Выход: 12:43
Вернулся: 12:47

0 612947 700006

61-29-47-70
(159.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10-1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Булатова Тимофея Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«7» апреля 2024 года

Подпись участника

70 (семьдесят)

61-29-47-70
(159.1)

Чистовик

№3

$f(0) = 1 - 3 + 6 = 4$

$f(1) = 1 - 1 + 6 = 6$

$f(2) = 3 - 1 + 6 = 8$

Докажем ММИ по переменной n, что $\forall n \in \mathbb{N}_0: f(n) = 2n+4$

База: $f(0)=4$, $f(1)=6$, $f(2)=8$.

Переход: Пусть для всех чисел от 0 до n мы доказали, что $f(n) = 2n+4$.

Рассмотрим нер-во $f(n+1) \le f(n-2) + 6 = 2(n-2)+4+6 =$
$= 2n - 4 + 4 + 6 = 2n+6$

И $\boxed{f(n+1)} \ge f(n-1) + 4 = 2(n-1) + 4 + 4 = 2n - 2 + 8 = 2n+6$

То есть $f(n+1) \le 2n+6$ и $f(n+1) \ge 2n+6 \Rightarrow f(n+1) = 2n+6 =$
$= 2(n+1)+4 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : f(n) = 2n+4 \Rightarrow f(2024) =$
$= 2 \cdot 2024 + 4 = 4048 + 4 = 4052$

Ответ: 52

№1

Пусть ск-ть ~~первой~~ модели Альфера: v_α (м/с), а Беты: v_β (м/с) и пусть ~~первая~~ Альфера держится в воздухе t секунд, а Бета соответственно $(t+150)$ секунд.

Запишем ур-ие, когда беспилотные аппараты тестируются с встречным ветром:

$(v_\alpha - 3) t - 500 = (v_\beta - 3) \cdot (t+150)$

$v_\alpha t - 3t - 500 = v_\beta t + 150 v_\beta - 3t - 450$

$v_\alpha \cdot t = v_\beta (t+150) + 50$

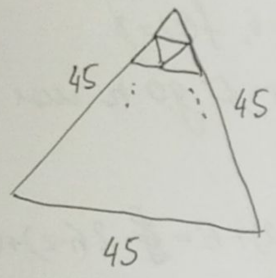
расстояние, которое пролетел [redacted] Альфа при безветренной погоде

расстояние, которое пролетел Бета

~~Черновик~~ Чистовик

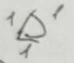
Но т.к. $S_\alpha = S_\beta + 50$, то Альфа пролетел на 50 метров больше, чем Бета.

№2

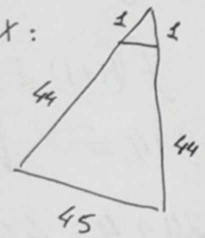


$S_{\text{всего } \Delta\text{-ка}} = \frac{45\cdot 45\cdot \sin 60^\circ}{2} = 2025\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$

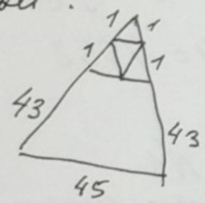
$S_{\text{одного } \Delta\text{-ка}} = \frac{1\cdot 1\cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$



Докажем, что весь треугольник можно покрыть с помощью треугольников со стороной 1. Действительно, сначала поставим один треугольник в самый верх:



Далее поместим 3 тр-ка уже во „второй слой“:



И так далее: всего получится $1+3+5+7+\ldots+(44\cdot 2+1)$ ⊖

т.к. всего 45 слоёв и на слое t: $2t+1$ треугольник (начиная с нуля)

⊖ $1+3+5+7+\ldots+89 = \left(\frac{89+1}{2}\right)^2 = 45^2 = 2025.$

И действительно они полность покрывают весь треугольник, т.к. ~~$2025\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$~~ $\frac{S_{\text{всего } \Delta\text{-ка}}}{S_{\text{одного } \Delta\text{-ка}}} = \frac{2025\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = 2025$

Но тогда получается, что поскольку во всём Δ-ке отметили 2023 точки, то ≥ 2 треугольника ~~буд~~ не будут содержать в себе точек, а значит мы можем

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

61-29-47-70
(159.1)

Чистовик

взять эти 2 треугольника и они ~~будут~~ будут не иметь общих внутренних точек и красных точек внутри себя.

№5

$|2[\lg a]-1|^x = [\lg a]^2+2$

пусть $[\lg a] = n$ $(n\in\mathbb{Z})$

$|2n-1|^x = n^2+2$

Мы хотим найти такие n, чтобы x был рац.

~~Пусть~~ $\underbrace{|2n-1|}_{\in\mathbb{Z}}\geq 0$, $\underbrace{n^2+2}_{\in\mathbb{Z}}>0 \Rightarrow x\geq 0$, пусть $x=\frac{p}{q}$, где $p,q\in\mathbb{N}$ $(p\in\mathbb{N}_0)$

$|2n-1|^{\frac{p}{q}} = n^2+2$

$|2n-1|^p = (n^2+2)^q$

Заметим, что $\forall n\in\mathbb{Z}$: $n^2+2>2n-1$

$n^2-2n+3>0$

$D=4-4\cdot 1\cdot 3<0$ ⊙ $\Rightarrow (n^2+2)^p>|2n-1|^p=(n^2+2)^q$

$p>q$

Пусть $n^2+2=d\cdot n_1$, $2n-1=d\cdot n_2$, где $d=НОД(n^2+2,\ 2n-1)$, а $НОД(n_1,n_2)=1$

$|d\cdot n_2|^p = (d\cdot n_1)^q$

$d^p\cdot|n_2|^p = d^q\cdot n_1^q$

$d^{p-q}\cdot|n_2|^p = n_1^q$

левая часть $\vdots\ n_2 \Rightarrow$ правая тоже, но $(n_1,n_2)=1\Rightarrow$

$\Rightarrow |n_2|=1$, т.е. $n_2=\pm 1 \Rightarrow n^2+2\ \vdots\ (2n-1)$

Пусть $n^2+2=(2n-1)\cdot k$

$n^2+2=2nk-k$

$n^2-2k\cdot n+k+2=0$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик

$D/4 = k^2 - 1\cdot(k+2) = k^2 - k - 2 = (k+1)(k-2)$

$n = k \pm \sqrt{(k+1)(k-2)}$

Т.к. n и $k \in \mathbb{Z}$, то $(k+1)(k-2) = l^2$ $(l \in \mathbb{Z})$

$k^2 - 2k + 1 < k^2 - k - 2 < k^2$ – для $k > 3$

$k^2 - 4k + 4 < k^2 - k - 2 < k^2 - 2k + 1$ для $k > 2$

$n = -1$ и $n = 5$ подходет

Черновик

$f(2024)=?$ $\quad f(x)=|2x-1|-|2x-3|+6$ при $x\in[0;2]$

$3-2x$ $\quad 3-2x$ $\quad 2x-3$

$1-2x$ $\quad 2x-1$ $\quad 2x-1$

$\frac{1}{2}$ $\quad \frac{3}{2}$

$\forall x\in\mathbb{Z}$: $f(x+3)\leq f(x)+6$

$f(x+2)\geq f(x)+4$

$f(0)=4$

$f(1)=6$

$f(2)=8$

$x<\frac{3}{2}$

$2x<3$

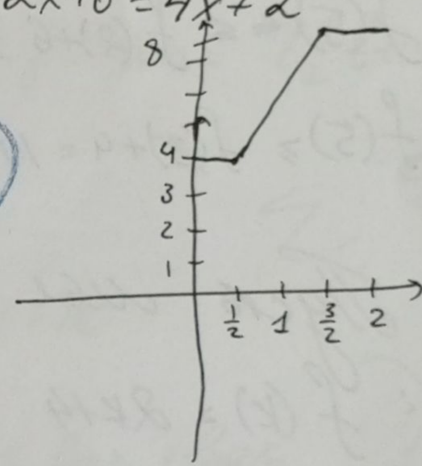
$$\begin{cases} 0\leq x<\frac{1}{2} \\ f(x)=1-2x-(3-2x)+6=1-2x-3+2x+6=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\leq x<\frac{3}{2} \\ f(x)=2x-1-(3-2x)+6=2x-1-3+2x+6=4x+2 \end{cases}$$

$4\cdot\frac{3}{2}+2=$

$=8$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\leq x\leq 2 \\ f(x)=2x-1-2x+3+6=8 \end{cases}$$



$f(x+1)+4\leq f(x+3)\leq f(x)+6$

$f(3)\leq f(0)+6=10$

$f(2)\geq 8$ $\quad f(3)\geq f(1)+4=10$ $\quad \Rightarrow f(3)=10$

$f(x)+6\geq f(x+3)\geq f(x+1)+4$

$f(x)+6\geq f(x+3)$ $\quad f(x)+6\geq f(x+1)+4$ $\quad f(0)\geq f(-2)+4$

$f(x+2)\geq f(x)+4$ $\quad f(x)+2\geq f(x+1)$ $\quad f(1)\geq f(-1)+4$

$<$

$\cancel{f(x)+6}\geq f(x+2)\geq f(x+3)+\cancel{f(x)+4}$ $\quad \boxed{f(x+1)\leq f(x)+2}$

$2+f(x)\geq f(x+1)$

$f(x)+4\leq f(x+2)\leq f(x+1)+6$ $\quad f(x+1)\geq f(x-1)+4$

$f(1)\leq f(0)+2=6$

$f(2)\leq f(1)+2=8$ $\quad f(3)\leq 10$

Черновик

$f(x+3) \le f(x)+6$ $\qquad f(0)=4 \qquad f(k) \overset{?}{=} 2k+4$

$f(x+2) \ge f(x)+4$ $\qquad f(1)=6$

$f(2)=8$

$f(3)=10$

$f(k+3)=2k+10$ ✓ $\qquad f(x+1) \le f(x)+2$

$f(k)+6=2k+10$ $\qquad f(3) \le f(0)+6=10$

$f(k+2)=2k+8$ ✓ $\qquad f(3) \ge f(1)+4=10 \Rightarrow f(3)=10$

$f(k)+4=2k+8$

$f(4) \le f(1)+6 = 12$

$f(4) \ge f(2)+4=12 \Rightarrow f(4)=12$

$f(5) \le f(2)+6=14$

$f(5) \ge f(3)+4=14 \Rightarrow f(5)=14$

Пусть мы знаем, что для всех $n \le k$:

$f(k)=2k+4$

База: $f(0)=4$, $f(1)=6$, $f(2)=8$

$f(n+1) \le f(n-2)+6 = 2(n-2)+4+6 = 2n+6$

$f(n+1) \ge f(n-1)+4 = 2(n-1)+4+4 = 2n+6 \Rightarrow$

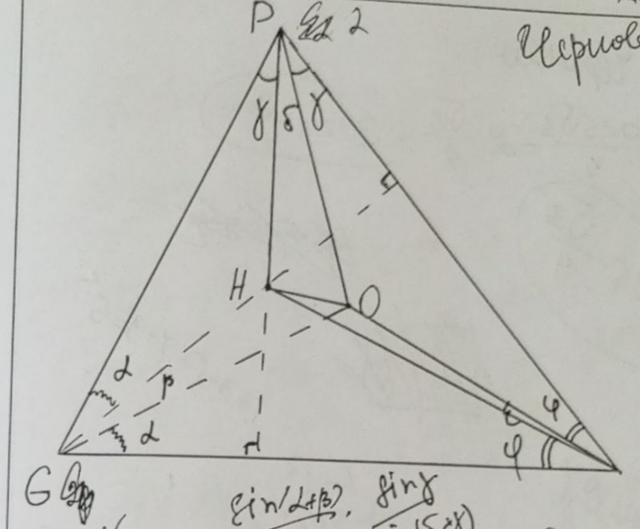
$\Rightarrow f(n+1)=2n+6$ ✓

№1

v_1 (м/с) $\qquad \alpha: \xrightarrow{v_1} \quad \xleftarrow{3 м/с} \quad t$ сек

v_2 (м/с) $\qquad \beta: \quad (t+150)$ сек

$(v_1-3)\cdot t - 500 = (v_2-3)(t+150)$



Черновик

$S_{OHP}=5$

$S_{OHV}=3$

$S_{OPV}=\frac{R\cdot R\cdot \sin\gamma}{2}=\frac{R^2\sin 2\gamma}{2}$

$S_{GOV}=\frac{R^2\sin 2\alpha}{2}$

$S_{GOP}=\frac{R^2\sin 2\beta}{2}$

$\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin(\delta+\gamma)}$

№1

$v_1 t - 3t - 500 = v_2 t + 150 v_2 - 3t - 450$

$v_1 t = v_2 t + 150 v_2 + 50 \qquad (v_1-3)t-500 = v_2(t+150)$

$v_1 t = v_2(t+150)+50$

№5

$|2[tg\, a]-1|^x = [tg\, a]^2+2 \qquad [tg\, a]=n$

$|2n-1|^x = n^2+2$

$x = \log_{|2n-1|}(n^2+2) =$

$\frac{p}{q} = \log_{|2n-1|}(n^2+2) \qquad (n^2+2)^q = |2n-1|^p$

$p = \log_{|2n-1|}((n^2+2)^q)$

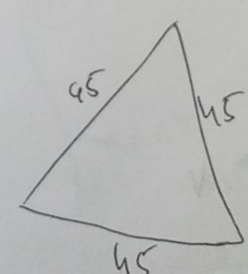
$15^2\cdot 3^2 = 9\cdot 225 =$

$=200\cdot 9+25\cdot 9=$

$q \ne 0$

$45^2=2025$

$\frac{45^2\sin 60^\circ}{2}=\frac{45^2\cdot\frac{\sqrt3}{2}}{2}=\frac{45^2\sqrt3}{4}=\frac{2025\cdot\sqrt3}{4}$



$\frac{1^2\cdot\sin 60^\circ}{2}=\frac{\sqrt3}{4}$

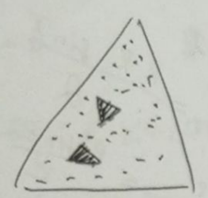
$S_{1,2}=\frac{\sqrt3}{4}$

$\frac{2025\cdot\frac{\sqrt3}{4}}{2\cdot\frac{\sqrt3}{4}} \approx 1012$ треуг.

Черновик

$\frac{2025\sqrt{3}}{4} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = 2023\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$

$2025\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$



~~Sр площадь~~

$1+3+5+7+9=5^2$

$1=1^2$

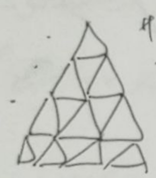
$1+3=2^2$

$1+3+5=3^2$

$1+3+5+7=4^2$

$1+3+\ldots+n=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

$1+3+5+\ldots+45$



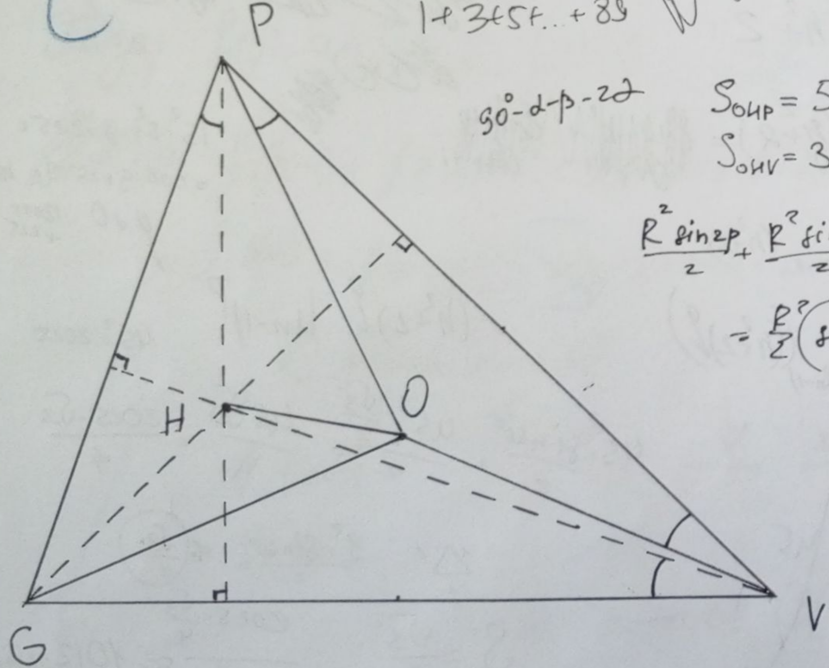
$1+3+\ldots+n$

$1+\ldots+2k+1=(k+1)^2$

$1+3+\ldots+45=23^2$

89

$1+3+5+\ldots+89$



$90^\circ-\alpha-\beta-2\gamma$

$S_{OHP}=5$

$S_{OHV}=3$

$\frac{R^2\sin 2p}{2}+\frac{R^2\sin 2v}{2}+\frac{R^2\sin 2g}{2}=$

$=\frac{R^2}{2}(\sin 2p+\sin 2v+\sin 2g)$

Черновик

$(2[tg a]-1)^x=[tg a]^2+2$

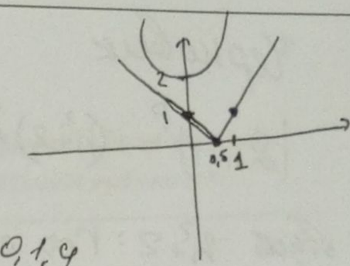
$[tg a]=n$

$n\in\mathbb{Z}$

$(2n-1)^x=n^2+2$

$x=\frac{p}{q}$ $\quad (2n-1)^p=(n^2+2)^q$

$x=\log_{2n-1}(n^2+2)$



x	x^2
0	0
1	1
2	4
3	4
4	1

0, 1, 4

2, 3, 1 mod 5

1, 2, 3

$q\neq 0$

$2n-1=n^2+2$

$n^2-2n+3=0$

$D/4=1-1\cdot 3<0$

n-нечёт

$[tg a]=5$ $\quad |2n-1|^p=2^q$

$5\le tg a<6$

$n=-1$

$3^p=3^q$

$x=1$, 3, $\varnothing$

$n=-3$

$7^p=11^q$ $\quad 3^p=6^q$

$3^p=2^q\cdot 3^q$

$3^{p-q}=2^q$

$n=3$

$5^p=11^q$

$n^2+2=d\cdot\alpha$

$2n-1=d\cdot\beta$

$n=5$

$9^p=27^q$

$3^{2p}=3^{3q}$ $\quad 9^3=27^2$

$2p=3q$

$p=3$, $q=2$

$n=-5$

$11^p=27^q$

$n=-7$

$15^p=51^q$

$(d\beta)^p=(d\alpha)^q$

$n=7$

$13^p=51^q$ $\varnothing$ $\quad d^p\cdot\beta^p=d^q\cdot\alpha^q$

$d^{p-q}\beta^p=\alpha^q$

$n=9$

$17^p=83^q$

$n^2+2>2n-1$

$n^2-2n+3>0$

n^2+2

$n=13$

$25^p=171^q$

$\beta^p=1$

$n=11$

$21^p=123^q$

$n=15$

$29^p=227^q$

$n=17$

33^p

$\beta=1$

$n^2+2=d\cdot\alpha$

$2n-1=d$

$n^2+2=(2n-1)\cdot\alpha$

$d^{p-q}=\alpha^q$

$29\cdot 8=232$

$29\cdot 7=203$

Черновик

$|2n-1|^p = (n^2+2)^q$

Пусть $n^2+2 \vdots r \Rightarrow$ п.ч. $\vdots r^q$, если $(2n-1) \vdots r$, то $|2n-1|^p \vdots r^q$

$2n-1 \vdots r$

НОД $(n^2+2, 2n-1) = d$

$n^2+2 = d \cdot k$

$2n-1 = d \cdot t$

$|dt|^p = (dk)^q$ $t^2+2t+1 < t^2+3t < t^2+4t+4$

$d^p \cdot |t|^p = d^q \cdot k^q$ $t^2 < k^2 - k - 2 < t^2+2t+1$

$d^{p-q} \cdot |t|^p = k^q$

$|t| = 1$

$n^2+2 = (2n-1)k$

$\left[\begin{array}{l} 2n-1=d \\ 2n-1=-d \end{array}\right.$

$|2n-1|^p = ((2n-1) \cdot k)^q$

$|2n-1|^p = (2n-1)^q \cdot k^q$

$(2n-1)^{p-q} = \left(\frac{n^2+2}{2n-1}\right)^q$

если $n > \frac{1}{2}$

$(2n-1)^{p-q} = k^q$

$(2n-1)^{\frac{p}{q}} = (n^2+2)$

c^2

$3t = c^2 - t^2$

$t(t+3) = c^2$

$t^2+3t = c^2$

$1-2n = d$ $n^2+2 = (1-2n)k$

$n^2+2 = k(2n-1)$

$n = \frac{k \pm \sqrt{(k+1)(k-2)}}{1}$

$n^2+2-2nk+k=0$

$n^2-2k \cdot n+k+2=0$

$D/4 = k^2-1(k+2) =$

$= k^2-k-2 = (k+1)(k-2)$