0 914665 160002

91-46-65-16
(160.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10-1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Осипова Арсения Владимировича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«07» апреля 2024 года

Подпись участника

80 (восемьдесят) Б

Листовик №1

1) Пусть Альфа может находиться в воздухе t секунд, тогда Бета может находиться в воздухе $(t+150)$ секунд.

2) Пусть скорость Альфа $x\ \frac{м}{с}$, тогда ск-ть Альфа при встр. ветре $3\ \frac{м}{с}$ — $(x-3)\ \frac{м}{с}$.

$t\cdot(x-3)$ (м) — столько метров пролетела модель Альфа при встр. ветре 3 м/с

Пусть ск-ть Бета равна y м/с, тогда ск-ть Бета при встр. ветре 3 м/с равна $(y-3)$ м/с.

По условию:

$t(x-3)-(t+150)(y-3)=500$

$tx-3t-ty+3t-150y+450=500$

$tx-ty-150y=50$

~~tx~~ $tx-y(t+150)=50$

tx (м) — столько м. пролетит Альфа при безветр. погоде

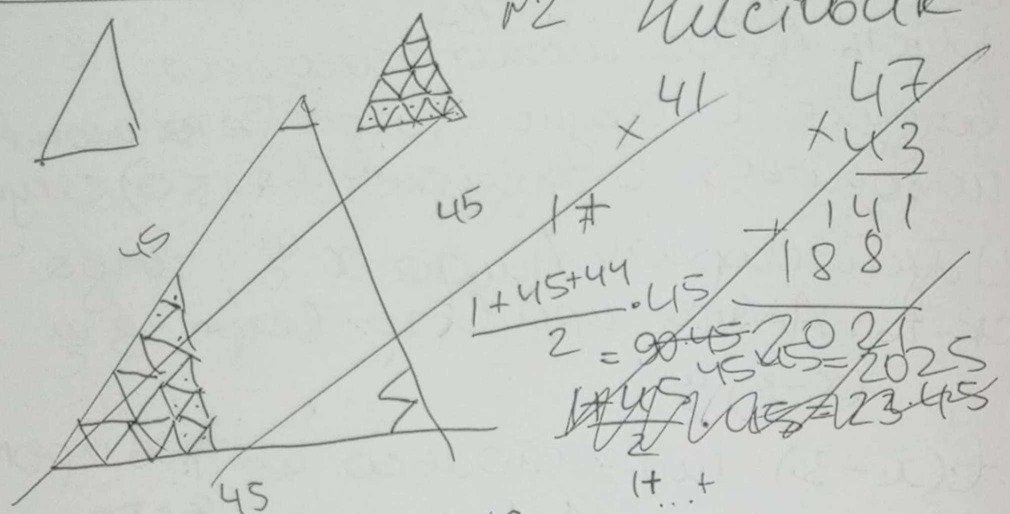
$y(t+150)$ (м) — столько метров пролетит Бета при безветр. погоде.

По доказанному выше

$tx-\cancel{t(y+}\ y(t+150)=50$, т.е. при безветренной погоде ~~пр~~ модель Альфа пролетит больше на 50 м.

Ответ: модель Альфа, на 50 м.

№2 Чистовик



№3

$f(x)=|2x-1|-|2x-3|+6$ при $x\in[0;2]$,

$f(x+3)\le f(x)+6$ и $f(x+2)\ge f(x)+4$ при $x\in\mathbb{Z}$

$f(2024)=?$

$f(0)=1-3+6=4$, $f(1)=1-1+6=6$,

$f(2)=3-1+6=8$

$f(3)\le f(0)+6$. $f(3)\ge f(1)+4$

$f(3)\le 10$, $f(3)\ge 10$

Значит $f(3)=10$

Докажем по индукции ~~чт~~ для нат. x, что $f(x)=2x+4$.

База: $f(1)=6$; $f(0)=4$; $f(2)=8$; $f(3)=10$

Шаг. Предположение: $f(x)=2x+4$.

Докажем, что $f(x+1)=2(x+1)+4$:

$f(x+3)\le f(x)+6$, $f(x+2)\ge f(x)+4$ $\forall x$.

Эти условия можно перепис. в виде:

$f(x+1)\le f(x-2)+6$, $f(x+1)\ge f(x-1)+4$

91-46-65-16 (160.1)

Чистовик

$f(x-2)=2(x-2)+4=2x$

$f(x-1)=2(x-1)+4=2x-2+4=2x+2$,

так как для x чисел x и меньших у нас есть предположение индукции.

Условия им. вид:

$\begin{cases} f(x+1)\le 2x+6 \\ f(x+1)\ge 2x+6 \end{cases} \Leftrightarrow f(x+1)=2x+6=2(x+1)+4$, ч.т.д.

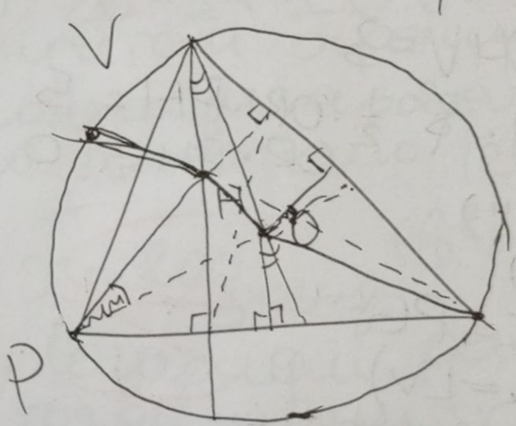
А значит $f(x)=2x+4$ $\forall x\in\mathbb{N}$

$\Downarrow$

$f(2024)=2\cdot 2024+4=4048+4=4052$

Ответ: 4052.

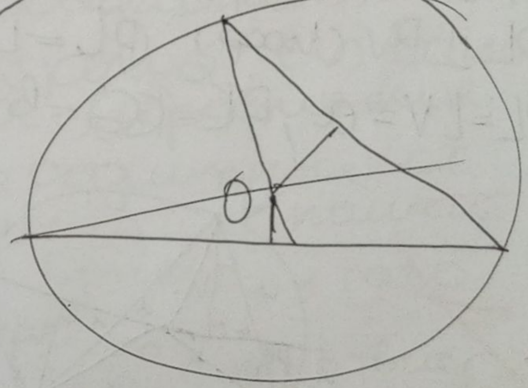
№4



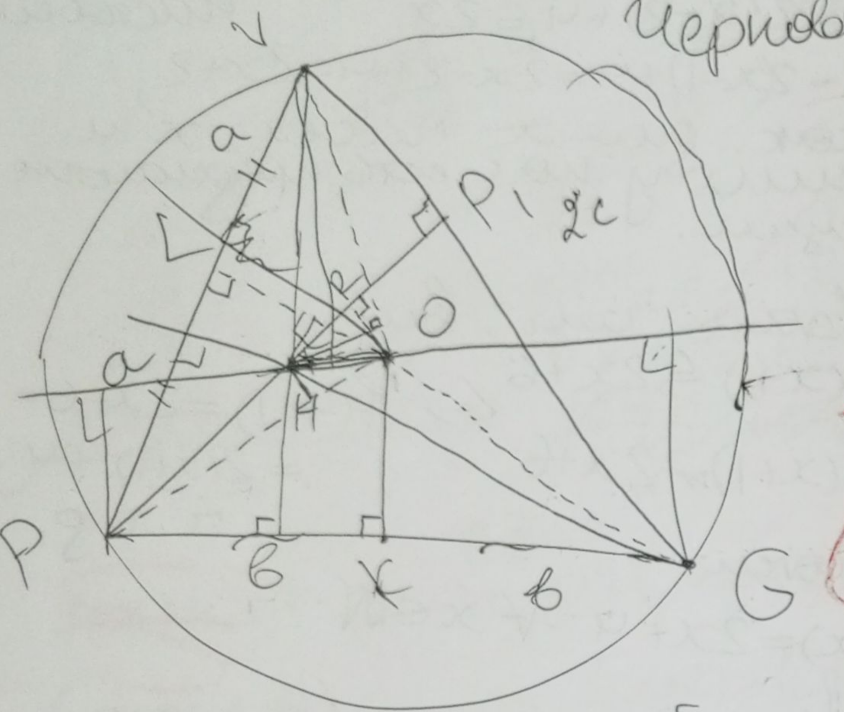
$S_{\triangle OHP}=5$

$S_{\triangle OHV}=3$

$S_{\triangle OHG}=?$



Черновик



O – центр описанной ок-ти – точка пересечения серединн. перпендикуляров.

$S_{\triangle OHP}=5$, $S_{\triangle OHV}=3$

$S_{\triangle OHP}=\frac{1}{2}\cdot OR\cdot PH$; $\frac{1}{2}\cdot OR\cdot PH=5$

$OR\cdot PH=10$

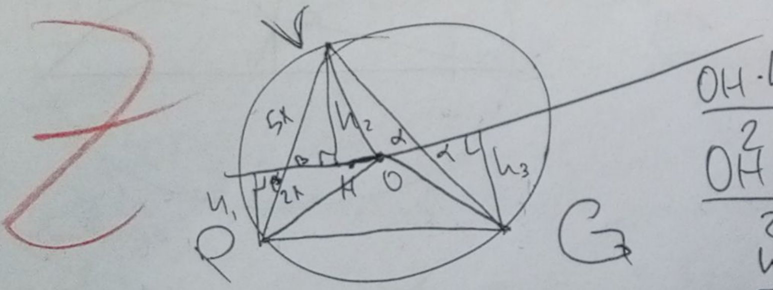
$PP_1\perp VG$ (по построен.);

$OR\perp PP_1$ (по постр.)

$OK\perp PG$ (постр.) ($PK=PG$)

$OL\perp PV$ (постр.) ($PL=LV$)

$PL=LV=a$, $PK=KG=b$, $VG=2c$



$\frac{OH\cdot h_2}{2}=5$

$\frac{OH\cdot h_1}{2}=2$

$\frac{h_2}{h_1}=\frac{5}{2}$

91-46-65-16 (160.1)

№5 Чистовик

$|2[\text{tg}a]-1|^x=[\text{tg}a]^2+2$

иск. рац. реш.

$[\text{tg}a]=b$ – замена, $b\in\mathbb{Z}$

$|2b-1|^x=b^2+2$

найти целые зн. b, для к-рых ∃ Q реш x.

$|2b-1|\in\mathbb{Z}$, $b^2+2\in\mathbb{Z}$, т.к. $b\in\mathbb{Z}$.

Ограничения:

$2b-1\neq0$ (показат. функц.)

$b\neq\frac{1}{2}$

1) Отдельно рассм. случай $2b-1=1$; $2b=2$; $b=1$

$1^x=1^2+2$ – нет реш.

2) $2b-1\neq1$ ($b\neq1$), тогда, также с учётом огранич., можно логарифмировать обе части по основанию $|2b-1|$ (>0, $\neq1$)

$x=\log_{|2b-1|}(b^2+2)$

Логарифм рационален тогда лишь, когда его основание и подлог. выражение это возможно различные ст. одного ~~нат~~ числа; в нашем случае это ст. одного и того же натур. числа.

$\begin{cases}b^2+2=a^k\\|2b-1|=a^l\end{cases}$ Как следствие они должны делиться на a

1) $2b-1\geq 0$, $b \not> 1$ $(b\in\mathbb{Z})$ $b\neq 1$ | Чистовик

$\begin{cases} b^2+2=a^k \\ 2b-1=a^l \end{cases}$

$\cancel{\begin{cases} 2b=1 \\ b^2=2 \end{cases}}$

$\Downarrow$

$\cancel{\begin{cases} b^2+2 \,\vdots\, a \\ 2b-1 \,\vdots\, a \end{cases}}$

$\cancel{\begin{cases} b^2+2 \equiv_a 0 \\ 2b-1 \equiv_a 0 \end{cases}}$

$\begin{cases} b^2+2=a^k \\ 2b=1+a^l \end{cases}$

a^l должно быть нечетным

$\begin{cases} b^2=a^k-2 \\ b=\frac{1+a^l}{2} \end{cases}$

$\Downarrow$

$\frac{1+2a^l+a^{2l}}{4}=a^k-2$

$1+2a^l+a^{2l}=4a^k-8$

$4a^k-2a^l-a^{2l}=9$

$\Rightarrow 9 \,\vdots\, a$

$a=3;1;9$

1 не подходит, так осн. не м. б. равно 1 *

* Проверка

1) $a=3$

$\begin{cases} b^2+2=3^k \\ 2b-1=3^l \end{cases}$

$\log_{2b-1} b^2+2=\log_{3^l}3^k=\frac{k}{l}\in\mathbb{Q}$

$k,l\neq 0$; ~~...~~ не подх.

$\begin{cases} b^2=3^k-2 \\ b=\frac{3^l+1}{2} \end{cases}$

$\Downarrow$

$b^2=\frac{3^{2l}+2\cdot 3^l+1}{4}$

$3^{2l}+2\cdot 3^l+1=4\cdot 3^k-8$

$3^{2l}+2\cdot 3^l-4\cdot 3^k=-9$ (*)

1.1) Рассм. м. $k=1$:

$\begin{cases} b^2=1 \\ 2b-1=3^l \end{cases}$ $\begin{cases} b=\pm 1 \\ 2b=3^l+1 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-1 \end{array}\right. \\ 2b=3^l+1 \end{cases}$

Чистовик

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=1 \\ 2=3^l+1 \end{cases} \\ \begin{cases} b=-1 \\ -2=3^l+1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow k\neq 1$

1.2) $l=1$:

$\begin{cases} b^2+2=3^k \\ 2b-1=3 \end{cases}$ $\begin{cases} b^2+2=3^k \\ b=2 \end{cases}$ $\begin{cases} 6=3^k \\ b=2 \end{cases}$

$\Rightarrow l\neq 1$

1.3) $k=2$

$\begin{cases} b^2+2=9 \\ 2b-1=3^l \end{cases} \Rightarrow b\notin\mathbb{Q} \Rightarrow b\notin\mathbb{Z}$

$\Rightarrow k\neq 2$

1.4) $l=2$

$\begin{cases} b^2+2=3^k \\ 2b-1=9 \end{cases}$ $\begin{cases} 27=3^k \\ b=5 \end{cases}$ $\begin{cases} k=3 \\ b=5 \end{cases}$

Подходит $l=2, k=3$, $\boxed{b=5} > 1$

А если степени l и k будут больше, то 9 не будет делиться на $3^{\min\{l,k\}}$ (*)

2) $a=9$

$\begin{cases} b^2+2=9^k \\ 2b-1=9^l \end{cases}$

2.1) $k=1$:

$\begin{cases} b^2+2=9 \\ 2b-1=9^l \end{cases} \Rightarrow b\notin\mathbb{Z} \Rightarrow k\neq 1$

Чистовик

2.2) $l=1$:

$\begin{cases} b^2+2=9^k \\ 2b-1=9 \end{cases}$ $\begin{cases} 27=9^k \\ b=5 \end{cases}$ Это зн. b уже было.

Так или иначе

Для больш. ст. аналогично не сущ. b.

---

2) $2b-1<0$, $2b<1$, $b\le -1$

$\begin{cases} b^2+2=a^k \\ \cancel{2b-1=} \\ -2b+1=a^l \end{cases}$ $\begin{cases} b^2+2=a^k \\ 2b=1-a^l \end{cases}$

Аналогично получаем, что a может быть лишь 3 или 9

ост. для канд. проверить $k=1;2$; $l=1;2$

1) $a=3$

$\begin{cases} b^2+2=3^k \\ -2b+1=3^l \end{cases}$

1.1) $k=1$

$\begin{cases} b^2+2=3 \\ -2b+1=3^l \end{cases}$ $\begin{cases} \begin{cases} b=1 \\ b=-1 \end{cases} \\ -2b+1=3^l \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=1 \\ -2+1=3^l \end{cases} \\ \begin{cases} b=-1 \\ 2+1=3^1 \end{cases} \end{array}\right.$

$\boxed{b=-1}\le -1$ – подходит

1.2) $l=1$

$\begin{cases} b^2+2=3^k \\ -2b+1=3 \end{cases}$

$b=-1$ – уже было

1.3) $k=2$

$\{b^2+2=2$ $b>-1$

...

1.4) $l=2$

$\begin{cases} b^2+2=3^k \\ -2b+1=9 \end{cases}$

$\begin{cases} b=-4 \\ 18=3^k \end{cases}$

$l\ne 2$

Чистовик

* 2) $a=9$:

$\begin{cases} b^2+2=9^k \\ -2b+1=9^l \end{cases}$

2.1) $k=1$

$\begin{cases} b^2+2=9 \\ -2b+1=9^l \end{cases} \Rightarrow b\notin\mathbb{Z} \Rightarrow k\ne 1$

2.2) $l=1$

$\begin{cases} b^2+2=9^k \\ -2b+1=9 \end{cases}$ $\begin{cases} b^2+2=9^k \\ b=-4 \end{cases}$ $18=9^k \Downarrow l\ne 1$

~~2.3)~~ Всё.

Подходят только $b=-1$, $b=5$

* a, взят. как основание, не им. никакого отнош. к параметру.

$b=-1$:

Ур-е:

$|2\cdot(-1)-1|^x=(-1)^2+2$

$3^x=3$

$x=1$

$b=5$

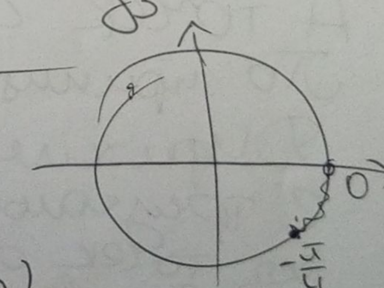
$|2\cdot 5-1|^x=25+2$

$9^x=27$

$x=\log_9 27=\log_{3^2}(3^3)=\frac{3}{2}$

Действ. подходят

Обратная замена



1) $[tg a]=-1$

$tg a\in(-1;0)$

$a\in[-\frac{\pi}{4}+\pi n;\pi n)$, $n\in\mathbb{Z}$

Чистовик

2) $tg\alpha = 5$

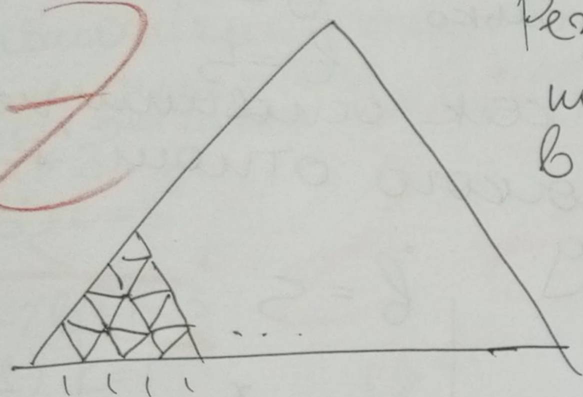
$tg\alpha \in (5;6)$

$\alpha \in [arcctg5+\pi t; arcctg6+\pi t), t\in Z$

Ответ: $\alpha \in [-\frac{\pi}{4}+\pi m; \pi m) \cup [\pi m + arcctg5; \pi m + arcctg6)$. $m \in Z$.

№2

Разрежем исходный больший треугольник на маленькие правильные со стороной 1 так, что их стороны параллельны сторонам большого:



Резать будем по рядам; в каждом след. ряду на 2 правильн. тр. больше. В последнем: $1+2\cdot 44 = \cancel{90}\ 89$ (арифм прогр.)

Всего треуг.: $\frac{1+89}{2}\cdot 45 = 45^2 = 2025$ (число треуг. в рядах обр. арифм. прогр., сумма её чл. выч. по форм. $S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$)

А точек 2023. По принципу Дирихле останется 2 треугольника без точек для любой расстановки точек. На этих местах...

Чистовик

мы и разместим 2 наших треугольника сост. 1.

Ответ: можно.