0409769820001

40-97-69-82
(179.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10-1

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Мышко Марии Петровны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата «7» апреля 2024 года

Подпись участника

 80 (восемьдесят)

Чистовик.

Задача №1.

Скорость Альфы = v, время нахождения Альфы в воздухе = t. ~~+150~~

Скорость Беты = u, время нахождения Беты в воздухе = t+150.

$(v-3)t = (u-3)(t+150)+500$ − по условию.

$(v-3)t = u(t+150) - 3t - 450 + 500$

$vt - 3t = u(t+150) - 3t + 50.$ $\Rightarrow$ $vt - u(t+150) = 50.$

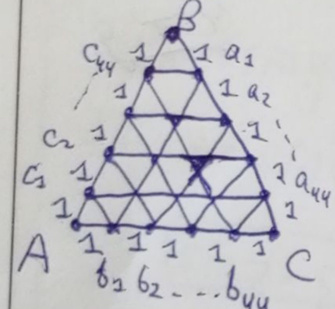
Заметим, что $(vt - u(t+150))$ − разница между пройденными в безветренную погоду бпла расстояниями (насколько Альфа пролетела больше). Эта разница положительна. $\Rightarrow$

Ответ: Альфа, на 50 м.

(ед. измерения не записывались для удобства чтения; u, v − м/с ; t − с).

Задача №2.

Ответ: можно.



Док-во: Поделим синими точками каждую сторону тр-ка (на одной стороне 44 точки, кот. разбивают сторону на 45 отрезков длины 1). b_i назовём точку T: $AT=i$ (и T лежит на AC), c_i: $AT=i$ (и T лежит на AB), a_i: $BT=i$ (и T лежит на BC). Проведём отрезки c_ib_i, a_ib_i и c_ia_{45-i} (для $\forall i$). Заметим, что тр-к разбился на 2025 (в первом (верхнем) ряду − 1, во втором − 3, ..., в i-м − $(2i-1)$. $\Rightarrow$ всего $= 1+3+\ldots+(2\cdot 45-1) = \frac{(1+89)\cdot 45}{2} = 45^2 = 2025$) тр-ков, подобных $\triangle ABC$ (т.к. их стороны $\parallel$ сторонам $\triangle ABC$) (значит, тоже правильных), со стороной 1. Отмечено 2023 красных точек. $\Rightarrow$ Хотя бы в $2025-2023 = 2$ тр-ках (маленьких) нет красной точки.

ч.т.д.

Чистовик.

Задача №3.

$f(x) = |2x-1| - |2x-3| + 6$ при $x \in [0;2]$.

$\Rightarrow f(0) = 4,\ f(1) = 6,\ f(2) = 8.$

$\begin{cases} f(x+3) \le f(x)+6 \\ f(x+2) \ge f(x)+4 \end{cases}$ при $x \in \mathbb{Z}$. $\Rightarrow \begin{cases} f(x) \le f(x-3)+6 \\ f(x) \ge f(x-2)+4 \end{cases}$ при $x \in \mathbb{Z}$.

Утв. $f(x) = 2x+4$ при $x \in (\mathbb{Z}_+ \cup \{0\})$. $(\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+)$.

Докажем это утверждение по индукции:

База: $f(0) = 2\cdot 0 + 4 = 4$, $f(1) = 2\cdot 1 + 4 = 6$, $f(2) = 2\cdot 2 + 4 = 8$.

Переход: Пусть для $\forall x \le k-1$ ($x \in (\mathbb{Z}_+ \cup \{0\})$, $k \in \mathbb{Z}_+$), $(k \ge 3)$.
Тогда $f(k) = 2k+4$ (хотим). Проверим это:

$f(k) \le f(k-3)+6 = (2(k-3)+4)+6 = 2k+4.$

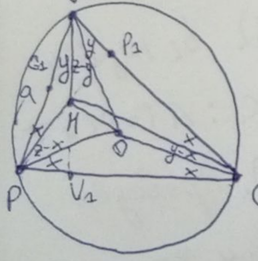
$f(k) \ge f(k-2)+4 = (2(k-2)+4)+4 = 2k+4.$ $\Rightarrow f(k) = 2k+4.$

ч.т.д.

$\Rightarrow f(2024) = 2\cdot 2024 + 4 = 4052.$

Ответ: 4052.

Задача №4.



Дано: остроуг. ΔPVG, H – т. пересечение высот тр-ка, O – центр опис. окр-ти тр-ка, $S_{\Delta OHP} = 5$, $S_{\Delta OHV} = 3$.

Найти: $S_{\Delta OHG}$.

Решение: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC$.

Заметим, что $OP = OV = OG = r$ (радиусы опис. окр-ти). Пусть $PV = a$,
$\angle OGP = \angle OPG = x$ (равны, т.к. ΔPOG равнобедренный), $\angle GVO = \angle VGO = y$ (аналог.),
$\angle OVP = \angle OPV = z$ (аналог.). Пусть PP_1, VV_1 и GG_1 – высоты (точки
P_1, V_1 и G_1 лежат на сторонах ΔPVG). $\Rightarrow \angle HPG = 180° - \angle PP_1G -$
$- \angle VGP = 180° - 90° - (\angle VGO + \angle OGP) = 90° - x - y = z.$ см. продолжение →

40-97-69-82
(179.1)

Чистовик.

Задача №4 (продолжение).

Аналогично $\angle GVH = 90° - x - y = z$, $\angle VGH = 90° - z - y = x$ (заметим, что $180° = \angle PVG + \angle VGP + \angle GPV = (z+y) + (y+x) + (x+z) = 2x+2y+2z$. $\Rightarrow$ $90° = x+y+z$). $\Rightarrow \angle HPO = \angle HPG - \angle OPG = z - x$, $\angle HGO = \angle VGP - \angle VGH - \angle OGP = y - x$, $\angle HVO = \angle HVG - \angle GVO = z - y$. $\Rightarrow \angle VPH = \angle VPG - \angle OPH - \angle OPG = x$, $\angle PHV = \angle PVG - \angle HVO - \angle OVG = y$, $\angle HGP = \angle VGP - \angle VGH - \angle HGO = x$. $\Rightarrow$ По т. sin $PH = \frac{PV}{\sin(x+y)} \cdot \sin y = \frac{a \sin y}{\sin(x+y)}$ (для ΔPVH), $VH = \frac{PV}{\sin(x+y)} \cdot \sin x = \frac{a \cdot \sin x}{\sin(x+y)}$ (для ΔPHV).

$GH = \frac{VH}{\sin x} \cdot \sin z = \frac{a \cdot \sin z}{\sin(x+y)}$ (для ΔVHG).

$S_{\Delta OHP} = \frac{1}{2} PH \cdot PO \cdot \sin\angle HPO = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot \sin y}{\sin(x+y)} \cdot r \cdot \sin(z-x) = 5.$

$S_{\Delta OHV} = \frac{1}{2} VH \cdot VO \cdot \sin\angle HVO = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot \sin x}{\sin(x+y)} \cdot r \cdot \sin(z-y) = 3.$

$\Rightarrow \frac{\sin y \cdot \sin(z-x)}{\sin x \cdot \sin(z-y)} = \frac{5}{3}.$

$3\sin y \cdot (\sin z \cdot \cos x - \cos z \cdot \sin x) = 5 \sin x \cdot (\sin z \cdot \cos y - \cos z \cdot \sin y)$

$3\sin y \cdot \sin z \cdot \cos x - 3\sin y \cdot \cos z \cdot \sin x = 5 \sin x \cdot \sin z \cdot \cos y - 5 \sin x \cdot \cos z \cdot \sin y$

$3\sin y \cdot \sin z \cdot \cos x - 3\sin z \cdot \cos y \cdot \sin x = 2\sin x \cdot \sin z \cdot \cos y - 2\sin x \cdot \cos z \cdot \sin y$

$3\sin z \cdot (\sin y \cdot \cos x - \cos y \cdot \sin x) = 2\sin x \cdot \sin z \cdot \cos y - 2\sin x \cdot \cos z \cdot \sin y$

$3\sin z \cdot \sin(y-x) = 2\sin x \cdot (\sin z \cdot \cos y - \cos z \cdot \sin y)$

$\Rightarrow \boxed{\sin z \cdot \sin(y-x) = \frac{2}{3} \sin x \cdot \sin(z-y)}.$

$S_{\Delta OHG} = \frac{1}{2} OG \cdot GH \cdot \sin\angle OGH = \frac{1}{2} r \cdot \frac{a \cdot \sin z}{\sin(x+y)} \cdot \sin(y-x) =$
$= \frac{1}{2} r \cdot \frac{a}{\sin(x+y)} \cdot \frac{2}{3} \sin x \cdot \sin(z-y) = \Big(\underbrace{\frac{1}{2} \frac{a \cdot \sin x}{\sin(x+y)} \cdot r \cdot \sin(z-y)}_{S_{\Delta OHV}}\Big) \cdot \frac{2}{3} = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2.$

Ответ: 2.

Задача №5. Чистовик.

Пусть $[tg\, a] = c$. $(c \in \mathbb{Z})$.

$|2[tg\, a] - 1|^x = [tg\, a]^2 + 2$.

Т.е. $|2c-1|^x = c^2+2$. x − рациональное. $\Rightarrow x = \frac{a}{b}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$ и $b \neq 0$ $(b>0)$.

$\Rightarrow |2c-1|^{\frac{a}{b}} = c^2+2$. $\Rightarrow |2c-1|^a = (c^2+2)^b$.

Заметим, что $c^2+2 > 1$. $\Rightarrow (c^2+2)^b > 1$. $\Rightarrow |2c-1|^a > 1$. $\Rightarrow$

$\exists p \in P : |2c-1|^a \vdots p$. Заметим, что $|2c-1| > 1$ (т.к. $c \in \mathbb{Z}$).

$\Rightarrow a > 0$ (иначе $|2c-1|^a = \frac{1}{|2c-1|^{-a}} < 1$). $\Rightarrow |2c-1| \vdots p$.

$\Rightarrow 2c \overset{p}{\equiv} 1$. $\Rightarrow c \overset{p}{\not\equiv} 0$. При этом $(c^2+2)^b \vdots p$ (т.к. $|2c-1|^a \vdots p$).

$\Rightarrow (c^2+2) \vdots p$. $\Rightarrow c^2 \overset{p}{\equiv} -2$. $\Rightarrow -2\cdot(2c) \overset{p}{\equiv} c^2(\overset{p}{\equiv} -2)$. $\Rightarrow c \overset{p}{\equiv} -4$ (можем сократить на c, т.к. $(c, p) = 1$ (т.к. $c \overset{p}{\not\equiv} 0$)). $\Rightarrow 1 \overset{p}{\equiv} 2c \overset{p}{\equiv} 2\cdot(-4) \overset{p}{\equiv} -8$.

$\Rightarrow 9 \overset{p}{\equiv} 0$. $\Rightarrow 9 \vdots p$. $\Rightarrow p = 3$. $\Rightarrow |2c-1| = 3^s$, а $(c^2+2) = 3^t$.

Заметим, что $c \not\vdots 2$ (иначе $|2c-1| \not\vdots 2$ и $(c^2+2) \vdots 2$. $\Rightarrow |2c-1|^a \not\vdots 2$, а $(c^2+2)^b \vdots 2$, но они равны, противоречие).

1) $|2c-1| = 2c-1$.

$\Rightarrow c \geq 1$.

$2c-1 = 3^s \Rightarrow 2c = 3^s+1 \Rightarrow c = \frac{3^s+1}{2}$.

$c^2 = 3^t - 2 = \left(\frac{3^s+1}{2}\right)^2 = \frac{3^{2s}+2\cdot3^s+1}{4}$.

$\Rightarrow 4\cdot3^t - 8 = 3^{2s}+2\cdot3^s+1 \Rightarrow 4\cdot3^t - 3^{2s} - 2\cdot3^s = 9$.

Заметим, что $c=1$ не подходит (т.к. $|2\cdot1-1| = 1$, а не >1).

При этом $c \neq 2$ (т.к. $c \not\vdots 2$). $\Rightarrow c \geq 3$.

$\Rightarrow c^2 \geq 2c\cdot\frac{3}{2} = (3^s+1)\cdot\frac{3}{2} > 3^s - 2$. $\Rightarrow t \geq s$.

Если $s \geq 3$, то $t \geq 3$ и $(4\cdot3^t - 3^{2s} - 2\cdot3^s) \vdots 27$ (т.к. каждое слагаемое $\vdots 27$), а $9 \not\vdots 27$. (см. продолжение)

40-97-69-82 (179.1)

Задача №5 (продолжение). Чистовик.

Противоречие. $\Rightarrow s \leq 2$, при этом $s \geq 0$ (т.к. $c \in \mathbb{Z}$).

$c = \frac{3^0+1}{2} = 1$ − нет $(s=0)$.

$c = \frac{3^1+1}{2} = 2$ − нет $(s=1)$.

$c = \frac{3^2+1}{2} = 5$ − да $(|2\cdot5-1|^{\frac{3}{2}} = 5^2+2)$ (т.е. $x = \frac{3}{2}$).

2) $|2c-1| = 1-2c$.

$\Rightarrow c \leq 0$.

$1-2c = 3^s$. $\Rightarrow c = \frac{1-3^s}{2}$.

$c^2 = 3^t - 2 = \left(\frac{1-3^s}{2}\right)^2 = \frac{1+3^{2s}-2\cdot3^s}{4}$

$\Rightarrow 4\cdot3^t - 3^{2s} + 2\cdot3^s = 9$.

$c = -1$ − подходит $(|2\cdot(-1)-1|^1 = (-1)^2+2)$ (т.е. $x=1$).

$c = -2$ − нет (т.к. $c \not\vdots 2$).

$\Rightarrow$ Рассмотрим $c \leq -3$.

$\Rightarrow c^2 \geq (-3)\cdot c = \frac{(-3)(1-3^s)}{2} = \frac{3}{2}(3^s-1) > 3^s - 2$. $\Rightarrow t \geq s$.

Если $s \geq 3$, то $t \geq 3$ и $(4\cdot3^t - 3^{2s} + 2\cdot3^s) \vdots 27$ (т.к. каждое слагаемое $\vdots \overset{3^3}{27}$), а $9 \not\vdots 27$. Противоречие. $\Rightarrow s \leq 2$

При этом $s \geq 0$ (т.к. $c \in \mathbb{Z}$).

$c = \frac{1-3^0}{2} = 0$ − нет $(s=0)$. (т.к. $c \not\vdots 2$).

$c = \frac{1-3^1}{2} = -1$ − да, но уже рассмотрели $(s=1)$.

$c = \frac{1-3^2}{2} = -4$ − нет $(s=2)$ (т.к. $c \not\vdots 2$).

$\Rightarrow$ Итог: $c = -1$ или $c = 5$.

$\Rightarrow \boxed{a = arctg(x) + \pi k, \text{ где } x \in [-1; 0) \cup [5; 6)), \text{ а } k \in \mathbb{Z}}$ ← ответ.

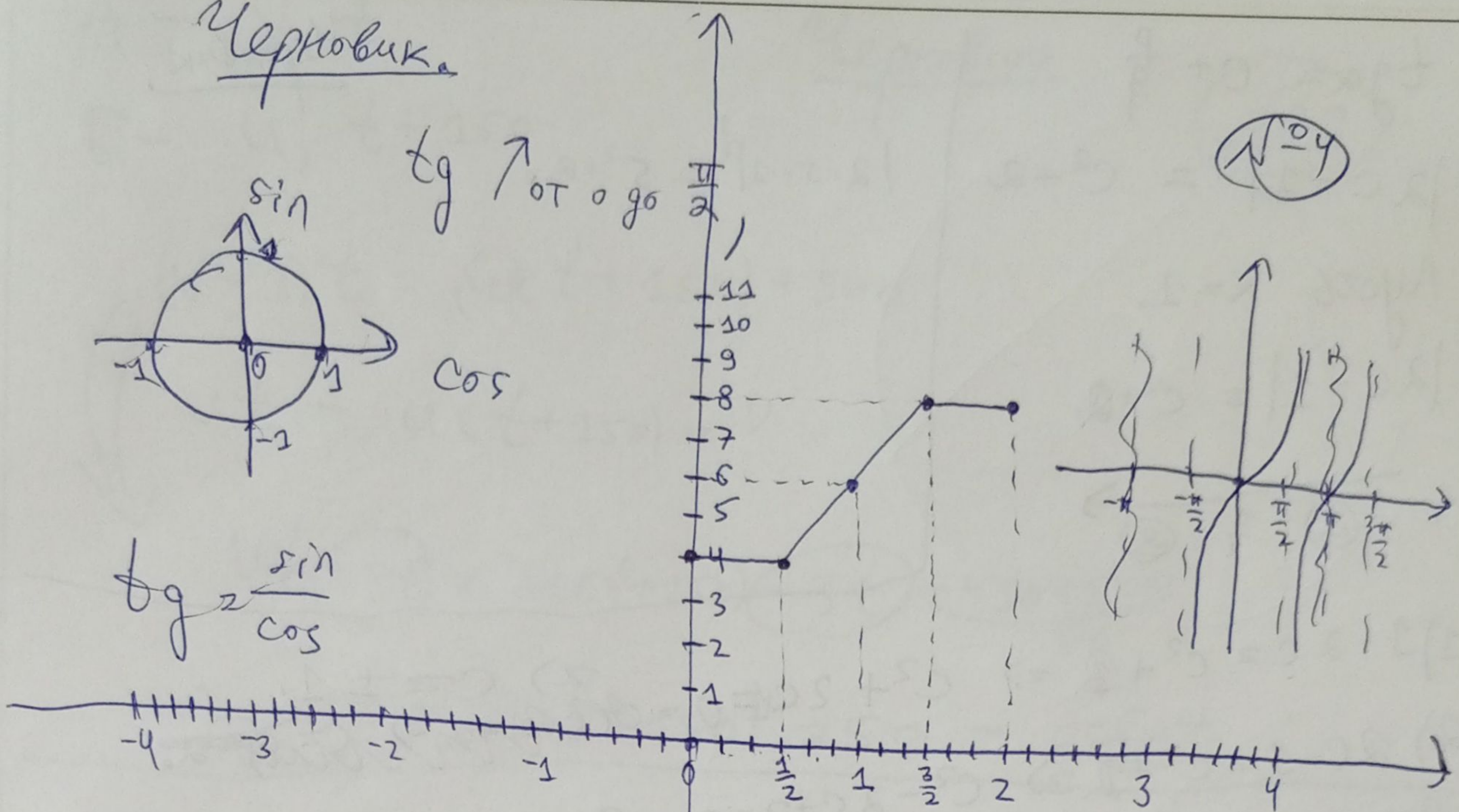
$(+\pi k$, т.к. tg π-периодичен. Для $x \in [-1; 0)$ $[x] = -1$, а для $x \in [5; 6)$ $[x] = 5)$.

Черновик.

tg ↑ от 0 до $\frac{\pi}{2}$

№4

$tg = \frac{sin}{cos}$



$$\frac{-3(1-3^s)}{2} \overset{?}{\geq} 3^s-2$$

$$-3+3^{s+1} \overset{?}{\geq} 2\cdot 3^s-4$$

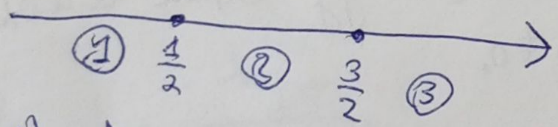
$$3^s \overset{?}{\geq} -1$$

$$\frac{3^{s+1}}{2}+\frac{3}{2} \overset{?}{\geq} 3^s-2$$

$$3^{s+1}+3 \overset{?}{\geq} 2\cdot 3^s-4$$

$$3^s \overset{?}{\geq} -7.$$

$f(x)=|2x-1|-|2x-3|+6$ при $x\in[0;2]$



1) $f(x)=(1-2x)-(3-2x)+6=4$

2) $f(x)=(2x-1)-(3-2x)+6=4x+2$

3) $f(x)=(2x-1)-(2x-3)+6=8$

$\begin{cases} f(x+3)\leq f(x)+6 \\ f(x+2)\geq f(x)+4 \end{cases}$ при $x\in\mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{r} 2024 \\ \times\quad 2 \\ \hline 4048 \\ +\quad 4 \\ \hline 4052 \end{array}$$

$f(3)\leq f(0)+6=10$, $f(3)\geq f(1)+4=10.$ => $f(3)=10.$

$f(4)\leq f(1)+6=12$, $f(4)\geq f(2)+4=12.$ => $f(4)=12$

$f(5)\leq f(2)+6=8+6=14$, $f(5)\geq f(3)+4=14.$ => $f(5)=14.$

Мысль: $f(x)=2x+4$. (0, 1, 2 — подходят)

$f(x)\leq f(x-3)+6=2(x-3)+4+6=2x+4$

$f(x)\geq f(x-2)+4=2(x-2)+4+4=2x+4$ — да.

Черновик.

$tg\,a = c + \frac{p}{q}$

$|2c-1|^x = c^2+2$

Пусть $x=1$.

$|2c-1| = c^2+2$.

① $\frac{1}{2}$ ②

$|2\cdot 5-1|^{\frac{3}{2}} = 5^2+2$.

1) $1-2c = c^2+2 \Rightarrow c^2+2c+1=0$, $\Rightarrow c = \pm 1$.

2) $2c-1 = c^2+2 \Rightarrow c^2-2c+3=0$. $D = 4-3\cdot 4 < 0$ – нет.

Пусть $x=2$

$|2c-1|^2 = c^2+2$.

$(2c-1)^2 = c^2+2$.

$4c^2-4c+1 = c^2+2$, $\Rightarrow 3c^2-4c-1=0$. $D = 16+12 = 28$. – не.

$|2c-1|^{\frac{a}{b}} = c^2+2$; $a, b \in \mathbb{Z}$ (ищу такие a и b). $b \neq 0$.

$|2c-1|^a = (c^2+2)^b$

$\Rightarrow$ $c \overset{3}{\equiv} 1$ или $c \overset{2}{\equiv} 1$, $c \overset{3}{\not\equiv} 1$

Пусть $c \overset{p}{\equiv} \frac{1}{2}$, $\Rightarrow (c^2+2) \vdots p$. $\Rightarrow$ $c^2 \overset{p}{\equiv} -2$.

-2 – кв. по mod 3, 11, и т.д.

$c^2 \overset{p}{\equiv} -2$

$2c \overset{p}{\equiv} 1 \Rightarrow c^2 \overset{p}{\equiv} -4c$

$\Rightarrow c \overset{p}{\equiv} -4 \Rightarrow -8 \overset{p}{\equiv} 1 \Rightarrow p = 3$.

$s=1 \Rightarrow 2c = 3^1+1 = 4$, $\Rightarrow c=2$ – нет.

$s=2 \Rightarrow 2c = 3^2+1 = 10$, $\Rightarrow c=5$.

$25 = 3^3-2$. – имба

$\Rightarrow 2c = 3^s+1$. $\Rightarrow c \overset{3}{\equiv} 2$. очев $s < t$.

$c^2 = 3^t-2$.

$\Rightarrow s \leq 2$.

$\left(\frac{3^s+1}{2}\right)^2 = 3^t-2$

$3^2 \overset{4}{\equiv} 3$ $\quad 3^2 \overset{4}{\equiv} 1$

$3^{2s}+2\cdot 3^s+1 = 4\cdot 3^t-8$ $\Rightarrow 3^{2s}+2\cdot 3^s-4\cdot 3^t = -9$

Черновик.

№1

А – v, t

Б – u, $t+150$

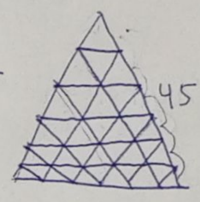
$(v-3)t = (u-3)(t+150)+500$

$vt - u(t+150) = ?$

$vt - 3t = u(t+150) - 3t - 450 + 500$

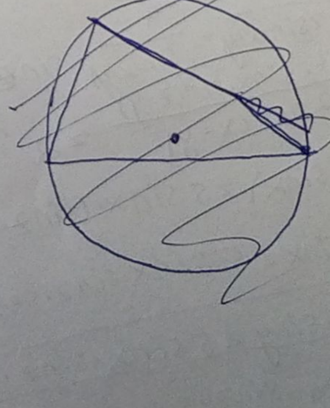
$\Rightarrow vt - u(t+150) = 50$ – ответ

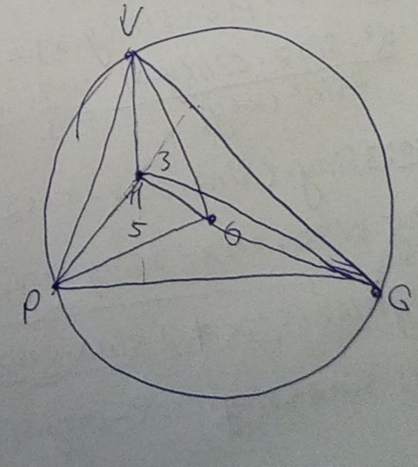
№2



$1+3+5+7+\ldots+(44\cdot 2+1) = 1+3+\ldots+89 = \frac{90\cdot 45}{2} = 45^2$

$45 \times 45 = 225 + 180 = 2025$ – имба. Ответ: можно.





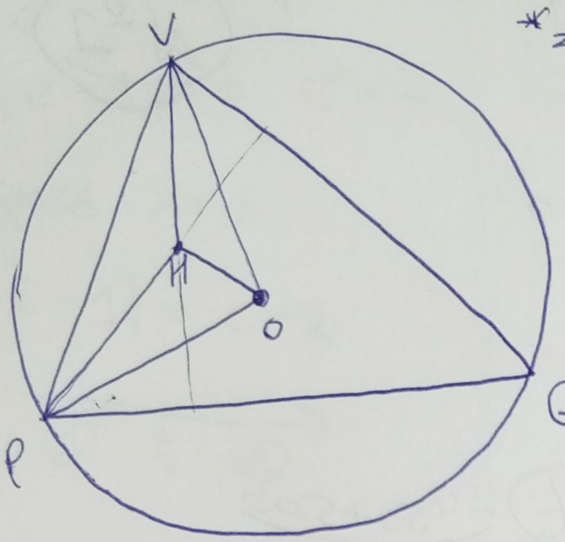
Черновик.

$* \Rightarrow 3\sin z\,(\sin y\cdot\cos x - \cos y\cdot\sin x) =$

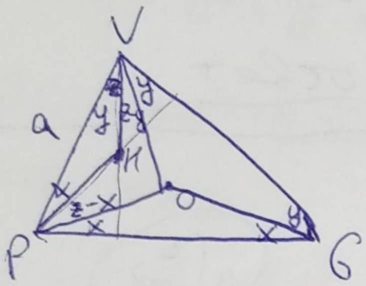
$= 2(\sin x\cdot\sin z\cdot\cos y - \sin x\cdot\cos z\cdot\sin y) =$

$= 2\sin x\,(\sin z\cdot\cos y - \cos z\cdot\sin y) =$

$= 2\sin x\cdot\sin(z-y)$



№ 4

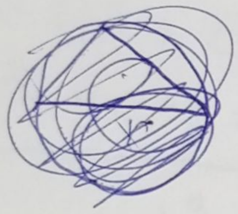


$x+y+z=90^\circ$

$r = \dfrac{a}{2\sin(x+y)}$

$PH = \dfrac{a}{\sin(x+y)}\cdot\sin y$

$VH = \dfrac{a}{\sin(x+y)}\cdot\sin x$



$S_{\triangle OHP} = r\cdot PH\cdot\sin(z-x) = \dfrac{a}{2\sin(x+y)}\cdot\dfrac{a}{\sin(x+y)}\cdot\sin(z-x)\cdot\sin y =$

$= \dfrac{a^2\cdot\sin y\cdot\sin(z-x)}{2\sin^2(x+y)} = 5$

$S_{\triangle OHV} = r\cdot VH\cdot\sin(z-y) = \dfrac{a}{2\sin(x+y)}\cdot\dfrac{a}{\sin(x+y)}\cdot\sin x\cdot\sin(z-y) =$

$= \dfrac{a^2\cdot\sin x\cdot\sin(z-y)}{2\sin^2(x+y)} = 3$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{\sin y\cdot\sin(z-x)}{\sin x\cdot\sin(z-y)} = \dfrac{5}{3}}$

$HG = \dfrac{VH}{\sin x}\cdot\sin z = \dfrac{a}{\sin(x+y)}\cdot\sin z$

$S_{\triangle OHG} = r\cdot HG\cdot\sin(y-x) = \dfrac{a}{2\sin(x+y)}\cdot\dfrac{a}{\sin(x+y)}\cdot\sin z\cdot\sin(y-x) =$

$= \dfrac{a^2\cdot\sin z\cdot\sin(y-x)}{2\sin^2(x+y)} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a^2\cdot\sin x\cdot\sin(z-y)}{2\sin^2(x+y)} = 2$ — ответ — имба

Знаю: $3\sin y\cdot(\sin z\cdot\cos x - \cos z\cdot\sin x) = 5\sin x\cdot(\sin z\cdot\cos y - \cos z\cdot\sin y)$

$3\sin y\cdot\sin z\cdot\cos x - 3\sin y\cdot\cos z\cdot\sin x = 5\sin x\cdot\sin z\cdot\cos y - 5\sin x\cdot\cos z\cdot\sin y$

$\boxed{3\sin y\cdot\sin z\cdot\cos x + 2\sin x\cdot\cos z\cdot\sin y = 5\sin x\cdot\sin z\cdot\cos y}$ *

Хочу: $\sin z(\sin y\cdot\cos x - \cos y\cdot\sin x) = \sin z\cdot\sin y\cdot\cos x - \sin z\cdot\cos y\cdot\sin x$