0 064712 720007

06-47-12-72
(162.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант А - 4

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы Горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Бурова Григория Сергеевига
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«7» апреля 2024 года

Подпись участника
вБг

06-47-12-72
(162.1)

ЛИСТ УЧАСТНИКА

олимпиады школьников "ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!"

2023/2024 учебного года

Математика

10070192684

БУРОВ
ГРИГОРИЙ
СЕРГЕЕВИЧ

14 апреля 2006 г.
дата рождения

0 100701 926842

11 класс

Время и место проведения
заключительного этапа олимпиады:

Москва

Вс 07 Апр 2024 11:00
Москва
Ломоносовский проспект, д. 27, корп. 1

ФИО полностью, подпись участника

06-47-12-72
(162.1)

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2023/2024 учебного года

Вариант А-4

1. На испытаниях беспилотных летательных аппаратов лучшими оказались две модели. При встречном ветре 2 м/с модель А-1 продержалась в воздухе на 400 секунд меньше модели Б-2, но пролетела на 900 метров дальше. Какая из моделей пролетит большее расстояние при безветренной погоде и на сколько? Скорость каждой из моделей считать постоянной. Время нахождения модели в воздухе определяется только ее техническими параметрами и не зависит от погодных условий.

2. Найдите $f(2024)$, если $f(x) = |3x+4| - |3x+2| + 7$ при $x \in [-2; 0]$ и, кроме того, при всех целых значениях x выполняются неравенства

$$f(x+3) - 6 \le f(x) \quad \text{и} \quad f(x+2) - 4 \ge f(x).$$

3. Решите уравнение

$$36 \sin(x + \sin x) \sin(x - \sin x) + 9 = \pi^2$$

и найдите сумму его корней, принадлежащих отрезку $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

4. В остроугольном треугольнике ABC обозначили точку пересечения высот через H, центр описанной окружности через O. Площади треугольников AOH и BOH равны 9 и 5 соответственно. Найдите площадь треугольника COH.

5. Кривая, заданная уравнением $y = x^2 + px + q$, пересекает ось Ox прямоугольной декартовой системы координат в точках A и B, а ось Oy – в точке C (все три точки различны). Известно, что точка D равноудалена от точек A, B и C, а сумма квадратов ее координат равна 2021. Найдите максимально возможную при данных условиях длину отрезка AB.

6. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|2[\operatorname{ctg} a] + 1|^x = [\operatorname{ctg} a]^2 + 2$$

имеет рациональное решение x. Здесь, $[t]$ – целая часть числа t.

Апрель 2024 г.

Выполнять задания на титульном листе запрещается!

06-47-12-72
(162.1)

Черновик. 70 (Семидесят)

$(x-2)(t+400) = yt + 900$

$x \quad y$

А1 Б2

$(x-2)(t-400) = (y-2)t + 900$

$(x-2)(t-400) = yt + 900$

$xt - 2t + 400x + 800 = yt - 2t + 900$

$xt - 400\cancel{x} + 2t + 800 = yt + 900$

$xt - yt = 400x + 900$

$(x-2)t = y(t+400) + 900$

$\frac{1}{2}($

$xt - 2t = yt + 1100y + 900$

$xt = (y+2)(t+$

$\sin\alpha \cdot \sin\beta$

$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)$

$36\,(\sin(x+\sin x)\ \sin(x-\sin x) + 9 = \pi^2$

$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$

$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta -$

$-\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$36\sin x\cos(\sin x) + 9 = \pi^2$

$36\,t\cos t + 9 = \pi^2$

$t\cos t = \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{1}{4}$

$t\cos t = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\right)$

$\frac{\pi}{2}$ π $-\pi$

$t\cos t$

$36\ \sin(x+\sin x)\ \sin(x-\sin x) =$

$\cos(2x) - \cos(2\sin x)$

$\cancel{\cos t2 - \cos 2\sin t}$

$1 - 2\sin^2 x + 1 + 2\sin^2(\sin x)$

$\sin^2 t - t^2$

$2\sin t\cos t - 2t$

$\sin 2t - 2t$

$f'(x) =$

$t/2 = 2\sin^2(\sin x) - 2\sin^2 x$

$t = \sin^2 x$

Чистовик. №1.

Пусть x м/с – скорость A_1

y м/с – скорость $Б_2$

t – время полёта A_1.

Тогда верно, что

$(x-2)t = (y-2)(t+400) + 900$

$xt - 2t = yt + 400y - 2t - 800 + 900$

$xt = y(t+400) + 100$

То есть A_1 пролетит на 100 метров больше при безветренной погоде.

Ответ: A_1 на 100 м.

№2.

$f(2024)$ – ?

$f(x) = |3x+4| - |3x+2| + 7$ при $x \in [-2; 0]$

$x \in \mathbb{Z}$: $\begin{cases} f(x+3) - 6 \le f(x) \\ f(x+2) - 4 \ge f(x) \end{cases}$

$f(-2) = |-6+4| - |-6+2| + 7 = \cancel{13}\ 5$

$f(-1) = |-3+4| - |-3+2| + 7 = \cancel{9}\ 7$

$f(0) = 4 - 2 + 7 = 9$

Запишем две системы.

06-47-12-72
(162.1)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик. №2

$\begin{cases} f(-2+3) - 6 \le f(-2) \\ f(-2+2) - 4 \ge f(-2) \end{cases}$ и $\begin{cases} f(-1+3) - 6 \le f(-1) \\ f(-1+2) - 4 \ge f(-1) \end{cases}$ получим

$\begin{cases} f(1) \le 11 \\ f(0) \ge 9 \end{cases}$ и $\begin{cases} f(2) \le 13 \\ f(1) \ge 11 \end{cases}$ из двух систем

получим, что $f(1) = 11$

Тогда докажем по индукции, что $f(x) = 2x + 9$, $x \in \mathbb{Z}$

База: $f(-2) = 5$, $f(-1) = 7$, $f(0) = 9$, $f(1) = 11$ (+)

Тогда докажем, что если $f(k) = 2k+9$, $f(k+1) = 2k+11$, $f(k+2) = 2k+13$, то $f(k+3) = 2k+15$: Шаг.

$\begin{cases} f(k+3) - 6 \le f(k) \\ f(k+2) - 4 \ge f(k) \end{cases}$ и $\begin{cases} f(k+4) - 6 \le f(k+1) \\ f(k+3) - 4 \ge f(k+1) \end{cases}$ отсюда

$\begin{cases} f(k+3) \le 2k+9+6 \\ f(k+2) \ge 2k+9+4 \end{cases}$ и $\begin{cases} f(k+4) \le f(k+1) - 6 \\ f(k+3) \ge 2k+11+4 \end{cases}$

Получаем $f(k+3) \le 2k+15$ и $f(k+3) \ge 2k+15$ значит $f(k+3) = 2k+15$. Шаг доказан.

Значит по ММИ $f(k) = 2k+9$, $k \in \mathbb{Z}$

Тогда $f(2024) = 2 \cdot 2024 + 9 = 4048 + 9 = 4057$

Ответ: 4057.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик. №3.

$36\sin(x+\sin x)\sin(x-\sin x)+9=\pi^2$

т.к. $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$ то ур-е равносильно

$\cancel{72}(-\cos(2x)+\cos(2\sin x))+9=\pi^2$

$-1+2\sin^2 x+1-2\sin^2(\sin x)=\frac{\pi^2-9}{72}$

$+\sin^2 x-\cancel{2}\sin^2(\sin x)=\frac{\pi^2-9}{36}$

$t=\sin x$, $t\in[-1;1]$

$\cancel{t}\sin^2 t+t^2=\left(\frac{\pi}{6}\right)^2-\frac{1}{4}$

$f(t)=-\sin^2 t+t^2$

$f'(t)=-2\sin t\cos t+2t=\cancel{2}\sin 2t+2t$

$-\sin a+a$ – монотонно ~~убывающая~~ возрастающая ф-ция ⊛

т.е. $\xrightarrow{0}$ $f(t)$ возр $[0;+\infty)$

$f(t)$ убыв. $(-\infty;0]$.

$\frac{\pi^2-9}{36}$ – const значит ур-е

$-\sin^2 t+t^2=\left(\frac{\pi}{6}\right)^2-\frac{1}{4}$ имеет не более 2х корней

Заметим, что $t=\pm\frac{\pi}{6}$ и есть те два корня;

$\sin^2\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}$ $t^2=\left(\frac{\pi}{6}\right)^2$

Возврат $t=\pm\frac{\pi}{6}$ $\left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{\pi}{6}\\ \sin x=-\frac{\pi}{6}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\arcsin\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\arcsin-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

06-47-12-72 (162.1)

Сумма корней на $[\frac{\pi}{6};\frac{7\pi}{4}]$ равна: Чистовик

$\frac{\pi}{6}\approx\frac{3{,}14}{6}>\frac{1}{2}$

т.к. $\arcsin x$ возр $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ $\arcsin\frac{\pi}{6}>\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$

$\arcsin-\frac{\pi}{6}<\arcsin-\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{6}$

$\arcsin-\frac{\pi}{6}>\arcsin-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\pi}{4}$

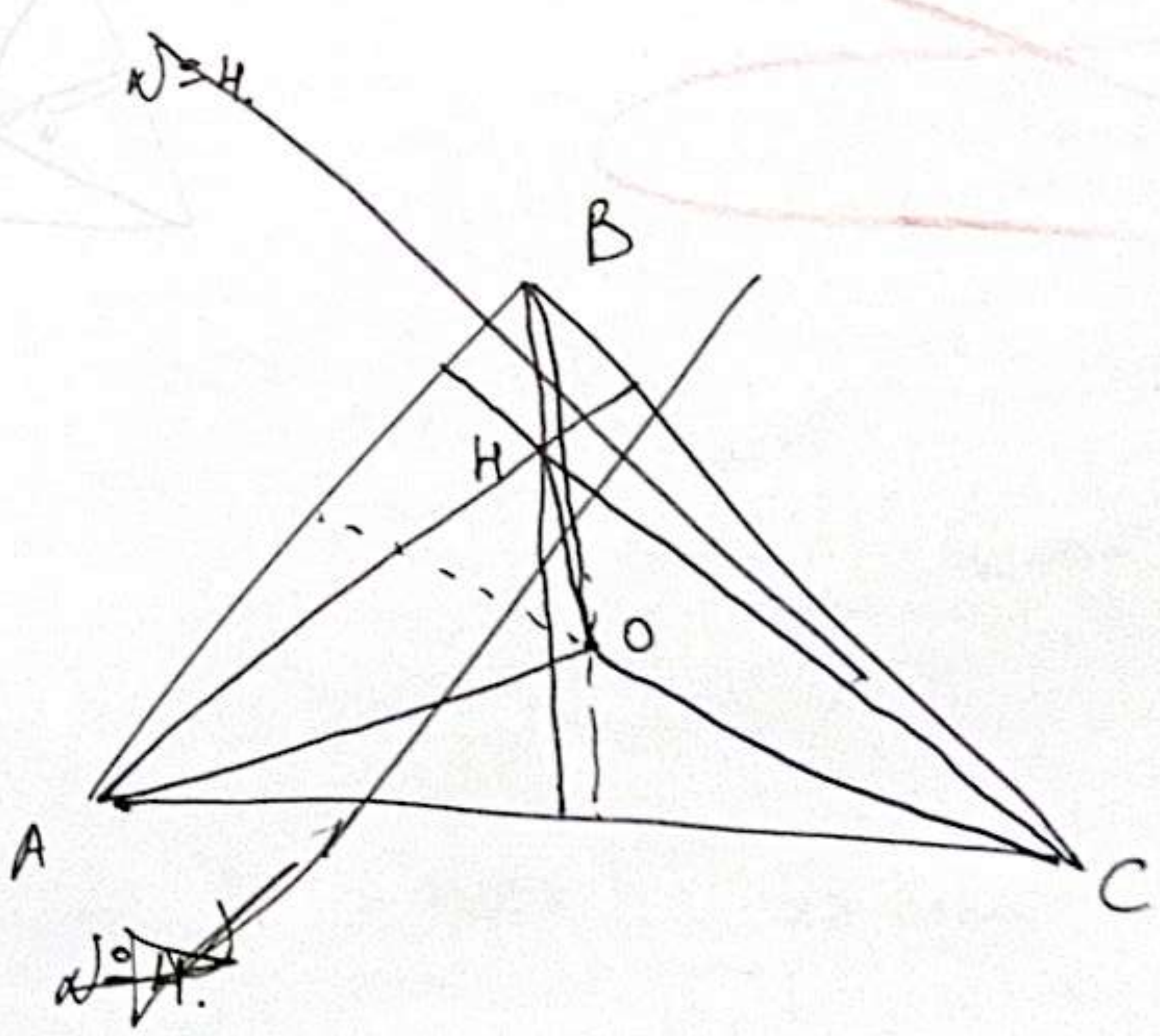
$2\pi+\arcsin-\frac{\pi}{6}>\frac{7\pi}{4}$

Сумма корней!

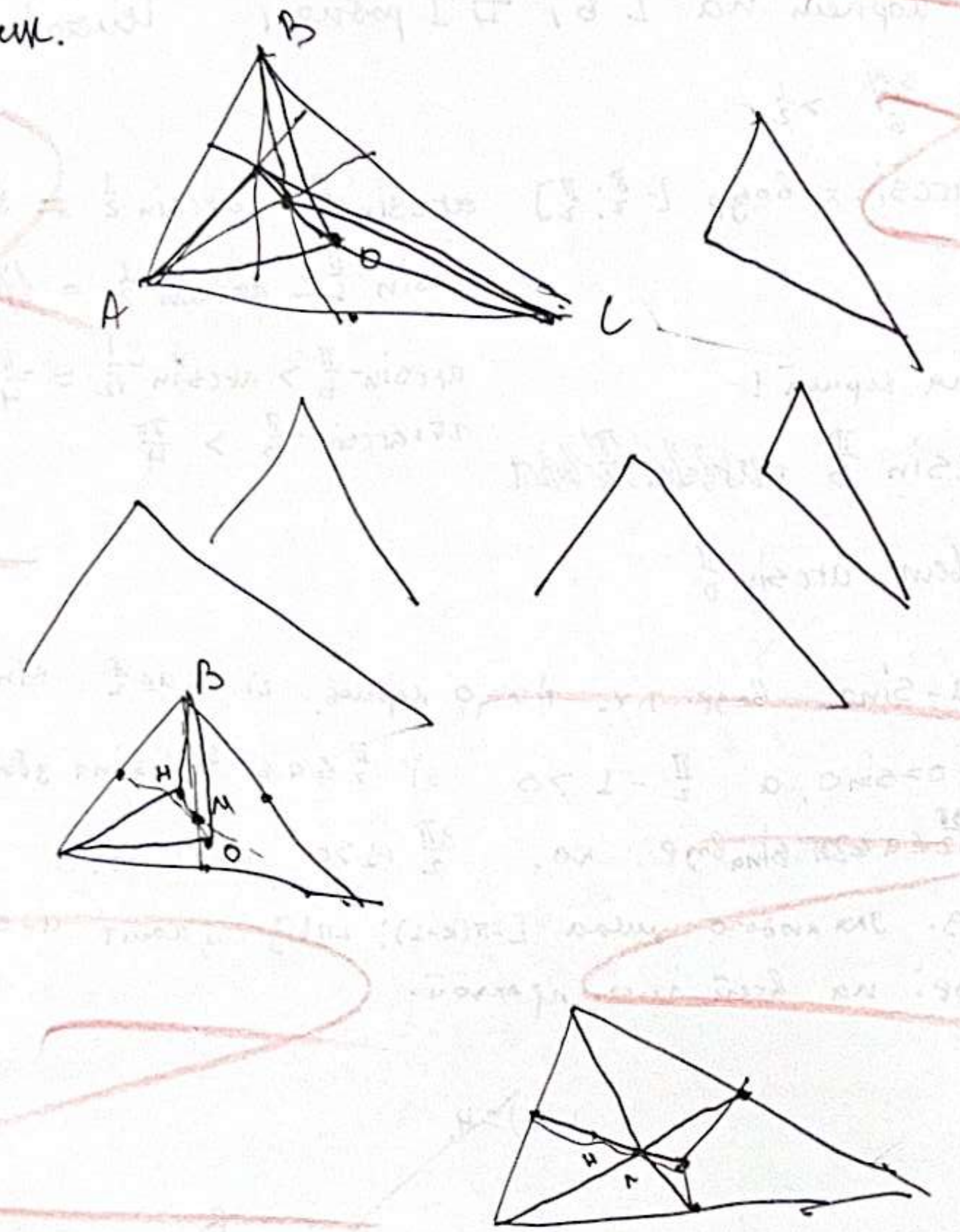
$\arcsin\frac{\pi}{6}$ + ~~[crossed out]~~

Ответ: $\arcsin\frac{\pi}{6}$

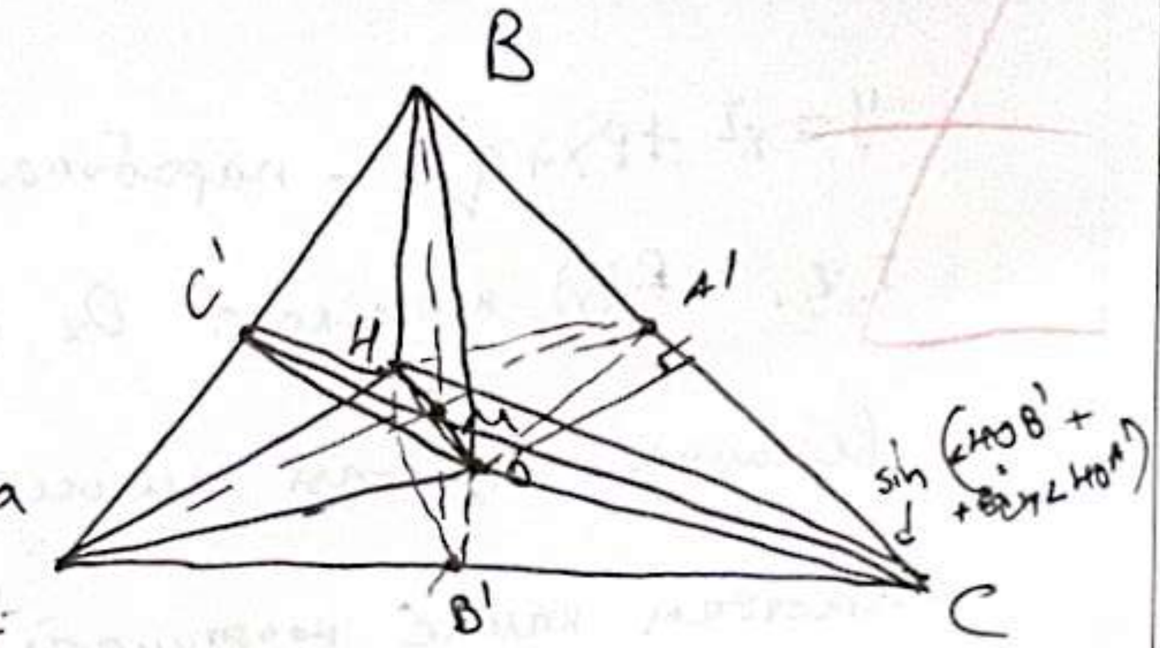
⊛ $a-\sin a$ возр. т.к. 1) $a=0$ корень. 2) $0\le a\le\frac{\pi}{2}$ $\sin a$ возр. но $0=\sin 0$, а $\frac{\pi}{2}-1>0$. 3) $\frac{\pi}{2}\le a\le\frac{3\pi}{2}$ $\sin a$ убыв, а возр 4) $\frac{3\pi}{2}\le a\le 2\pi$ $\sin a$ возр. но. $\frac{3\pi}{2}+1>0$ и $2\pi-0>0$ и т.д. для любого цикла $[2\pi(k-1);2\pi k]$ значит $a-\sin a$ возр. на всей числ. прямой.



Черновик.



Чистовик №4.



H - ортоцентр

O - центр опис. окр.

Тогда OH - прямая Эйлера

Тогда по св-ву прямой Эйлера

M - середина OH ; M -

точка пересечения медиан треугольника. Также по теореме (св-во ортоцентра) $BH = 2OB'$

~~$S_{HBO} = BH \cdot HO \cdot \sin\angle BHO$~~ $\quad S_{\triangle HB'O} = B'O \cdot HO \cdot \sin\angle HOB'$

$OB' \parallel BH$ т.к. $BH \perp AC$ и $OB' \perp AC$ зн $\angle BHO = \angle HOB'$ зн

$S_\triangle\ HB'O = \cancel{\frac{S_{BOH}}{2}} = 2,5$

~~Аналогично~~ $S_{HOC} = 2\ S_\triangle HMC'$

$S_{HMC} = 2S\ MOC'$ т.е. $S_{HOC} = 2S C'HO$

~~Заметим~~: $AC'OB'$ - опис ($\angle OB'A = 90° = \angle AC'O$) AO - диаметр HOA тогда

$S_{HA'O} = \frac{1}{2}S\ AHO \quad , \quad S_{HB'O} = \frac{1}{2}S\ HBO$

$S_{HA'O} \cancel{=} S_{HB'O} = \frac{1}{2}HO\left(B'O \cdot \sin\angle HOB' + OA' \cdot \sin\angle HOA'\right) =$

$= \frac{1}{2} HO \cdot OC' \cdot \sin\angle HOC'$

$S_{HC'O} = \frac{9-5}{2} = 2$ зн $S_{HOC} = 4$ но если

$\angle C'OH$ не между $\angle HOB'$ и HOA', то тогда будет

$S_{HC'O} = \frac{9+5}{2} = 7$ Тогда $S_{HOC} = 14$

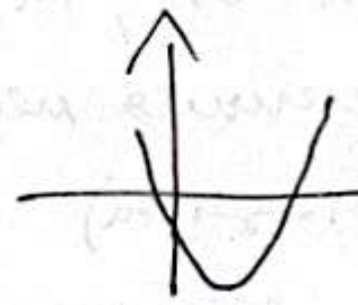
Ответ: 14 или 4.

Чистовик. №5.

$y = x^2 + px + q$ – парабола.

Т.к. $f(x)$ пересекает O_x в двух точках, то вершина параболы ниже оси O_x

Посмотрим какие координаты у точек A, B и C



$C(0;q)$ $A(x_1;0)$ $B(x_2;0)$

D равноудалена от A, B и C т.е. $AD = DB = DC$

Пусть у D координаты $(x_3; y_3)$. Известно, что $x_1^2 + y^2 = 2021$

Пусть $x_1 < x_2$, $x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2-4q}}{2}$; $x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2-4q}}{2}$

По формуле расстояния $AD = \sqrt{\left(\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} - x_3\right)^2 + (0 - y_3^2)} =$

$BD = \sqrt{\left(\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} - x_3\right)^2 + (0-y_3)^2} = \sqrt{(0-x_3)^2 + (q-y_3)^2} = DC$,

$AB = \sqrt{\left(\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} - \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)^2 + 0} = \sqrt{p^2-4q}$ – наибольшее

из $AD = DB$

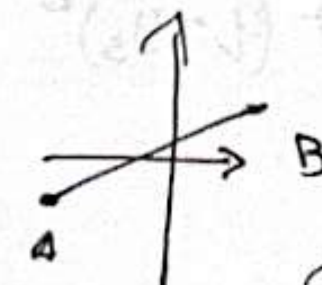
$\left|\frac{-p \pm \sqrt{p^2-4q}}{2} - x_3\right| = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} - x_3$ т.к. $\sqrt{p^2-4q} \neq 0$

по усл. (A не совп. с B), то $\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} + x_3 = x_3 - \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$

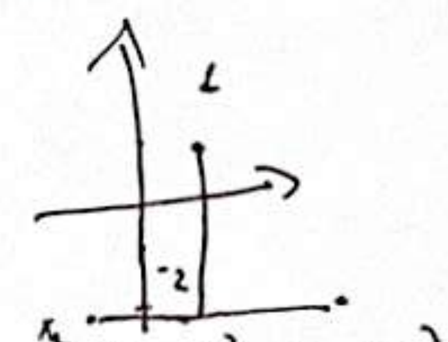
$2x_3 = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} + \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$

$2x_3 = \frac{-p}{\cancel{2}}$ $x_3 = \frac{-p}{2}$

Черновик.



$\sqrt{(x_1^2 - x_2)^2} + \sqrt{y_1^2 - y^2}$



$-1(x_1+x_2)^2$ $(y_1-y_2)^2$

$2021 : 17$, $2021 : 11$, $2021 : 13$, $2021 : 23$, $2021 : 19$, $2021 : 337$, $2021 : 29$

$44^2 = 44 \times 44 = 1936$

$2021 - 1936 = 85$

$43 \times 43 = 1849$

$2021 - 1849 = 178$

$2021 = x^2 + y^2$

$2021 + 2xy = (x+y)^2$

$46 \times 46 = 2116$

$42 \times 42 = 1764$

$2021 - 1764 = 267$

$2021 - 1681 = 440$

$41 \times 41 = 1681$

$21 \times 21 = 441$

$\begin{cases} xy = 94 \\ x+y = 188 \end{cases}$

$2209 - 2021 = 188$

$\begin{cases} 2 \cdot x \cdot y = 24 \\ x+y = 24 \end{cases}$ $x = y - 45$

$2116 + 2xy = (x+y)^2$

$2116 - 2021 = 095$

$\begin{cases} x+y = 45 \\ xy = 12 \end{cases}$

$y^2 - 45y - 12 = 0$ $2116 - 2021 =$ $2116 - 2021$

1600 400 421

Черновик

$D(-\frac{p}{2}; y_3)$

$AD = BD = CD = \sqrt{\frac{p^2-4q}{4} + y_3^2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + (q-y_3)^2}$

$\frac{p^2-4q}{4} + \cancel{y_3^2} = \frac{p^2}{4} + q^2 - 2q y_3 + \cancel{y_3^2}$

$-q = q^2 - 2q y_3$

$-q^2 - q = -2q y_3$

$y_3 = \frac{q^2+q}{2q}$

$y_3 = \frac{q+1}{2} \quad q \neq 0$

$D(-\frac{p}{2}; \frac{q+1}{2})$

$\left[\begin{array}{l} 2021 = \frac{p^2}{4} + \frac{q^2+2q+1}{4} \\ 2021 = \frac{p^2}{4} + \frac{1}{4} \quad \varnothing \end{array}\right.$

$\sqrt{p^2-4q}$ – наиб. т.е. p^2-4q – наиб.

т.е. p наиб, q наим.

$4 \cdot 2021 = p^2 + (q+1)^2$

$p = 4 \cdot x^2 \quad q+1 = 4 \cdot y^2, \quad x^2+y^2 = 2021$

$4 \cdot 2021 + 2p(q+1) = (p+q+1)^2$

Не подобрал такие p и $(q+1)$ (не успел)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Выполнять задания на титульном листе запрещается!