0 586212 070005

58-62-12-07
(164.1)

# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
## имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Выход 13:03–13:12

Вариант А-4

Место проведения Москва
город

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы
наменование олимпиады
Горы!

по математике
профиль олимпиады

Билалова Данила Павловича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+1 лист

Дата

«7» апреля 2024 года

Подпись участника

70 (семьдесят)



58-62-12-07
(164.1)

Черновик.

А – 1 2 м/с.

Б – 2

$v$

$v \cdot t$ $(x-2)t \cancel{+900} = (y-2) \cdot t$

$(x-2)t = (t+400) \cdot (y-2) + 900$

$xt - \cancel{2t} = yt + 400y - \cancel{2t} - 800 + 900$

$xt = yt + 400y$ $+100$

$\underbrace{xt}$

$(t+400) \cdot y$ x – перв.

y – вт.

$yt + 400y$ на 100 больше.

$xt - 100$ ‖

$\underbrace{xt}_{w?} - (yt - 400y) = 100$

$f(x) = |3x+4| - |3x+2| + 7$ $x \in [-2;0]$

$f(x+3) - 6 \leq f(x)$ $f(x+2) - 4 \geq f(x)$

$4 - 2 + 7$ $f(0) = 9.$

$9$ $f(2) \geq 13$

$f(-2) = 5.$

$-6 + 4$

$f(-1) = 7.$

$2 - 4 + 7$ $-3 + 4$ $f(2) - 4 \geq 9$

$-2 + 7$

$1 - 1 + 7$ $f(2) - 6 \leq 7$

$\cancel{f(2) - 4 + 7 \geq 9 + f(2) - 6}$ $f(2) \leq 13$

ЧЕРНОВИК

$f(1)$

$f(4)-4 \geq 13$

$f(4)-6 \leq f(1)\ 11$

$f(4) \geq 17$

$f(4) \leq 17$

$f(x) = 9 + x \cdot 2$

$f(1)-4 \geq 7$

$f(1)-6 \leq 5$

$f(1) = 11$

$f(0) = 9$

$f(-2) = 5$

$f(0) = 9$

$f(-1) = 7$

~~$f(x+3)-6 \leq$~~

$f(x+1)-6 \leq f(x-2) = 9 + (x-2)\cdot 2$

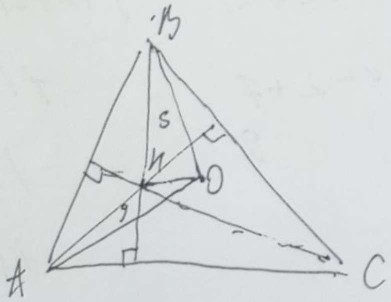
$f(x+1)-4 \geq f(x-1) = 9 + (x-1)\cdot 2$

$f(x+1) \leq 9 + 2x - 4 + 6 = 9 + 2x + 2$

$f(x+1) \geq 9 + 2x - 2 + 4 = 9 + 2x + 2$

$(x+1)\cdot 2$.

$-3 \cdot 3$

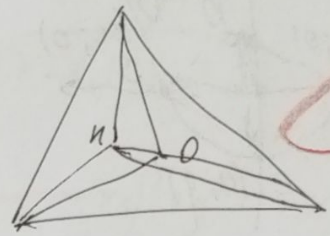


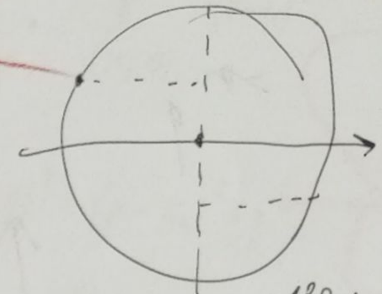





58-62-12-07
(164.1)

ЧЕРНОВИК.



$180 - \alpha - \beta - 90 + \alpha -$

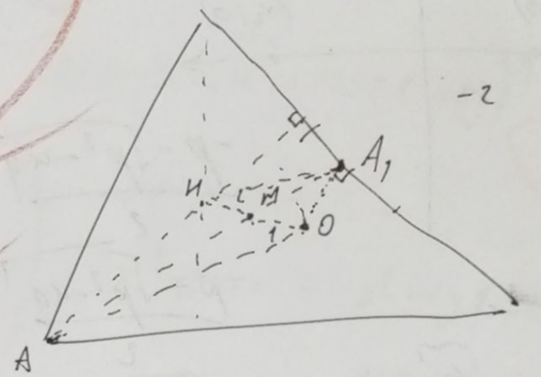
$-90 + \alpha$

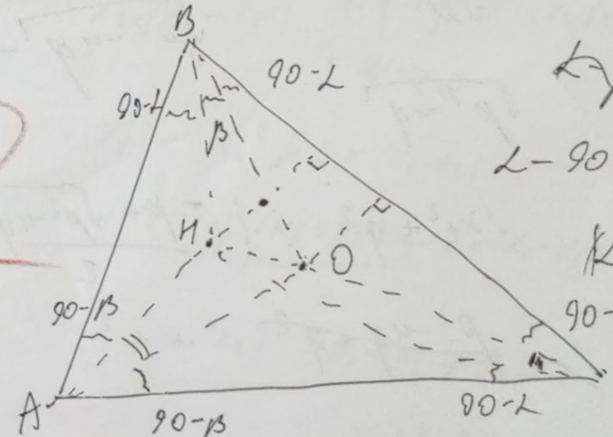
$-2$

$|\alpha - \beta|$

$(\sin \beta + 2\alpha)$.

$180 - \alpha - \beta$




$\alpha \sim \beta$

$\alpha - 90 + \beta - 90 + \beta$

$|\alpha + 2\beta - 180|$

$|\beta + 2\alpha - 180|$

$\frac{BH}{AH} \cdot \frac{|\sin \beta + 2\alpha|}{|\sin \alpha + 2\beta|} = \frac{5}{9}$

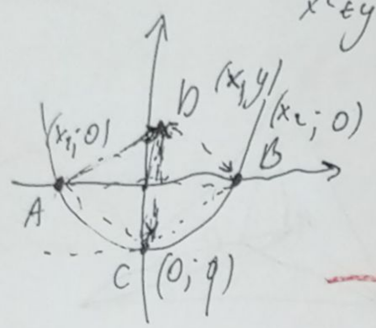
$BH \cdot BO \cdot |\sin \beta + 2\alpha| = 5$

$AH \cdot BO \cdot |(\sin \alpha + 2\beta)| = 9$

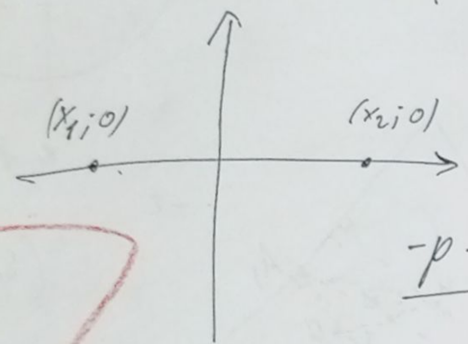
ЧЕРНОВИК

$x^2+y^2=\sqrt{2021}$

$y=x^2+px+q$




$q$




$\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$

$\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$

$\sqrt{D}$ $\sqrt{p^2-4q}$ - max.

$\sqrt{p^2-4q}$

$x_1^2+q^2$ $\left(\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)^2+$

$\cancel{p^2-4q+q^2}$ $+q^2$

$-(p+\sqrt{p^2-4q}$

$\frac{p^2+p^2-4q+2p\sqrt{p^2-4q}}{4}+q^2$





58-62-12-07
(164.1)

ЧЕРНОВИК

AD = BD = CD

$\sqrt{(x-x_1)^2+y^2}=$ $x_1$ $(x;0)$ $(x-x_1)^2$

$(x-x_1)^2+y^2=x^2+(y-q)^2=(x-x_2)^2+y^2$

$x^2+y^2-$

$2021-2x_1x+x_1^2=2021-2yq+q^2=2021-2x_2x+x_2^2$

$\cancel{22}\ x_1x=x_2x$

$x_1^2-2x_1x=q^2-2yq=x_2^2-2x_2x$

$x_1(x_1-2x)=q(q-2y)=x_2(x_2-2x)$

$=x_2(x_2-2x)$

$x_1^2-x_2^2=2x(x_1-x_2)$

$(x_1-x_2)\underbrace{(x_1+x_2)}-2x(x_1-x_2)=0$

$\underbrace{(x_1-x_2)}(x_1+x_2-2x)=0.$

$x_1+x_2-2x=0$

$x_1+x_2=2x$

$q^2-2yq=x_1^2-2x_1x$

$q^2-x_1^2=2$

$\frac{x_1+x_2}{2}=x.$

$q^2-x_1^2+2x_1x-2yq=0$ $2q^2+2x(x_1+x_2)+$

$q^2-x_2^2+2x_2x-2yq=0$ $+\cancel{(x_1 x_2)}x_1^2+x_2^2$

ЧЕРНОВИК

$2q^2+2x(x_1+x_2) - (x_1^2+x_2^2) - 4yq = 0.$

$2q^2+(x_1+x_2)^2-(x_1^2+x_2^2)-4yq=0.$

$2q^2+2x_1x_2-4yq=0$ $\quad q=-\frac{2}{5}=-0{,}4$

$2q^2+2q-4yq=0$ $\quad -0{,}4$

$q(2q+2-4y)=0$ $\quad \sqrt{8083}$

$2q+2-4y=0$

$q(q+6)$ $\quad q+1-2y=0$ $\quad \left(\frac{-b}{2}\right)^2+\left(\frac{q+1}{2}\right)^2=2021$

$q+1=2y$

$q^2-6q$ $\quad y=\frac{q+1}{2}$ $\quad \frac{p^2}{4}+\frac{q^2+2q+1}{4}=2021$

$-\frac{b}{2a}$ $\quad -\frac{b}{2a}$

$p^2+q^2+2q+1=8084$

$b^2$ $\quad \sqrt{p^2-4q^2}$ - max. $\quad p^2=8084-(q+1)^2$

2023

$\sqrt{8084-(q+1)^2-4q^2}$ $\quad p^2=8084-(0{,}6)^2$

$\sqrt{8084-5q^2-2q-1}$

$\sqrt{8083-(5q^2+2q)}=$

$\sqrt{8083-q(5q+2)}=0.$



58-62-12-07 (164.1)



ЧЕРНОВИК.

...36 $\quad \sin x = t$

$(\sin x\cdot\cos(\sin x)+\sin(\sin x)\cdot\cos(x))$

$(\sin x\cdot\cos(\sin x)-\sin(\sin x)\cdot\cos(x)=\frac{\pi^2}{36}-\frac{9}{36}$

$(t\cdot\cos(t))^2-(\sin t\cdot\sqrt{1-t^2})^2 = \left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right)$

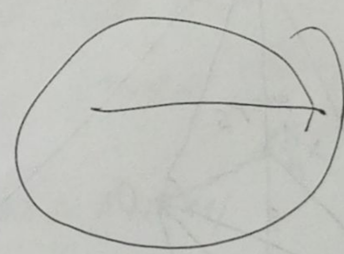
$t^2\cos^2 t-\sin^2 t+t^2\sin^2 t$

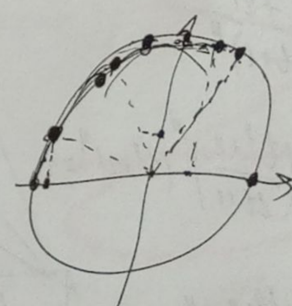
$(\sin t\cdot\sqrt{1-t^2})^2$

$\sin^2 t\cdot(1-t^2)$

$t^2-\sin^2 t=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right)$

$(t-\sin t)(t+\sin t)=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right)$





$\sin(\sin(x))$.

$t^2-\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{4}\right)+\sin^2 t)=0.$

$\cancel{4t}\ 4\sin^2 t+\frac{4\pi^2}{6}\ \cancel{-}\ 1=0$

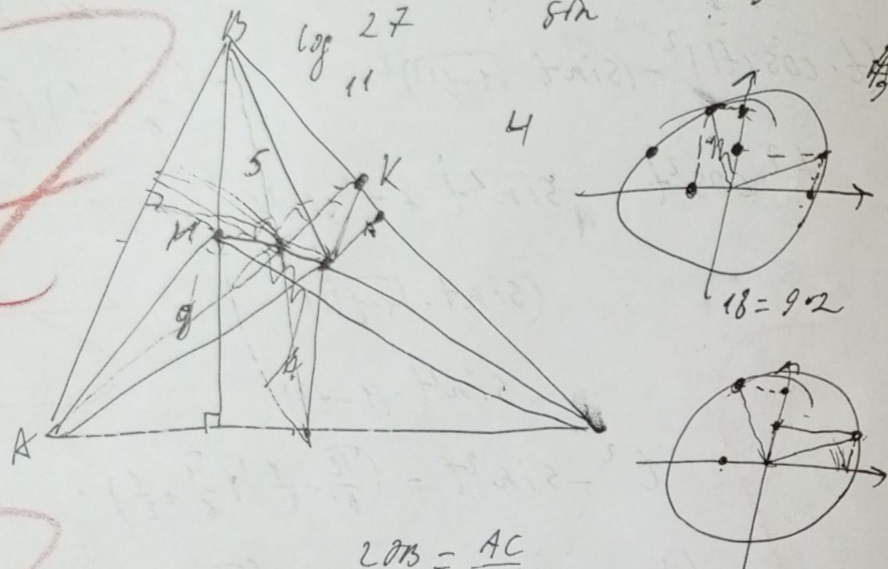
$1-\frac{4\pi^2}{9}$

Черновик.

$\sin(2\alpha+\beta)\cdot\cos(2\beta-\alpha)-\sin(2\beta-\alpha)\cdot\cos(2\alpha+\beta)$

$\sqrt[q]{|2t+1|}$

$\log_{11} 27$



$18=9\cdot 2$

$2OB=\frac{AC}{\sin\beta}$

$OB=\frac{AC}{2\sin\beta}$

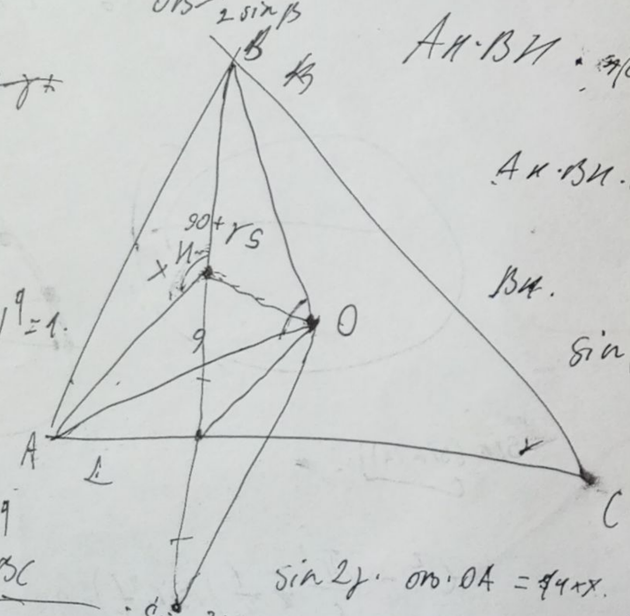
$2\beta=\alpha$

$AH\cdot BH\cdot\cos\gamma$

$AH\cdot BH\cdot\cos\gamma=x$

$\frac{(t^2+2)^q}{|2t+1|^p}$

$\left(\frac{t^2+2}{2t+1}\right)^p(t^2+2)^q=1$



$\sin(2\alpha+\beta)\cdot\frac{AC\cdot BC}{2\sin\beta\cdot\alpha}$

$\left(\frac{t^2+2}{2t+1}\right)^p=\frac{1}{(t^2+2)^q}$

$\frac{AC\cdot BC}{4\sin\beta\cdot\sin\alpha}\cdot\sin 2\alpha+\beta$

$\sin 2\gamma\cdot OB\cdot OA=4+x$

$\sin\gamma$

$|2t+1|^{p}=t^2+2$

$t^2+$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$

$\sqrt[q]{|2t+1|^p}=t^2+2.$

$(2t+1)^p=(t^2+2)^q$





Черновик

№6.

Пусть $[\mathrm{ctg}\, a]=t$; $t\in\mathbb{Z}$.

$|2t+1|^x=t^2+2$

~~$x=\log_{|2t+1|}t^2+2$~~ Пусть $x=\frac{p}{q}$; $p,q\in\mathbb{Z}$

$\sqrt[q]{|2t+1|^p}=t^2+2$

$|2t+1|^p=(t^2+2)^q$

~~$t^2+2$~~ 2 случая:

1) $q\geq p$: $\frac{(t^2+2)^p}{|2t+1|^p}\cdot(t^2+2)^{q-p}=1$

2) $q<p$: $\left(\frac{t^2+2}{|2t+1|}\right)^q\cdot|2t+1|^{q-p}=1.$

1) $(t^2+2)^p\cdot\frac{(t^2+2)^{q-p}}{|2t+1|^p}=1\Rightarrow\left(\frac{t^2+2}{|2t+1|}\right)^p=(t^2+2)^{p-q}$

Тогда $t^2+2\,\vdots\,2t+1$

$t^2+2=k(2t+1)$

$t^2-2kt-(k-2)=0$

$D=4k^2+4(k-2)=4k^2+4k-8=4(k^2+k-2)$

$t=\frac{2k\pm\sqrt{D}}{2}\Rightarrow k^2+k-2$ - квадрат, т.к.

иначе $t$ - не целое, но $(k^2+k-2)$ - квадрат

~~лишь при $k=1$ ...~~

ЧЕРНОВИК

$|2[ctg\,a]+1|$

$|2[ctg\,a]+1|^x=[ctg\,a]^2+2$

$8=2^3$

$|2a+1|^x$

$t^2+2-|2t+1|^x$

$|2t+1|^x=t^2+2$

$102-|21|^x$

$t^2+2-|2t+1|^x=0.$

$102=21^x$

$\log_{21}(102)=x.$

$t^2+2-2t-1$

$t^2+2-\sqrt{2t+1}=0$

$\log_{|2t+1|}t^2+2=x.$

$t^4+(t^2+2)^2=2t+1$

$\log_3 9=2.$

$\log_4 2=\frac{1}{2}$

$3^2=9$

$\frac{t^2+2}{2t+1}=p$ $\quad \frac{2t+1}{t^2+2}$

$b^x=c$

$\log_b c=x.$

$t^2+2=p(2t+1)$

$\log_c b=\frac{1}{x}$

$t^2+2-p\cdot 2t-p=0$

$t^2-2pt+(2-p)=0$

$\sqrt{4p^2-4(2-p)}=$

$c$

$\sqrt{4p^2+4p-8}=c$

ЧИСТОВИК

№1.

Пусть $x$ (м/с) — скорость А-1; $y$ (м/с) — скорость Б-2, $t$ (с) — время, ~~тогда~~ которое А-1 продержалось в воздухе:

тогда:

$$(x-2)\cdot t = (y-2)(t+400)+900, \text{ откуда}$$

$$xt - 2t = yt - 2t + 400y - 800 + 900$$

$$xt - y(t+400) = 100$$

Заметим, что при отсутствии ветра А-1 пролетит: $xt$, Б-2 пролетит: $y(t+400)$, но $xt - y(t+400) = 100$, значит А-1 ~~про~~ пролетит больше расстояние, на 100 метров. Ответ: А-1, на 100 метров

№2.

Покажем, что при $x \in \mathbb{Z}$ и $x \geq -2$ верно следующее: $f(x) = 9 + x\cdot 2$.

Индукция:

База: $f(-2) = |-6+4| - |-6+2| + 7 = 5$.

$f(-1) = |-3+4| - |-3+2| + 7 = 7$.

$f(0) = |0+4| - |0+2| + 7 = 9$.

Переход: $f(x) = 9+x\cdot 2$; $f(x-1) = 9+(x-1)\cdot 2$; $f(x-2) = 9+(x-2)\cdot 2$

$f(x+1) - 6 \leq f(x-2) \Leftrightarrow f(x+1) \leq 9+(x-2)\cdot 2+6 \Leftrightarrow$





чистовик

№2 (продолжение)

$\Leftrightarrow f(x+1) \leq 9+2x-4+6 = \cancel{9+2x} \Rightarrow f(x+1) \leq 9+2(x+1)$,

но также:

$f(x+1) - 4 \geq f(x-1) \Leftrightarrow f(x+1) \geq 9+(x-1)\cdot 2+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x+1) \geq 9+2(x+1)$, откуда $f(x+1) = 9+2(x+1)$,

~~т.е.~~ переход доказан. Отсюда:

$f(2024) = 9 + 2\cdot 2024 = 4048+9 = 4057$.

Ответ: 4057.

№5.

Пусть $A(x_1;0)$, $B(x_2;0)$; $C(0;q)$.

Т.к. $D$ равноудалена от $A, B, C$:

$AD = BD = CD$. Пусть $D(x;y)$; тогда; т.к.

$AD=BD=CD$, $AD^2=BD^2=CD^2$, откуда:

$AD^2 = BD^2 \Leftrightarrow (x-x_1)^2+y^2 = (x-x_2)^2+y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x_1x+x_1^2 = x^2+y^2-2x_2x+x_2^2 \Leftrightarrow$

$x_1^2-x_2^2 - 2x(x_1-x_2) = 0 \Leftrightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2) - 2x(x_1-x_2) = 0$

$(x_1-x_2)(x_1+x_2-2x) = 0$, т.к. $A$ и $B$ разл.:

$x_1+x_2-2x = 0 \Rightarrow x = \frac{x_1+x_2}{2}$

Из $AD^2=CD^2$ и $BD^2=CD^2$: $AD^2+BD^2 = 2CD^2$:

$(x-x_1)^2+y^2+(x-x_2)^2+y^2 = 2(x^2+(y-q)^2)$,

ЧИСТОВИК

№5 (продолжение)

$2x^2+x_1^2+x_2^2-2x(x_1+x_2)+2y^2=2x^2+2y^2+2q^2-4qy$

$x_1^2+x_2^2-(x_1+x_2)^2-2q^2+4qy=0$, т.к. $2x=x_1+x_2$.

$-2x_1x_2-2q^2+4qy=0$, т.к. $x_1x_2=q$ (по т. Виета) $\Rightarrow$

$\Rightarrow -2q-2q^2+4qy=0$

$2q(q+1-2y)=0$ ~~т.к.~~

1) $q=0$, или 2) $y=\frac{q+1}{2}$

1) $q=0 \Rightarrow x_1x_2=0$, но тогда $C(0,0)$ или $C(0,0)$ и $B(0,0)$

и $A(0,0)$ ~~(без огр. общности)~~, но точки различны.

2) $y=\frac{q+1}{2}$, тогда:

$x^2+y^2=2021 \Leftrightarrow \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{q+1}{2}\right)^2=2021$.

$x_1+x_2=-p$ (по т. Виета) $\Rightarrow \frac{p^2}{4}+\frac{(q+1)^2}{4}=2021$,

тогда: $p^2+(q+1)^2=8084$, откуда:

$p^2=8084-(q+1)^2$. Заметим, что длина

$AB$ это $|x_1-x_2|$, т.е. $\left(\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}-\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)=$

$=\sqrt{p^2-4q}$, подставив $p^2=8084-(q+1)^2$, получим:

$\sqrt{8084-q^2-2q-1-4q}=\sqrt{8083-(q^2+6q)}=$

$=\sqrt{8083-q(q+6)}$, ~~что при $q=-6$: $\sqrt{8083}=AB_{max}$~~.





№5 (продолжение) ЧИСТОВИК

Тогда $AB.max$ при $q(q+6)$ - min.

$q^2+6q$ минимально при $q=\frac{-6}{2}=-3$, тогда

$AB=\sqrt{8083-(9-18)}=\sqrt{8092}=2\sqrt{2023}$

Ответ: $2\sqrt{2023}$

№3

$\sin(x+\sin x)\sin(x-\sin x)=\frac{\pi^2}{36}-\frac{9}{36}$

$(\sin x\cdot\cos(\sin x)+\cos x\cdot\sin(\sin x))\cdot(\sin x\cdot\cos(\sin x)-$

$-\sin(\sin x)\cdot\cos x)=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right)$

$\sin x=t$

~~$t\cdot\cos t+\cos\sqrt{1-t}$~~

~~$t^2\cdot\cos^2(t)$~~

$(t\cdot\cos t)^2-(\sqrt{1-t^2}\sin t)^2=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right)$

$t^2\cos^2 t-\sin^2 t+t^2\sin^2 t=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right)$

$t^2-\sin^2 t=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right)$

$(t-\sin t)(t+\sin t)=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right)$

~~$t=\frac{\pi}{6}+2\pi k \Rightarrow \sin x=\frac{\pi}{6}$~~

$t=\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $t=\frac{4\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

$x=\arcsin\frac{\pi}{6}+2\pi k$

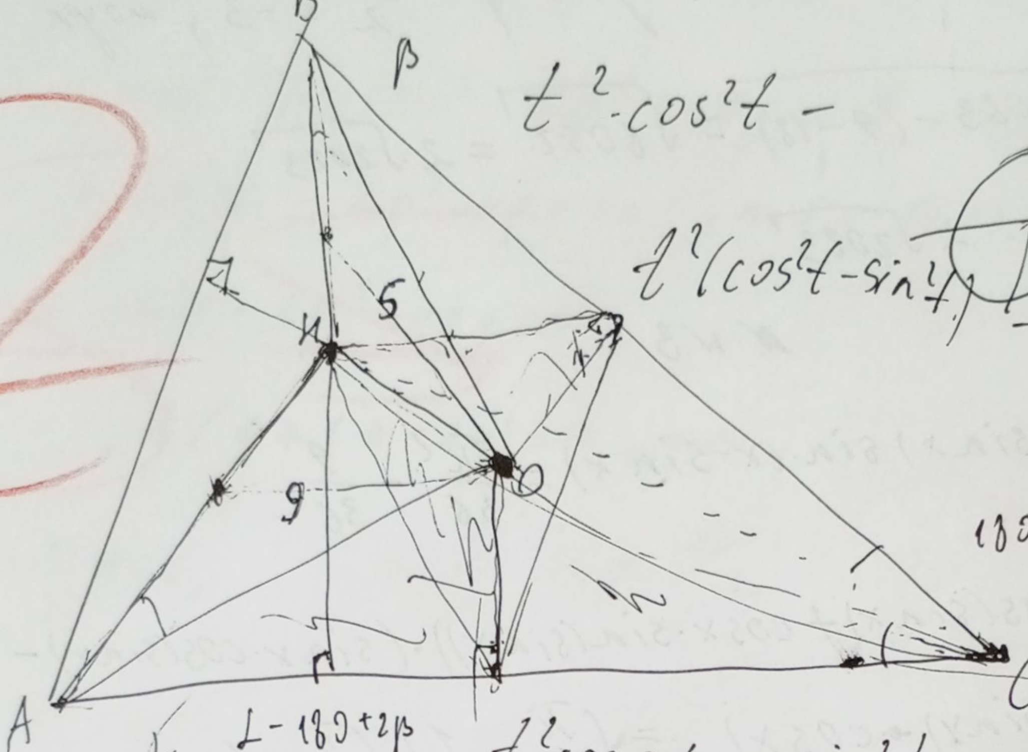
$x=\arcsin\frac{4\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

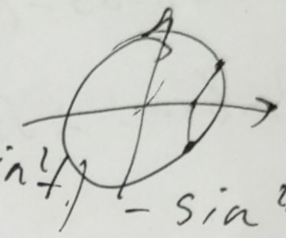
ЧЕРНОВИК.

$t \cdot \cos(t) - \sin(t) \cdot \sqrt{1-t^2}$

$t^2 \cdot \cos^2(t) - \sin^2 t\,(1-t^2)$ $\quad 36 \sin(x+\sin x) \sin(x-\sin x) + 9 - \pi^2$

$t^2 \cdot \cos^2 t -$





$t^2(\cos^2 t - \sin^2 t) - \sin^2 t$

$180 - \beta - \alpha$.

$2\alpha + \beta$.

$2\beta + \alpha$.

$\alpha - 180 + 2\beta$

$t^2 \cos 2t - \sin^2 t$

36 sin $\quad 2\beta + \alpha - 180 \quad 180 - 2\beta + \alpha$

(x+y)

$\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\right)$ $\quad \cancel{x+s}$

$\sin x \cdot \cos y + \sin y \cos x$

$(\sin x \cdot \sin y)$

$\sin x \qquad \sin x = t$

$\sin x^2 -$ $\quad 180 - \alpha - \beta - 180 + 2\alpha \cancel{2\alpha}$ $\quad \alpha - \beta$.

$(\sin x + \sin y)^2 = \sin^2 x + \sin^2 y + 2$

$(2\alpha + \beta - 2\beta - \alpha)$

$\cancel{A}$

$(\sin x \cdot \cos(\sin x) + \sin(\sin x) \cdot \cos(x))$ sin

$\sin x \cdot \cos(\sin x) - \sin(\sin x) \cdot \cos(x))$

$36\left((\sin x \cdot \cos(\sin x))^2 - (\sin(\sin x) \cdot \cos x)^2\right) =$

$= (\pi - 3)(\pi + 3)$ $\quad \cancel{\sin x}$