0 911904 660002

91-19-04-66
(161.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант А-3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Дороњкиной Полины Алексеевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата «7» апреля 2024 года

Подпись участника

91-19-04-66 (161.2)

~~Вар.~~

87(восемьдесят)

Черновик

~~№1.~~

	v	t	S
α 1.	v_1	t_1	S
β 2.	v_2	t_1+300	$S-700$

$v_1t_1 - v_2(t_1+300) = 700$

$v_1t_1 - v_2t_1 - v_2300 = 700$

$(v_1+3)t_1 - (v_2-3)t_2 = 700$

$v_1t_1 - 3t_1 - v_2t_2 + 3t_2 = 700$

$v_1t_1 - v_2t_2 = 700 - 3t_2 + 3t_1$

$v_1t_1 - v_2t_2 = 700 - 3(t_2 - t_1)$

~~Вар. А-3~~

№3. $36\cos(x+\cos x)\cos(x-\cos x) + 9 = \pi^2$ $\quad \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{3}\right]$

$36\cdot\left(\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos(2\cos x)}{2}\right) + 9 = \pi^2$

$\cos 2x + \cos(2\cos x) = \frac{\pi^2}{18} - \frac{1}{2}$

$2\cos^2 x - 1 + \cos(2\cos x) = \frac{\pi}{}$

$t = \cos x$

$2t^2 - 1 + \cos(2t) = \frac{\pi^2}{18} - \frac{1}{2}$

Рассм $f(t) = 2t^2 - 1 + \cos(2t)$

Ф-ия четная $\quad f'(t) = 4t - 2\sin t = 2(2t - \sin t) > 0$ при $t > 0$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi^2}{36} - 1 + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\pi^2}{18} - \frac{1}{2}$, значит $t = \pm\frac{\pi}{6}$

Обр. зам:

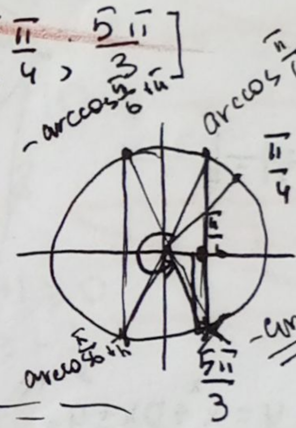
$\cos x = \pm\frac{\pi}{6} \quad x = \pm\arccos\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{4} \leq \arccos\frac{\pi}{6} + \pi n \leq \frac{5\pi}{3}$

~~$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \arccos\frac{\pi}{6} + \pi n \leq \arccos\frac{1}{2}$~~

$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \pi n \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \pi n \leq \frac{1}{2}$

сумма: $\arccos\frac{\pi}{6} + 2\pi$



$+\arccos\frac{\pi}{6} + \arccos$

~~$a - a + \pi + a + \pi - a + 2\pi$~~

$\frac{\pi}{6} > \frac{1}{2}$

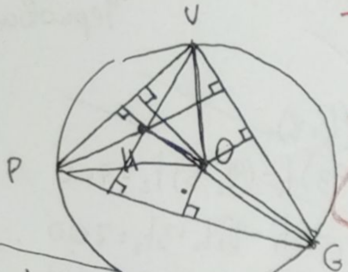
$-\frac{5\pi}{6} =$

$\frac{15}{6} = -\frac{5}{2} = -2{,}5$

Черновик

№3

N4



№6. все a имеет разр. реш. x

$|2[tg\, a]+1|^x=[tg\, a]^2+2$

$[tg\, a]=t,\ t\in\mathbb{Z}$

$|2t+1|^x=t^2+2 \quad t^2+2\geq 2$

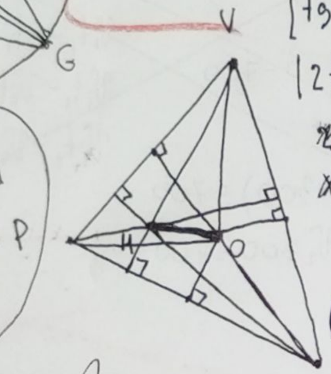
$|2t+1|^x\geq 2$

$2t+1\geq 0$

$(2t+1)^x=t^2+2$

Т.к. t^2+2 всегда полож >0, то $(2t+1)^x$ - всегда полож, значит x всегда це.чи

$2t+1$ всегда >0



№2 $f(2024)$-?

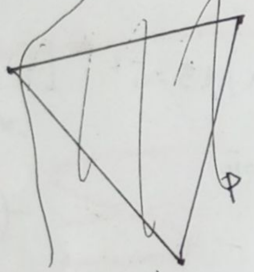
$f(x)=|2x+3|-|2x+1|+4$

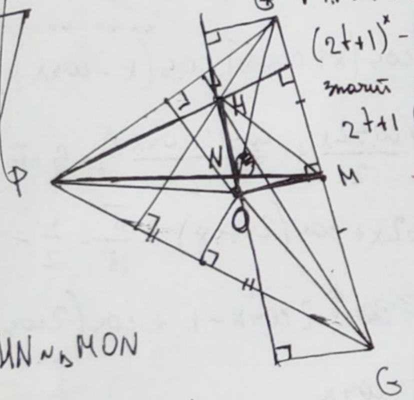
$x\in[-2;0]$

$f(x+3)\leq f(x)+6$

$f(x+2)\geq f(x)+4$

~~$|2x+4+3|-|$~~





№5. $y=x^2+px+q \quad q=C$

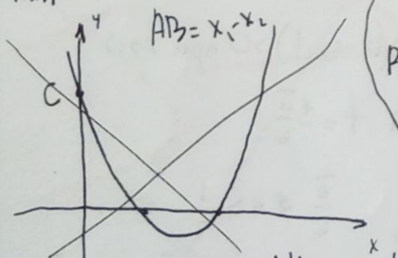
$Ox:\ A\ B$

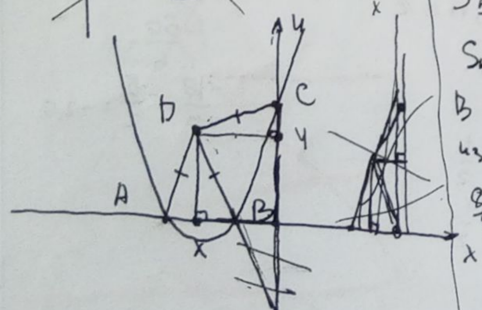
$Oy:\ C$

$D(x;y)$ равноуд. $x+y=-2022$

min AB

$AB=x_1-x_2$





$\Delta PHN \sim \Delta MON$

O - центр оп. окр.

H - точка пер. выс $\Rightarrow PH=2\cdot OM$

$k_{подоб.}=\frac{1}{2}\Rightarrow h_{\Delta PHN}=2h_{\Delta MON}$

OH - общ

Рассм ΔVOH, ΔGOH и ΔMOH

M - серед. VG $\Rightarrow h_{\Delta MOH}=\frac{h_{\Delta VOH}+h_{\Delta GOH}}{2}$

$S_{\Delta PHN}=2S_{\Delta MON}$

OH - общ

$S_{\Delta MOH}=\frac{S_{\Delta VOH}+S_{\Delta GOH}}{2}$

$S_{\Delta OHP}=2S_{\Delta MOH}$ $\Rightarrow S_{\Delta OHP}=S_{\Delta VOH}+S_{\Delta GOH}$

$S_{\Delta OHP}=25 \quad S_{\Delta OHV}=13$

В зависимости от рисунка сумма площ. двух из тр. будет площ. третьего, поэтому

$25+13=S_{OHG}$ или $S_{OHG}+13=25$ или $S_{OHG}+25=13$ (не возм.)

$S_{OHG}=38 \quad S_{OHG}=12$

91-19-04-66 (161.2)

~~Черновик~~

Чистовик

~~$(2t+1)^x=(2t)^x+\ldots$~~

$|2t+1|^x=t^2+2$

~~$(x+y)^4=4x+4x^3y^3$~~

$2t+1>0$:

$(x+y)^2(x+y)^2=(x^2+2xy+y^2)(x^2+2xy+y^2)=$

$=x^4+2x^3y+x^2y^2+2x^3y+4x^2y^2+2xy^3+x^2y^2+2xy^3+y^4$

$=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 \quad x^4+y^4+2xy(2x^2+3xy+2y^2)$

$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

$x^2+2xy+y^2$

$6\leq 12$

$6\geq 10$

$2x+9-2x-7+4\leq 8 \quad 6\leq 8$

$2x+7-2x-5+4\geq 6 \quad 6\geq 6 \quad 6\geq 2x+3+2x+1+8$

$6\geq 4x+12 \quad 4x\leq -6 \quad x\leq -\frac{3}{2}$

$2x+9-2x-7+4\leq 2x+3+2x+1+10$

$6\leq 4x+14 \quad 4x\geq -8 \quad x\geq -2$

№2 $|2x+9|-|2x+7|+4\leq|2x+3|-|2x+1|+10$

$|2x+7|-|2x+5|+4\geq|2x+3|-|2x+1|+8$

~~$2x+7=t$~~: $6\leq 12$, $6\geq 10$

~~$|t+2|-|t|+4\leq|t-4|-|t-6|+10$~~

~~$|t|-|t-2|+4\leq|t-4|-|t-6|+8$~~

$2x+1\geq 0$

$x\geq -\frac{1}{2}$

$\cancel{2x}+9-\cancel{2x}-7+4\leq -\cancel{2x}-3+\cancel{2x}+1+10$

$6\leq 8$

$2x+7+2x+5+4\geq 6$

$4x\geq -10 \quad x\geq -\frac{5}{2}$

1. $2x+9\geq 0$, $x\geq -\frac{9}{2}$

$\varnothing \quad \varnothing \quad \varnothing$

$-\frac{9}{2} \quad -\frac{7}{2} \quad -\frac{5}{2} \quad -\frac{3}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad x$

$2x+9$	−	+	+	+	+	+
$2x+7$	−	−	+	+	+	+
$2x+5$	−	−	−	+	+	+
$2x+3$	−	−	−	−	+	+
$2x+1$	−	−	−	−	−	+

1. $x\leq -\frac{9}{2}$: $\boxed{f(-2)=2 \quad f(-1)=4 \quad f(0)=6}$ 2. ~~$2x+9$~~

$-\cancel{2x}-9+\cancel{2x}+7+4\leq -\cancel{2x}-3+\cancel{2x}+1+10$ $\quad 2x+9+\cancel{2x}+7+4\leq -2x-3+\cancel{2x}+1+10$

1. $-\cancel{2x}-7+\cancel{2x}+5+4\geq -\cancel{2x}-3+\cancel{2x}+1+8$ $\quad 4x\leq -12$

$x\in\varnothing$

$f(2024)=f(x+3)\leq f(x)+6\leq f(x-3)+12$

$f(2024)=f(x+2)\geq f(x)+4\geq f(x-2)+8$

$x\in\varnothing$

1. $f(2024-3n)+6n$

2. $f(2024-2n)+4n$

1. $n=675$

2. $n=1012$

2. 1. $f(2024)\leq f(-1)+675\cdot 6=4054$

2. $f(2024)\leq f(0)+1012\cdot 4=4054$

$f(2024)=4054$

91-19-04-66
(161.2)

Чистовик.

№1.

	v	t	S
α	v_1	t_1	S_1
β	v_2	t_1+300	S_1-700

$t_2-t_1=300$

$v_1t_1-v_2t_2$ – ?

$(v_1-3)t_1-(v_2-3)t_2=700$

$v_1t_1-3t_1-v_2t_2+3t_2=700$

$v_1t_1+3(t_2-t_1)-v_2t_2-700=0$

$v_1t_1+3\cdot300-v_2t_2-700=0$

$v_1t_1+200=v_2t_2$, значит

$S_1+200=S_2$, большее расст. пролетит модель β, на 200м

Ответ: модель Бета; на 200 м.

№3. $36\cdot\cos(x+\cos x)\cos(x-\cos x)+9=\pi^2$ $\left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{3}\right]$

$36\cdot\left(\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos(2\cos x)}{2}\right)+9=\pi^2$

$\cos 2x+\cos(2\cos x)=\frac{\pi^2}{18}-\frac{1}{2}$

$2\cos^2x-1+\cos(2\cos x)=\frac{\pi^2}{18}-\frac{1}{2}$

Пусть $\cos x=t$:

$2t^2-1+\cos 2t=\frac{\pi^2}{18}-\frac{1}{2}$

Рассм. $f(t)=2t^2-1+\cos 2t$

$f(t)$ – четная на $[0;1]$

$f'(t)=4t-2\sin t=2(2t-\sin t)>0$ при $t>0$; монотонно возр. на $[0;1]$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi^2}{36}-1+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\pi^2}{18}-\frac{1}{2}$, значит на $[-1;1]$ $t=\pm\frac{\pi}{6}$

Обр. зам.:

$\cos x=\pm\frac{\pi}{6}$ $x=\pm\arccos\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$

см. след. стр. →

№3 (продолж.)

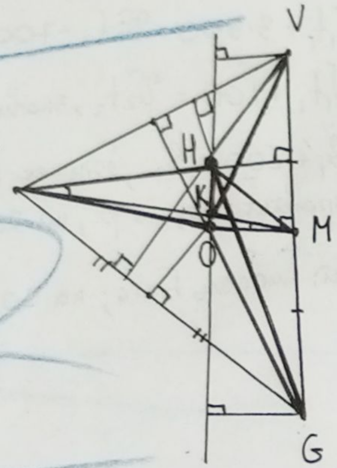
Чистовик

$x = \pm \arccos \frac{\pi}{6} + \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$

Сумма: $\arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi$

Ответ: $x = \pm \arccos \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$;
$\arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi$

№4.



Дано: $\triangle PVG$ - остроуг. треуг.,
H - точка пересеч. высот,
O - центр опис. окр.,
$S_{\triangle OHP} = 25$
$S_{\triangle OHV} = 13$

Найти:
$S_{\triangle OHG}$

Решение:

1. Проведем PM - медиану; M - середина VG
Т.к. O - центр опис. окр., то O - точка пересеч. серединных перпендикуляров.
2. Рассм. $\triangle PKH$ и $\triangle MKO$, где K - точка пересеч. OH и PM:
Т.к. $KM \perp VG$, $PH \perp VG$, то $PH \parallel KM$.
$\angle HPK = \angle KMO$; $\angle PHK = \angle MOK$ $\Rightarrow \triangle PKH \sim \triangle MKO$ (по трем уг.)
3. O - центр опис. окр.
H - точка пер. высот $\Big| \Rightarrow PH = 2 \cdot OM$, значит $\triangle PKH \sim \triangle MKO$, $k = \frac{2}{1}$
4. Т.к. $k = \frac{2}{1}$, то $h_{\triangle PKH} = 2 \cdot h_{\triangle MKO}$. $h_{\triangle PKH} = h_{\triangle POH}$; $h_{\triangle MKO} = h_{\triangle MOH}$, а
OH - общая, значит $S_{\triangle POH} = 2 \cdot S_{\triangle MOH}$
5. Рассм. $\triangle VOH$, $\triangle MOH$ и $\triangle GOH$:
M - середина VG
OH - общая $\Big| \Rightarrow h_{\triangle MOH} = \frac{h_{\triangle VOH} + h_{\triangle GOH}}{2}$; $S_{\triangle MOH} = \frac{S_{\triangle VOH} + S_{\triangle GOH}}{2}$
6. $S_{\triangle POH} = 2 \cdot S_{\triangle MOH}$, значит из ~~п.4~~ п.5 $S_{\triangle POH} = S_{\triangle VOH} + S_{\triangle GOH}$

см. след. стр. →

Чистовик
№4 (продолж.)

7. В зависимости от рисунка сумма площадей двух из треуг-ков будет равна площади третьего, поэтому:
$S_{\triangle POH} = S_{\triangle VOH} + S_{\triangle GOH}$ или $S_{\triangle VOH} = S_{\triangle POH} + S_{\triangle GOH}$ или $S_{\triangle GOH} = S_{\triangle POH} + S_{\triangle VOH}$.

$S_{\triangle POH} = 25$
$S_{\triangle VOH} = 13$ $\Big| \Rightarrow$ $25 = 13 + S_{\triangle GOH}$
$13 = 25 + S_{\triangle GOH}$ (не возможно)
$S_{\triangle GOH} = 25 + 13$

$S_{\triangle GOH} = 12$
$S_{\triangle GOH} = 38$

Ответ: 12; 38.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!