0 381533 390005

38-15-33-39
(178.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 КЛАСС

Ростов-на-Дону

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы горы

по МАТЕМАТИКЕ

Кружмалева Михаила Андреевича

фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«7» апреля 2024 года

Подпись участника

38-15-33-39 (178.1)

Черновик 1.

Пусть x - продолжит. полета 1-ой модели

$x+300$ - продолжит. полета 2-ой модели.

a - скорость 1-ой модели, b - скорость 2-ой.

Тогда $(a-3)\cdot x$ - расстояние 1 при встр. ветре

$(b-3)\cdot(x+300)$ - расстояние 2 модели

при встр. ветре.

Тогда по условию задачи $(a-3)\cdot x =$

$= (b-3)\cdot(x+300) + 700$

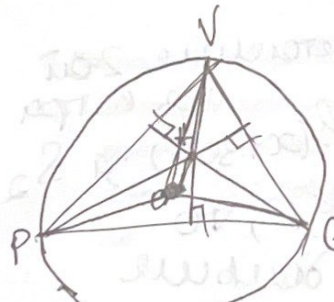
$ax - \cancel{3x} = b\cdot(x+300) - \cancel{3x} - 900 + 700$

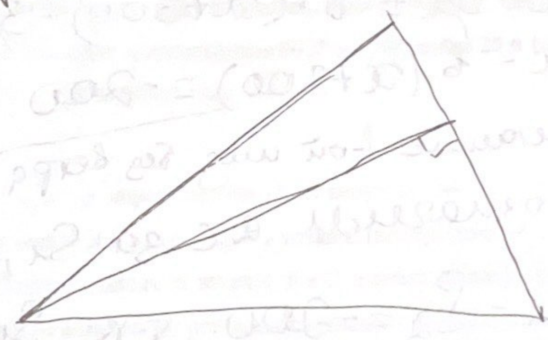
$\underbrace{ax}_{\text{расстояние 1 без в.}} - \underbrace{b\cdot(x+300)}_{\text{расстояние 2 без в.}} = -200.$

$S_1 - S_2 = -200$, т.к $S_1 - S_2 < 0$, то

2-ая пролетит больше первой

на 200 метров





Чистовик 1

№ 1

Пусть:

x - продолжительность полета 1-ой модели,

$x+300$ - продолжительность полета 2-ой модели

a - скорость 1-ой модели, а b - скорость 2-ой

Тогда:

$(a-3)\cdot x$ - расстояние, которое преодолела 1 модель при встречном ветре

$(b-3)\cdot(x+300)$ - расстояние, которое преодолела 2-ая модель при встречном ветре

Тогда по условию задачи:

$(a-3)\cdot x = (b-3)\cdot(x+300) + 700$

$ax - \cancel{3x} = b\cdot(x+300) - \cancel{3x} - 900 + 700$

$ax - b(x+300) = -200$

расстояние 1-ой мод без ветра   расстояние 2-ой без ветра

Обозначим ax за S_1, а $b(x+300)$ за S_2

$S_1 - S_2 = -200$, т.к $S_1 - S_2 < 0$, то 2-ая модель пролетит больше первой на 200 метров

Ответ: вторая модель, на 200 м.

38-15-33-39
(78.1)

Чистовик 2

№2

По условию получаем, что $f(-2)=2$

$f(-1)=4$. $f(0)=6$

Также, заметим, что из $f(x+3) \le f(x)+6$. получаем $f(x+3\cdot n) \le f(x) + 6\cdot n$.

Поскольку по индукции для $n=1$, выполнено, тогда проверим переход из $n=k$ в $n=k+1$, так как

$f((x+3\cdot k)+3) \le f(x+3\cdot k)+6$

$f(x+3\cdot k) \le f(x)+6\cdot k$

$f(x+3(k+1)) \le f(x)+6\cdot(k+1)$, работает

Аналогично из $f(x+2) \ge f(x)+4$, получаем $f(x+2\cdot n) \ge f(x)+4\cdot n$

Тогда, из $f(x+3\cdot n) \le f(x)+6\cdot n$ получаем $f(-1+675\cdot 3) = f(2024) \le$
$\le f(-1)+675\cdot 6 = 4+4050 = 4054$ и

из $f(x+2\cdot n) \ge f(x)+4\cdot n$ получаем $f(0+1012\cdot 2) = f(2024) \ge f(0)+1012\cdot 4 =$
$= 4048+6 = 4054$, тогда $4054 \le f(2024) \le 4054$

Значит, $f(2024) = 4054$

Ответ: $f(2024) = 4054$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик 3

№3

$36\cos(x+\cos x)\cdot\cos(x-\cos x)+9=\pi^2$

$\cos(x+\cos x)\cdot\cos(x-\cos x)=\frac{\pi^2-9}{36}$

$\frac{1}{2}\left(\cos(2x)+\cos(2\cdot\cos x)\right)=\frac{\pi^2-9}{36}$

$\left(2\cos^2 x-1+2\cos^2(\cos x)-1\right)=\frac{\pi^2-9}{18}.$

$\left(\cos^2 x+\cos^2(\cos x)\right)=\frac{\pi^2+27}{36}.$

Пусть $\cos x=t$, $t\in[-1;1]$:

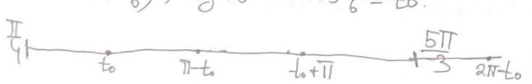
$t^2+\cos^2(t)=\frac{\pi^2+27}{36}.$

Если $t\in[0;1]\Rightarrow t^2+\cos^2(t)$ - возрастающ функция, т.к производная больше нуля. Значит, существует не более 1 корня. на этом интервале

Если $t\in[-1;0]$, то $t^2+\cos^2(t)$ убывает. Соответственно на этих двух интервалах существует по одному корню.

Нам подходят корни $\frac{\pi}{6}$ и $-\frac{\pi}{6}\Rightarrow$

$\Rightarrow\cos x=\frac{\pi}{6}$ и $\cos x=-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=\arccos\frac{\pi}{6}$ и $x=\arccos(-\frac{\pi}{6})$; Пусть $\arccos\frac{\pi}{6}=t_0$.



38-15-33-39 (178.1)

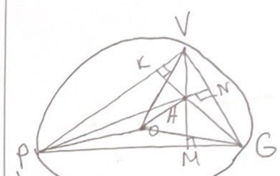
Т.к $t_0<\frac{\pi}{3}$ и т.к $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ Чистовик 4

Сумма корней: $t_0+\pi-t_0+t_0+\pi=2\pi+t_0=$

$=2\pi+\arccos\frac{\pi}{6}$

Ответ: $2\pi+\arccos\frac{\pi}{6}$

№4.



Дано: $\triangle PVG$

окр$(O;R)$

$GK\perp PV$; $VM\perp PG$

$PN\perp VG$; $S_{\triangle OHP}=25$

$S_{\triangle OHV}=13$

Найти: $S_{\triangle OGH}$ -?

1) Так как H - ортоцентр, O - центр описанной окружности ⇒ через них проходит прямая Эйлера. На прямой Эйлера так же лежит точка пересечения медиан.

2) ~~Так как~~ Если прямая проходит через точку пересечения медиан ⇒ сумма расстояний от двух вершин, лежащих в одной плоскости, до этой прямой, равна расстоянию от 3-ей вершины до этой прямой

3) Тогда так как HO - общее основание $\triangle VHO$, $\triangle PHO$, $\triangle GHO$ ⇒ сумма расстояний от 2-х из вершин до прямой HO = расстоянию от 3-ей вершины до HO

4) либо $S_{\triangle GHO}=S_{\triangle POH}+S_{\triangle VOH}$

Чистовик 5

либо $S_{\triangle}POH = S_{\triangle}VOH + S_{\triangle}GOH$

Так как $S_{\triangle}GHO = 25 > 13 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\triangle}GOH = 25 + 13 = 38$, либо

$S_{\triangle}GOH = 25 - 13 = 12$.

Ответ: 12 или 38.