0 179122 880002

17-91-22-88
(180.1)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______________________

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Ерёмина Артёма Евгеньевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«07» апреля 2024 года

Подпись участника

Шифр работы: 17-91-22-88 М

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Σ прописью
Оценка	15	15	15	Ø	5	15			65	65 (шестьдесят пять)

65 (шестьдесят пять)

Золот

17-91-22-88 (180.1)

Чистовик

№1

Пусть Маша составит n одинаковых букетов, в каждом из которых x хризантем, t тюльпанов и r роз. Тогда общее количество ~~их~~ хризантем xn, тюльпанов — tn, роз — rn. Имеем:

$$\begin{cases} xn = 156 = 12\cdot 13 = 2^2\cdot 3\cdot 13 = 78\cdot 2 \\ tn = 312 = 12\cdot 26 = 2^3\cdot 3\cdot 13 = 78\cdot 4 \\ rn = 390 = 13\cdot 30 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 13 = 78\cdot 5 \end{cases}$$

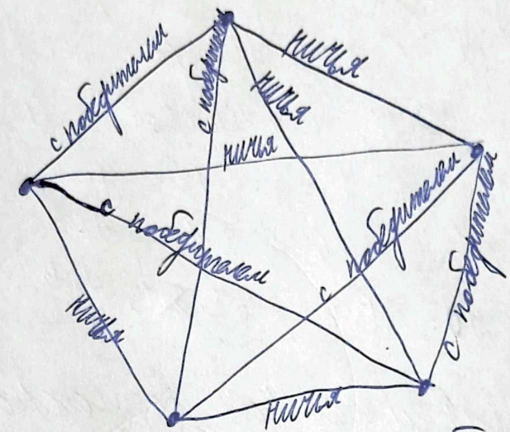
Тогда максимальное возможное значение n равно $НОД(156; 312; 390) = 2\cdot 3\cdot 13 = 78$, т.к. числа 390, 312 и 156 должны делиться на n (т.к. $390 \vdots n$, $n \vdots 4$ и $156 \vdots n \Rightarrow n \vdots 5$, тогда наибольшее $n = 2\cdot 3\cdot 13 = 78$), и при $n = 78 = 2\cdot 3\cdot 13$ $x = 2$, $y = 4$ и $r = 5$.

Ответ: 78.

№2

Предположим, что в турнире участвовало хотя бы 6 человек. Рассмотрим тогда одного из них (назовём его первым). ~~У~~ Он сыграл со всеми остальными, т.е. ~~с~~ хотя бы с $6-1=5$ участниками. С какими-то из них этот первый сыграл вничью, с остальными — с победой/проигрышем. По принципу Дирихле есть хотя бы 3 человека, с которыми первый сыграл ~~либо вничью~~ партии одного и того же типа (будем называть партию вничью (партией 1-ого типа, партию с ~~до~~ победителем — партией 2-ого типа). Тогда, по условию, среди ~~этих~~ 3-х участников есть 2 которые сыграли с партией того же типа, что и партии между ними и первым (среди партий у этих 3-х человек есть партии обоих типов), но тогда если рассмотреть тройку участников, состоящую из первого и этих 2-х, то среди партий в этой чистовик трайке все партии одного типа, что противоречит условию.

Тогда игроков не более 5, но их может быть 5, например:



На рисунке точками обозначены игроки, линиями (рёбрами) — партии между ними с указанием результата каждой партии (результаты любых 2-х партий независимы, так что противоречий нет), и можно убедиться, что такие результаты партий не противоречат условию.

Более удобно в данной задаче провести оценку с помощью графа, в котором вершины соответствуют участникам, рёбра между парами вершин — партиям между парами участников (такой граф будет полным, т.к. каждый сыграл с каждым). Покрасим ребро в красный цвет, если соответствующая ему партия была сыграна вничью, и в синий в противном случае. Тогда если в графе хотя бы 6 вершин, то можно взять любую вершину (её назовём A), и из неё выходит хотя бы $6-1=5$ рёбер, среди которых по принципу Дирихле будут хотя бы 3 ребра одинакового цвета (пусть они выходят из A в вершины B, C, D). Тогда среди рёбер подграфа ~~BCD~~ из вершин B, C, D будут рёбра обоих цветов (из условия), в том числе будет ребро (не теряя общности, это ребро BC), цвет которого совпадает с цветом рёбер AB, AC, AD, одного цвета, тогда в подграфе ABC все рёбра одного цвета, противоречие.

Ответ: 5.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

17-91-22-88
(180.1)

№3 чистовик

Предположим, что у 2024-угольника есть хотя бы 3 стороны длины 1. Эти стороны не могут быть попарно соседние (соседние стороны — стороны с общей вершиной), иначе они образовывали бы треугольник, а у 2024-угольника 2024 стороны. Тогда среди этих 3-х есть 2 стороны без общей вершины — пусть это стороны AB и CD.

Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$. Он будет выпуклым, т.к. 2024-угольник выпуклый. Т.к. сумма углов $ABCD$ равна $360°$, хотя бы один из его углов будет $\geq 90°$, но $< 180°$. Т.к. стороны AB и CD не смежны (не соседние), они противоположны и каждый угол прилегает к одной из этих сторон (пусть для определённости к стороне AB прилегает $\angle ABC > 90°$). Но тогда $AC > 1$, т.к. по теореме Косинусов

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos(\angle ABC) > AB^2 = 1^2$$

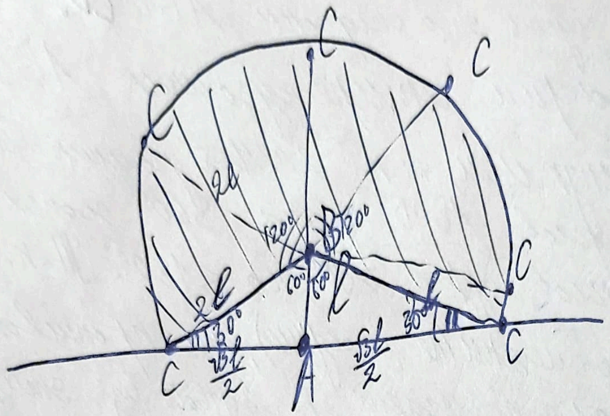
$(BC^2 > 0,\ 2 \cdot AB \cdot BC > 0,\ \cos(\angle ABC) < 0$, т.к. $90° < \angle ABC < 180°)$, но AC — диагональ 2024-угольника. Противоречие.

Однако, у 2024-угольника могут быть 2 стороны длины 1. Для построения примера возьмём окружность радиусом 1, проведём из центра 2 радиуса с углом между ними, меньшим $60°$. Пусть это радиусы OA_1 и OA_{2023}. На меньшей дуге $\overset{\frown}{A_1A_{2023}}$ отметим точки $A_2, A_3, \ldots, A_{2022}$ в ~~любых местах~~ произвольно. Тогда диагонали $OA_2 = OA_3 = \ldots = OA_{2022} = 1$, для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2023\}$ $(i \neq j)$ $A_iA_j \leq 1$ (диагональ), т.к. $\angle A_iOA_j \leq \angle A_1OA_{2023} < 60°$, т.е. дуга A_iA_j меньше $60°$ (её градусная мера) и длина хорды A_iA_j меньше 1. Тогда 2024-угольник $OA_1A_2 \ldots A_{2023}$ удовлетворяет условию. Ответ: 2.

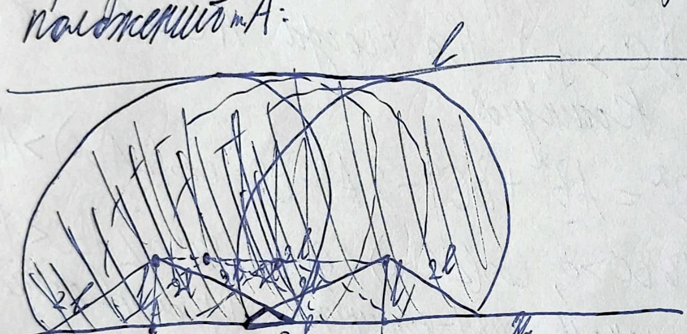
Чистовик

№6

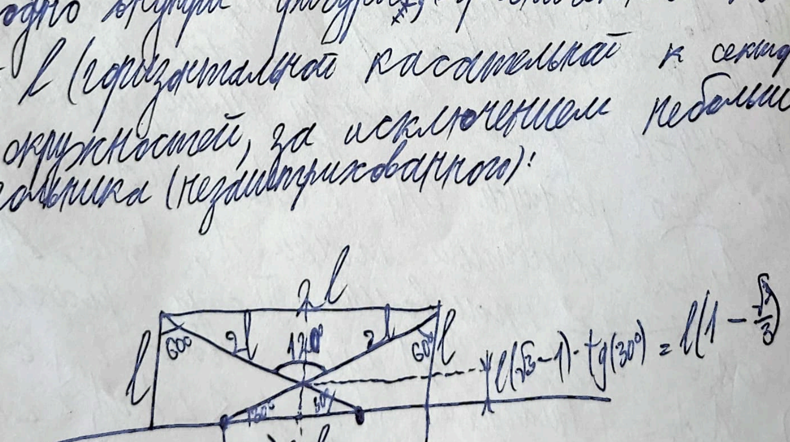
Штанга BC может повернуться на любой угол, пока не упрётся в пол. Тогда для заданной точки A (её положение задано) множество точек, где может находиться точка K, является сектором круга.



Нарисуем все такие секторы для всевозможных положений т. A:

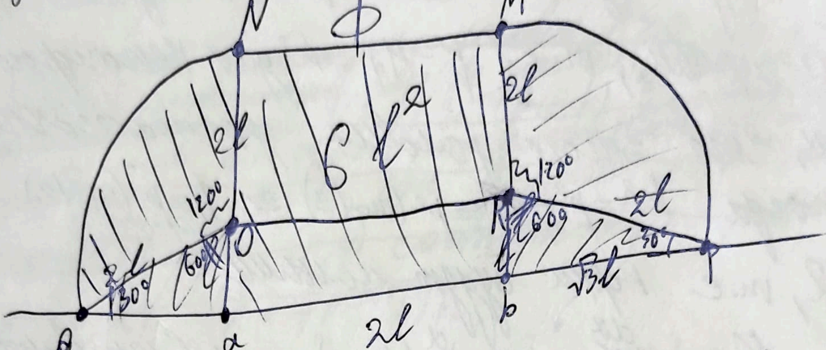


Видно, что точка K может быть где угодно внутри фигуры Ф, ограниченной полом, прямой l (горизонтальная касательная к секторам) и дугами окружностей, за исключением небольшого треугольника (незаштрихованного):



Чистовик

Площадь этого треугольника равна
$2\cdot\frac{1}{2}l(\sqrt{3}-1)\cdot l\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=l^2(\sqrt{3}-1)^2:\sqrt{3}=l^2(4-2\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{3}=$
$=l^2\left(\sqrt{3}\cdot\frac{4}{3}-2\right)$; ~~площ~~ посчитаем площадь S фигуры Ф:



Площадь фигуры Ф равна $S_Ф=S_{abNM}+S_{MPR}+S_{RbP}+$
$+S_{QON}+S_{Qoa}=2l\cdot3l+\left(\frac{120°}{360°}\cdot(2l)^2\cdot\pi+\frac{\sqrt{3}l^2}{2}\right)\cdot2=$
$=6l^2+2\left(\frac{4}{3}\pi l^2+\frac{\sqrt{3}}{2}l^2\right)=l^2\left(6+\frac{8}{3}\pi+\sqrt{3}\right)$, а механизм может окрасить площадь стены, равную
$l^2\left(6+\sqrt{3}+\frac{8}{3}\pi\right)-l^2\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}-2\right)=l^2\left(6+\sqrt{3}+\frac{8}{3}\pi-\frac{4}{3}\sqrt{3}+2\right)=$
$=l^2\left(8+\frac{8}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

Ответ: $l^2\left(8+\frac{8}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Черновик

№5

Корни многочлена $f(x)$ (т.е. уравнения $f(x)=0$) равны

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2};$$ для того, чтобы хотя бы один из них был целый, нужно, чтобы $\sqrt{p^2-4q}$ было целым, т.е. $p^2-4q=k^2$ для некоторого $k\in\mathbb{Z}$. Заметим, что этого условия достаточно, ведь тогда $k^2=p^2-4q\equiv p^2 \pmod 2 \Rightarrow k\equiv p \pmod 2$ и $(-p\pm k)\vdots 2$, т.е. корни будут целыми.

Каждой паре $(p;q)$, удовлетворяющей условию, соответствует ровно одной паре $(p;k)$ (из пары $(p;k)$ получается ровно одна пара $(p;q)$: $q=\frac{p^2-k^2}{4}=\frac{(p-k)(p+k)}{4}$, но для этого необходимо и достаточно, чтобы $p\equiv k \pmod 2$ (тогда $(p-k)\vdots 2$ и $(p+k)\vdots 2$)). Поэтому будем искать количество таких пар $(p;k)$ ($k\equiv p \pmod 2$), что соответствующая ей пара $(p;q)$ удовлетворяет условию (1) (она заведомо удовлетворяет условию (2), т.к. $p^2-4q=k^2$), т.е.

$$f(2023)=2025^{24}$$

$$2023^2+2023p+q=2025^{24}$$

$$2023^2+2023p+\frac{p^2-k^2}{4}=2025^{24} \quad |\cdot 4$$

$$4\cdot 2023^2+4\cdot 2023\cdot p+p^2=k^2+2025^{24}\cdot 4$$

$$(4046+p)^2=k^2+4\cdot 2025^{24}=k^2+(2\cdot 2025^{12})^2$$

Пусть $N = (2\cdot 2025^{12})^2 = 4\cdot 2025^{24}$. На самом деле, из уравнения $(4046+p)^2 = k^2+N^2$ следует, что $k \equiv p \pmod 2$, т.к. $N \vdots 2$, и ~~k~~ $p^2 \equiv (4046+p)^2 \equiv k^2+N^2 \equiv k^2 \pmod 2$.

Поэтому количество пар $(p;q)$, удовлетворяющих условию задачи, в 2 раза меньше ~~равно~~ количества пар $(p;k)$, удовлетворяющих уравнению $(4046+p)^2 = k^2+N^2$ (~~здесь ещё необходимо условие $k \geq 0$~~ т.к. каждой паре $(p;q)$ соответствуют ровно две пары $(p;k)$ и $(p;-k)$, где $k=\sqrt{p^2-4q}$ ~~две различных пары $(p;k)$ и $(p;-k)$ соответствуют~~ и если $(p;k)$ удовлетворяет уравнению $(4046+p)^2=k^2+N^2$, то $(p;-k)$ тоже ему удовлетворяет) ~~каждой одной паре $(p;q)$, а при условии $k \geq 0$ каждая пара $(p;q)$ соответствует ровно одной паре $(p;k)$ $(k=\sqrt{p^2-4q})$~~.

$$N^2 = (4046+p)^2 - k^2 \quad \cancel{k \geq 0}$$

$$N^2 = (4046+p-k)(4046+p+k) \quad \cancel{k \geq 0}$$

Тогда нужно искать кол-во способов представить N^2 в виде $N^2 = \alpha\beta$, где α и β — различные целые числа, причём

$$\begin{cases} \alpha = 4046+p-k \\ \beta = 4046+p+k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{\alpha+\beta}{2} - 4046 \\ k = \dfrac{\beta-\alpha}{2} \end{cases}$$

тогда при определённых α и β будет получаться ровно 1 решение $(p;k)$. Но такое количество способов равно количеству делителей N^2 плюс 1 (при способе в котором $\alpha=\beta=N$ $k=0$ и пары $(p;k)$ и $(p;-k)$ — одна и также пара, но её нужно дважды учесть при подсчёте кол-ва пар $(p;q)$). ~~при паре α и β будут получаться 2 разных пары $(p;k)$~~.

$N^2 = (2\cdot 2025^{12})^2 = (2\cdot 45^{24})^2 = 2^2\cdot 45^{48} = 2^2\cdot(5\cdot 3^2)^{48} = 2^2\cdot 3^{96}\cdot 5^{48}$, кол-во делителей N равно $m=(2+1)(96+1)(48+1) = 3\cdot 97\cdot 49$, а кол-во пар $(p;q)$ равно $\dfrac{m+1}{2} = \dfrac{3\cdot 97\cdot 49+1}{2} = 7130$ (m можно посчитать с помощью комбинаторики, т.к. каждый делитель N^2 имеет вид $2^r\cdot 3^s\cdot 5^t$, где $0\leq r\leq 2$, $0\leq s\leq 96$ и $0\leq t\leq 48$).

Ответ: 7130.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик

№4

Пронумеруем королевства числами от 1 до 2023. Пусть i-е королевство добывает a_i золота и b_i алмазов.

Черновик

$a_1 \; a_2 \; a_3 \dots a_{2023}$

$b_1 \; b_2 \; b_3 \dots b_{2023}$

$f(x) = x^2 + px + q$

$f(2023) = 2025^{24} \equiv 1 \pmod{2024}$

$3 \vdots 49 = 147$

$$\begin{array}{r} 147 \\ \times\; 97 \\ \hline 1029 \\ 1323 \\ \hline 14259 \end{array}$$

$(2023^2 + 2023p + q - 1) \vdots 2024$

$2024 = 1012 \cdot 2 = 506 \cdot 4 = 253 \cdot 8 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$

$2023p + q \equiv 1 - 2023^2 \pmod{2024}$

$14260 : 2 = 7130$

$4q = (p-k)(p+k)$

$-p + q \equiv 0 \pmod{2024}$

$p \equiv q \pmod{2024}$

$k = p + 2\alpha \quad (\alpha = \frac{k-p}{2})$

$k^2 \equiv p^2 - 4q \equiv p(p-4) \equiv (p-2)^2 - 4 \pmod{2024}$

$\boxed{2023^2 + 2023p + q = 2025^{24}}$ $\quad \boxed{N = 2025^{12}}$

$k^2 \equiv p(p-4)$

$2\alpha(p+\alpha) = q$

$\boxed{q = \frac{p^2 - k^2}{4}}$

$4 \equiv (p-k-2)(p+k-2) \pmod{2024}$

$2023p + q = N^2 - 2023^2 =$

$= (N - 2023)(N + 2023)$

$(2+\alpha)(2+\beta) \equiv 4$

$2(\alpha + \beta) = -\alpha\beta$

$p^2 - 4q = k^2$

$-q \; 2023^2 + 4 \cdot 2023p + p^2 = (p + 2023)^2$

$2023^2 + 2023p + q = 2025^{24}$

$(p^2 - 4q) + 4 \cdot (2023^2 + 2023p + q) = 4 \cdot 2023^2 + 4 \cdot 2023 \cdot p + p^2 =$

$= (p + 4046)^2 = k^2 + 4 \cdot 2025^{24}$

$(p + 4046 - k)(p + 4046 + k) = 4 \cdot 2025^{24} = (2 \cdot 2025^{12})^2$

$4 \cdot (5^2 \cdot 3^4)^{48} = 2^2 \cdot 3^{96} \cdot 5^{48} = \alpha \cdot \beta$ $\quad \Big| \quad \alpha = p - k + 4046, \quad \beta = p + k + 4046$

Черновик

$a_1 + a_2 + \ldots + a_{1011} + a_{1013} <$

$< a_{1012} + a_{1014} + \ldots + a_{2023}$

$f(x) = x^2 + px + q$

$a_1 > a_2 > \ldots > a_{2023}$

$a_1 + \ldots + a_{1013} < 2a_{1012} + a_{1014} + \ldots + a_{2023}$

$2023^2 + 2023p + q = 2025^{24} = 45^{48} = (45^{24})^2$

$A > B$

$f(x) = 0$

$x = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$

$1011A + B < \dfrac{1012A + 1011B}{2}$

$\begin{cases} a + c \geq 1 \\ a + b \geq 1 \\ c + d \geq 1 \\ b + d \geq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a \leq 1 \\ b \leq 1 \\ c \leq 1 \\ d \leq 1 \end{cases}$

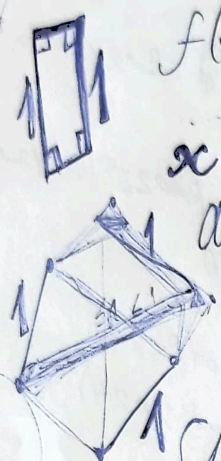
$a_1 = b_{2023}$

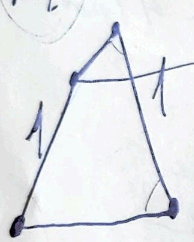
$p^2 - 4q = k^2, \; k \in \mathbb{Z}$

$a + b + c + d > 2$

$2022A + 2B < 1012A + 1011B$

$\begin{cases} 1 + c > d \\ 1 + a > b \\ 1 + b > d \\ 1 + a > c \end{cases}$

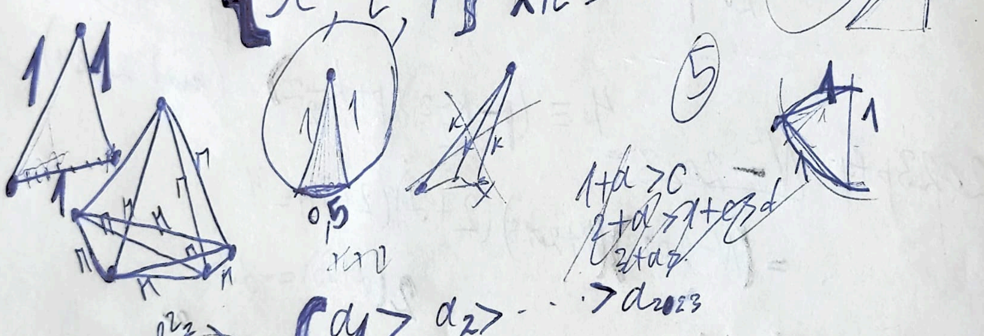




$\begin{cases} 156 = xn = 12 \cdot 13 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13 \\ 312 = tn = \cancel{26 \cdot 12} \quad 2 \cdot 156 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13 \\ 390 = rn = 13 \cdot 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \end{cases}$

$\{x, t, r\} \; xn$ $\cancel{1010A < 1009B}$

999 мало ... 1% мало ... 1%



$1 + a > c$

$2 + a > 1 + c \geq d$

$\begin{cases} a_1 > a_2 > \ldots > a_{2023} \\ b_1 < b_2 < \ldots < b_{2023} \end{cases}$

$\frac{2}{3}\pi \cdot (2l)^2 + 4l^2 = 4l^2\left(1 + \frac{2}{3}\pi\right)$

$\sum = 2023d - d \cdot \frac{2022 \cdot 2023}{2}$