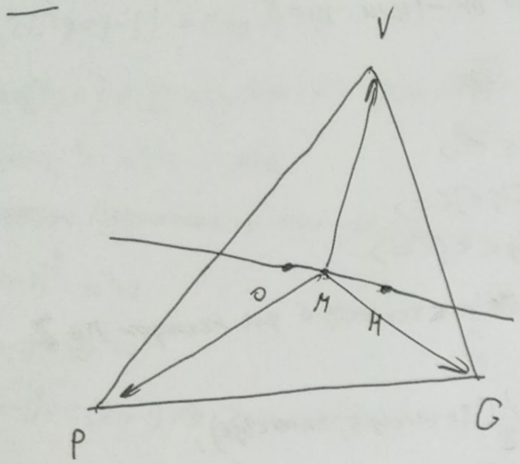
будет верно $[tg\,a]=5$

Значит, искомое множество значений – $\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}[\pi n-\frac{\pi}{4};\pi n)\right)\cup\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}[\pi n+arctg\,5;\pi n+arctg\,6)\right)$

Ответ: $\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}[\pi n-\frac{\pi}{4};\pi n)\right)\cup\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}[\pi n+arctg\,5;\pi n+arctg\,6)\right)$

чистовик

№4



Заметим, что центр масс M треугольника PVG лежит на прямой Эйлера (OH) для $\triangle PVG$.

Из определения центра масс $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MV}+\overrightarrow{MG}=\vec{0}$

Рассмотрим проекции $\vec{p_1}, \vec{V_1}, \vec{g_1}$ векторов $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MV}, \overrightarrow{MG}$ на ось, перпендикулярную OH: тогда проекция $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MV}+\overrightarrow{MG}$ равна $\vec{p_1}+\vec{V_1}+\vec{g_1}$ $\Rightarrow$ проекция $\vec{0}$ равна $\vec{p_1}+\vec{V_1}+\vec{g_1}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{p_1}+\vec{v_1}+\vec{g_1}=\vec{0}$

$S_{OHP}=5$, $S_{OHV}=3$

Понятно, что $S_{OHP}=\frac{1}{2}OH\cdot|\vec{p_1}|$, $S_{OHV}=\frac{1}{2}OH\cdot|\vec{v_1}|$ и $S_{OHG}=\frac{1}{2}OH\cdot|\vec{g_1}|$ ($|\vec{p_1}|, |\vec{v_1}|, |\vec{g_1}|$ – длины векторов)

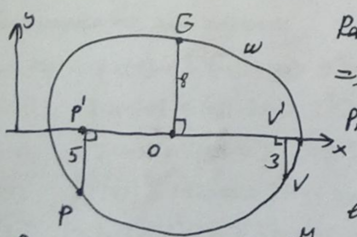
$\vec{p_1}+\vec{V_1}+\vec{g_1}=\vec{0}$, $\vec{p_1}\parallel\vec{v_1}\parallel\vec{g_1}\perp OH \Rightarrow \pm|\vec{p_1}|\pm|\vec{V_1}|\pm|\vec{g_1}|=0$, причем у вершин, расположенных с одной стороны относ. OH, в этой сумме знак одинаковый, с разных сторон – разный

$\pm|\vec{p_1}|\pm|\vec{V_1}|\pm|\vec{g_1}|=0 \Rightarrow \pm S_{OHP}\pm S_{OHV}\pm S_{OHG}=0$ с тем же условием про расположение P, V, G относ. OH

$S_{OHG}=\pm S_{OHP}\pm S_{OHV} \Rightarrow S_{OHG}\in\{8; 2; -2; -8\}$, но $S_{OHG}\geq 0 \Rightarrow S_{OHG}\in\{8; 2\}$, причем $S_{OHG}=8$, если P, V по одну сторону относ. OH, и $S_{OHG}=2$, если P, V по разные стороны относ. OH

Давайте покажем, что оба ответа возможны. Заметим, что для этого достаточно привести примеры треугольников, у которых $S_{OHP}:S_{OHV}:S_{OHG}=5:3:8$ и $S_{OHP}:S_{OHV}:S_{OHG}=5:3:2$, т. к. такие треугольники можно гомотетией (с коэффициентом $\sqrt{\frac{5}{S_{OHP}}}$) перевести в треугольники, в которых $S_{OHP}=5$, $S_{OHV}=3$, $S_{OHG}=8$ или $S_{OHG}=2$ (коэф. $=\sqrt{\frac{5}{S_{OHP}}}$ $\Rightarrow$ площади изменятся в $\left(\sqrt{\frac{5}{S_{OHP}}}\right)^2=\frac{5}{S_{OHP}}$ раз). ~~Когда знак.~~

1) $S_{OHG}=8$



Рассмотрим окружность ω $(R=8)$ и ее диаметр. $8>5, 8>3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ На ω можно отметить P, V, G так, что расстояния от P, V, G до диаметра были равны $5, 3, 8$, и P, V лежали по обратную сторону от G относ. диаметра, и $GO=8=R \Rightarrow GO\perp$ диаметр

Введем систему координат с осями: диаметр (ось x) и перпендикулярная ему прямая (ось y)

Рассмотрим центр масс M системы: $P(1), V(1), G(1)$. Имеем $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{VM}+\overrightarrow{GM}=\vec{0}$

$\Rightarrow \underbrace{\overrightarrow{PP'}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{VV'}}_{\vec{0}\ (5+3-8=0)}+\overrightarrow{P'M}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{V'M}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{P'M}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{V'M}=0 \Rightarrow M$ – центр масс системы $P'(1), O(1), V'(1)$

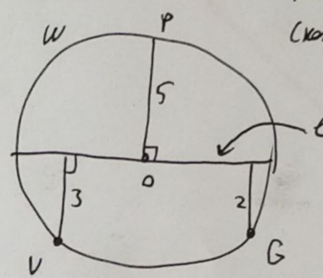
чистовик

Но $P', O, V' \in$ диаметру (назовем l) $\Rightarrow M\in l \Rightarrow l = OM$ – прямая Эйлера для $\triangle PVG \Rightarrow H$ (ортоцентр $\triangle PVG$) $\in l \Rightarrow$ в треугольниках OHP, OHV, OHG высоты (перпендикулярные OH) равны $PP'=5$, $GO=8$, $V'V=3 \Rightarrow S_{OHP}:S_{OHV}:S_{OHG}=5:3:8$

($OH = l$)

(т.к. $S_{OHP}=\left(\frac{1}{2}OH\right)\cdot PP'$ и еще две аналогичные формулы)

2) $S_{OHG}=2$



Рассмотрим окружность ω с центром O и $R=5$ и диаметр ее (который назовем l)

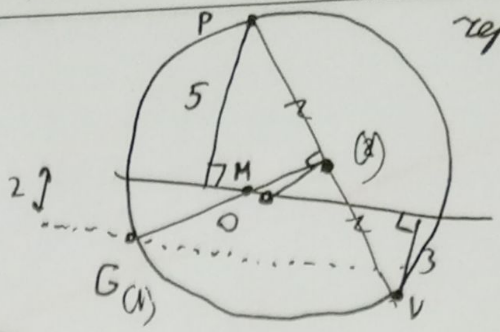
$5>3$, $5>2 \Rightarrow$ на ω можно отметить P, V, G так, что расстояния от P, V, G до l были равны $5, 3, 2$, и V, G были по обратную сторону от P относительно l

Тогда по рассуждениям с векторами и их проекциями на прямую $a\perp l$, аналогичным таковым в п. 1, (и потому, что $2+3=5$), можно получить, что центр масс M для $\triangle PVG$ лежит на $l \Rightarrow l$ – прямая Эйлера $\Rightarrow H$ (ортоцентр PVG) $\in l \Rightarrow$ по рассуждениям, аналогичным п. 1, получим $S_{OHP}:S_{OHV}:S_{OHG}=5:3:2$

Значит, $S_{OHG}=8$ или $S_{OHG}=2$, причем выше показано, что оба случая возможны

Ответ: 2 или 8

черновик



$l = vt$

V_1

$t_2 - t_1 = 150c$ $t_2 = t_1 + 150c$

$l_1 - l_2 = 500м$

~~$v_1 t_1 - v_2 t_2 = 500м$~~

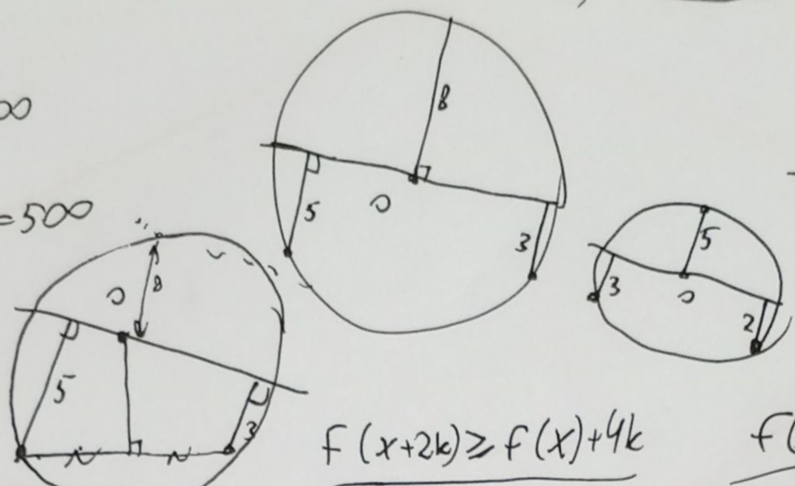
$(v_1 - 3)t_1 - (v_2 - 3)t_2 = 500$

$v_1 t_1 - v_2 t_2 + 3\underbrace{(t_2 - t_1)}_{150} = 500$

450

$v_1 t_1 - v_2 t_2 = 50м$

№1: α; $+50м$



2022 | 3
−18 | 674
22
−21
12

$f(x+2k) \geq f(x) + 4k$ $f(x+3t) \leq f(x) + 6t$

$f(x-2) + 4 \leq f(x) \leq f(x-3) + 6$

$45^2 = 2025$

$2025 - 2023 = 2$ (V) №2

$f(2024) \geq f(2) + 4 \cdot 1011$ ($= 2 \cdot 2022$)

$f(x) = |2x-1| - |2x-3| + 6 \quad x \in [0;2]$

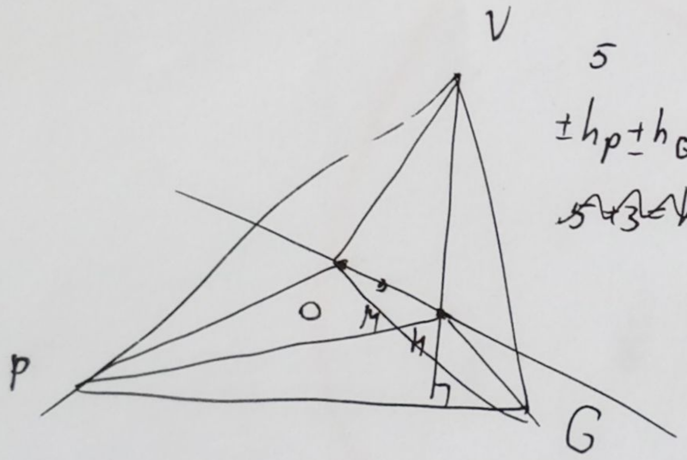
$f(2024) \leq f(2) + 3 \cdot 674$ ($= 2 \cdot 2022$)

$2024 = 2 + 3 \cdot 674$

$f(2) = |3| - |1| + 6 = 8$

$f(2024) = f(2) + 2 \cdot 2022 = 8 + 2 \cdot 2022 =$

$= 8 + 4044 = \boxed{4052}$ №3



5   3

$\pm h_P \pm h_G \pm h_V = 0$

~~$5 + 3 = h_G$~~ $\begin{cases} S_G = 8 \\ S_G = 2 \end{cases}$

$(m^2+2)^c \underset{2m-1}{\equiv} \left(\frac{9}{4}\right)^c \equiv 0$

$9^c \equiv 2m-1$

$|2[tg\,a] - 1|^x = [tg\,a]^2 + 2$

$m = [tg\,a] \in \mathbb{Z}$

$|2m-1|^x = m^2 + 2$

$x = \log_{2m-1}(m^2+2) \in \mathbb{Q}$

$m^2+2 = (m+1)^2 - (2m-1)$
$= (m+1)^2 + (2m-1)$

$x = \frac{b}{c}$

$m \geq \frac{1}{2}$ $(m \geq 1)(2m \geq 1)$

$m < \frac{1}{2}$ $(m \leq 0)$ $(1-2m \geq 1)$

$\to (2m-1)^x = m^2+2 \geq 2$

$(1-2m)^x = m^2+2$ $x = \frac{b}{c}$ $(1-2m)^b = (m^2+2)^c$

$(2m-1)^{\frac{b}{c}} = m^2+2$ $b, c > 0$; $b > c$

$(2m-2)^2 \underset{2m-1}{\equiv} 1$

$(m^2+2)^c \underset{2m-1}{\equiv} \frac{1}{4^c} \neq 0 \Rightarrow (m^2+2)^c \not\vdots\, 2m-1 \Rightarrow b = 0$

$(2m-1)^b = (m^2+2)^c$

$(m-1)^2 \underset{2m-1}{\equiv} \frac{1}{4} \Rightarrow m^2+2 \underset{2m-1}{\equiv} \frac{1}{4} \Rightarrow$ ~~$m^2+2 \vdots 2m-1$~~ ~~$(m^2+2)^c \vdots$~~

$(2m-1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 \overset{?}{>} m^2 + 2$

$(2m-1)^1 \overset{?}{<} m^2+2$

$3m^2 + 4m - 1 > 0$ (V)

$0 < (m-1)^2$

$x < 2$

$x = 1 \Rightarrow m = 1$ $m = 1$ $[tg\,a] = 1$

$x > 1$

$2 > x > 1$

$1 \leq tg\,a < 2$

$\frac{\pi}{4} \leq a < arctg\,2$ $(+\pi n)$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!