0 444379 300000

44-43-79-30
(178.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения Волгоград
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы"
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Курбесова Дмитрия Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Сдано : 14:20

Дата

«7» апреля 2024 года

Подпись участника

44-43-79-30 (178.3)

Чистовик 1 75 (смущает нет?)

№1

Нарисуем таблицу пути/скорости/времени с ветром ~~без ветра~~:

модель	S(м)	$\vartheta(\frac{м}{с})$	t(с)
α	S_B+700	$\frac{S_B+700}{t_\alpha}$	t_α
B	S_B	$\frac{S_B}{t_\alpha+300}$	$t_\alpha+300$

Теперь нарисуем без ветра, а то есть скорость увеличится на $3(\frac{м}{с})$ т.к. ветер был встречный. время работы никак не изменится, значит оставим тоже самое:

модель	S(м)	$\vartheta(\frac{м}{с})$	t(с)
α	$S_B+700+3t_\alpha$	$\frac{S_B+700}{t_\alpha}+3$	t_α
B	$S_B+3t_\alpha+900$	$\frac{S_B}{t_\alpha+300}+3$	$t_\alpha+300$

Понятно, что в безветреной погоде B пролетит больше по таблице. Найдем на сколько:

$(S_B+3t_\alpha+900)-(S_B+700+3t_\alpha)=200$ м

Ответ: бета пролетит больше на 200 метров.

~~Чистовик~~

~~№6~~ 2

~~$|2[\operatorname{tg}\alpha]+1|^x \leq [\operatorname{tg}\alpha]^2+2$~~

~~Пусть $p=[\operatorname{tg}\alpha]$~~

Чистовик 2

№2

$$\left[f(-2)=2,\quad f(-1)=4,\quad f(0)=6\right.$$

1) $f(x+3) \leq f(x)+6$ для $x \in Z$

~~$f(x) \geq f(x+3)-6 \geq f(x+6)-12 \geq$~~

$$f(x) \leq f(x-3)+6 \leq f(x-6)+12 \leq f(x-9)+18 \ldots$$

Так можно писать до бесконечности. ~~Это можно за~~ Из этого следует, что:

$$f(x) \leq f(x-3n)+6n, \quad n \in N$$

2) $f(x+2) \geq f(x)+4$

$$f(x) \geq f(x-2)+4 \geq f(x-4)+8 \geq f(x-6)+12 \geq \ldots$$

Аналогично: $f(x) \geq f(x-2k)+4k,\ k \in N$

Подставим в обе неравенства $x=2024$

$$f(2024-3n)+6n \leq f(2024) \leq f(2024-2k)+4k; \quad n,k \in N$$

Пусть $n=675$ и $k=1012$:

$$f(-1)+2025\cdot 2 \leq f(2024) \leq f(0)+4048$$

$$4+4050 \leq f(2024) \leq 6+4048$$

$$4054 \leq f(2024) \leq 4054 \qquad f(2024)=4054$$

Ответ: 4054

44-43-79-30 (178.3)

Чистовик 3

№3

$$36\left(\cos(x+\cos x)\cdot\cos(x-\cos x)\right)+9=\pi^2$$

$$18\left(\cos 2x+\cos(2\cos x)\right)+9=\pi^2-9$$

$$\cos 2x+\cos(2\cos x)=\frac{\pi^2-9}{18}$$

$$2\cos^2 x-1+2\cos^2(\cos x)-1=\frac{\pi^2-9}{18}$$

$$2\cos^2 x+2\cos^2(\cos x)=\frac{\pi^2+27}{18}$$

$$\cos^2 x+\cos^2(\cos x)=\frac{\pi^2+27}{36}$$

Пусть $t=\cos x,\ t\in[-1;1]$

$$t^2+\cos^2(t)=\left(\frac{\pi}{6}\right)^2+\frac{3}{4}$$

при $t\in[-1,0]$, $(t^2+\cos^2(t))$ - падает значение

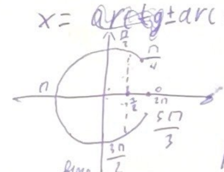
при $t\in[0,1]$, $(t^2+\cos^2(t))$ - растёт

Значит $t^2+\cos^2(t)=\left(\frac{\pi}{6}\right)^2+\frac{3}{4}$

имеет ~~не~~ 2 корня максимум. Их не трудно подобрать: $t_{1,2}=\pm\frac{\pi}{6}$

$$\cos x=\pm\frac{\pi}{6}$$

$$x=\pm\arccos\frac{\pi}{6}+\pi n$$



$\frac{\pi}{6} \approx \frac{3{,}14}{6}$

на этом отрезке

У нас могут быть 4 корня:

$\arccos\frac{\pi}{6},\ \pi-\arccos\frac{\pi}{6},$

$\pi+\arccos\frac{\pi}{6},\ 2\pi-\arccos\frac{\pi}{6}$

Но: $2\pi-\arccos\frac{\pi}{6}>\frac{5\pi}{3}$,

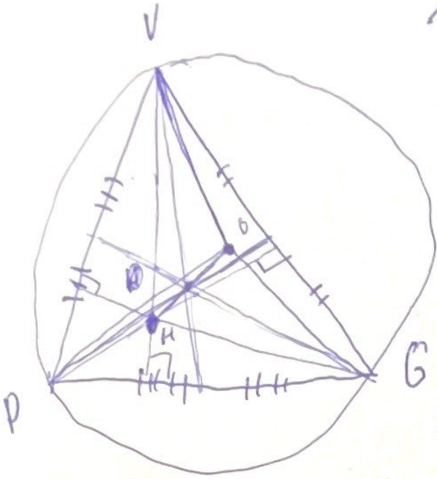
Значит всего 3 корня и их сумма будет:

$$\arccos\frac{\pi}{6}+\pi-\arccos\frac{\pi}{6}+\pi+\arccos\frac{\pi}{6}=2\pi+\arccos\frac{\pi}{6}$$

Ответ: $2\pi+\arccos\frac{\pi}{6}$

Чистовик 4

№4



O – центр опис. окружность,
H – ортоцентр ⇒
⇒ ~~через них~~ O и H лежат на прямой Эйлера

G Точка пересечения медиан принадлежит прямой Эйлера

Если прямая проходит через точку пересечения медиан, то сумма рас-ний от 2 вершин до этой прямой равна растоянию до ~~прям~~ 3-ей вершины.

HO – общая сторона $\triangle VHO$, $\triangle PHO$, $\triangle GHO$ ⇒

⇒ Сумма растояний от 2 вершин до прямой OH равна растоянию ~~до прямой~~ 3-ей вершины до прямой OH.

Значит у нас 2 возможных решения:

$$\left[\begin{array}{l} S_{GOH} = S_{PHO} + S_{VHO} \\ S_{POH} = S_{VOH} + S_{GOH} \end{array}\right.$$

По условию: $S_{POH} = 25$, $S_{VOH} = 13$, тогда

$$\left[\begin{array}{l} S_{GOH} = 38 \\ S_{GOH} = 12 \end{array}\right.$$

Ответ: 12; 38

Черновик

№3

$18\cdot(\cos(2x)+\cos(2\cos x))=\pi^2-9$

$18(2\cos^2 x-1+\cos(2\cos x))=\pi^2-9$

$t=\cos x$

$18(2t^2-1+\cos(2t))=\pi^2-9$

$2t^2-1+\cos(2t)=\frac{\pi^2-9}{18}$ $\quad t\in[-1;1]$

$2t^2-1+2\cos^2(t)-1=\frac{\pi^2-9}{18}$

$2t^2+2\cos^2(t)=\frac{\pi^2+27}{18}$

$t^2+\cos^2(t)=\frac{\pi^2+27}{36}=\left(\frac{\pi}{6}\right)^2+\frac{3}{4}$

$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

№6

$|2p+1|^x=p^2+2$ $\quad p\in Z$

$x\in Z$

p – нечетное

Черновик 3

№ 2

$f(-2) = |-4+3| - |-4+7| + 4 = 1 - 3 + 4 = 2$

$f(-1) = |-2+3| - |-2+7| + 4 = 1 - 7 + 4 = 4$

$f(0) = |2 \cdot 0 + 3| - |2 \cdot 0 + 7| + 4 = 3 - 7 + 4 = 6$

1) $f(x+3) \leq f(x) + 6 \leq f(x-3) + 12 \leq \ldots$

$f(x+6) \leq f(x) + 12$ $\quad f(x) \geq f(x+3n) - 6n$

$f(x+3n) \leq f(x) + 6n$,

2) $f(x+2) \geq f(x) + 4 \geq f(x-2) + 8 \geq f(x-4) + 12$

$f(x+4) \geq f(x) + 8$

$f(x+6) \geq f(x) + 12$

$f(x+2n) \geq f(x) + 4n$

$$\begin{cases} f(x+2n) \geq f(x) + 4n \\ f(x+3k) \geq f(x) + 6k \end{cases}$$

$f(2024+2n) - 4n \leq f(2024) \leq f(2024+3k) - 6k$

$n = (-1012)$ $\quad k = (-675)$ $\quad 2025 : 3 = 675$, $\ 18$, $\ 22$, $\ 21$, $\ 15$

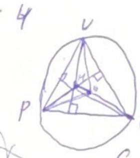
$f(0) + 4048 \leq f(2024) \leq f(-1) + 6 \cdot 675$

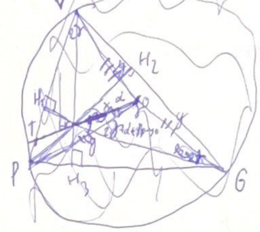
$6 + 4048 \leq f(2024) \leq 4 + 2 \cdot 2025 = 4054$

$4054 \leq f(2024) \leq 4054$ $\quad f(2024) = 4054$

Черновик 2

№ 4





$S_{OHP} = 25$

$S_{OHV} = 13$

S_{OHG} — ?

$\dfrac{S_{OHV}}{S_{OHP}} = \dfrac{13}{25} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin\beta}$

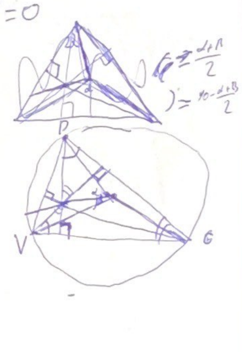
$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{13}{25}$

$\angle H_1TH = 180 - 2\gamma - \alpha$, $\angle H_1HT = 90 - 180 + 2\gamma + \alpha = 2\gamma + \alpha - 90$

$2\gamma + \alpha$

$2(\alpha + \beta) - 90 \pm \gamma + 90 - 2\gamma = 0$

$\alpha + \gamma$



$= \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

$) = 90 - \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

Черновик 1

	S (м)	v (м/с)	t (с)
AB	S	$\frac{S}{t+300}$	$t+300$
A	$S+700$	$\frac{S+700}{t}$	t

$A: v = \frac{S}{t+300}+3$

$B: v = \frac{S+700}{t}+3$

Без ветра их скорости:

	S	v	t
AB	$S+3(t+300)$	$\frac{S}{t+300}+3$	$t+300$
A	$S+700+3t$	$\frac{S+700}{t}+3$	t

$p=2$

$|4+1|^x = 2^2+2$

$5^x = 6$

$p=3$

$|6+1|^x = 9+2$

$7^x = 11$

№6

$$|2[tg\,\alpha]+1|^x = [tg\,\alpha]^2+2$$

$p = [tg\,\alpha] \in \{-1; 0; 1\}$

$|p+1|^x = p^2+2$

1) $p=(-1)$

$|-2+1|^x = 1^2+2$

$1^x = 3$ ✗

2) $p=0$

$1^x = 2$

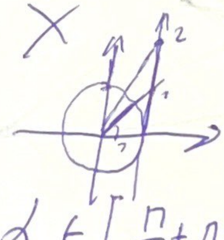
✗

3) $p=1$

$|2+1|^x = 1^2+2$

$3^x = 3$

$x=1$



$p=1$

$[tg\,\alpha]=1$

$tg\,\alpha \in [1; 2)$

$\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{6}+\pi k\right)$