0 724209 410001

72-42-09-41
(161.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант А-3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы"
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Логинова Тимофея Константиновича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«07» 04 2024 года

Подпись участника

70 (семьдесят) ~~Ам~~

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

72-42-09-41 (161.3)

Черновик

A на 300с меньше B

A на 700м больше B

a $\quad (a-3)\cdot t-(b-3)(t+300)=700$

b $\quad at-bt-300b=700$

$at-b(t+300)=at-bt-300b$

$(3-a)t-(b-3)(t+300)=700$

$bt-at$

$f(x)=|2x+3|-|2x+1|+4 \quad x\in[-2;0]$

$f(x+3)\le f(x)+6 \qquad f(x+2)\ge f(x)+4$

$f(-2)=1-3+4=2 \qquad f(1)\le 8$

$f(-1)=1-1+4=4 \qquad f(2)\le 10 \qquad f(1)\ge 8$

$f(0)=3-1+4=6 \qquad f(3)\le 12 \qquad f(2)\ge 10$

$f(3)\ge 12 \qquad f(1)=8$

$f(3)=12 \qquad f(2)=10$

$f(k+3)\le f(k)+6$

$f(k+3)\ge f(k+1)+4 \qquad 0\le f(k)-f(k+1)+2$

$f(-2)=2 \quad f(-1)=4 \quad f(0)=6 \quad f(1)=8 \quad f(2)=10 \quad f(3)=12$

$f(k+3)=f(k)+6=f(k+1)+4=f(k+2)+2$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

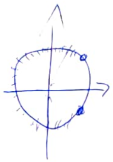
$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos\beta -$

$36\cos(x+\cos x)\cos(x-\cos x) + 9 = \pi^2$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

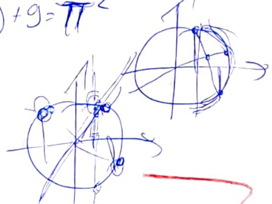
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$



$18(\cos(2x) + \cos(2\cos x)) + 9 = \pi^2$

$2\cos^2(x) + 2\cos^2(\cos x) - 2$



$36\cos^2 x - 9 + 18\cos(2\cos x) = \pi^2$

$(6\cos x)^2$

$\sin(\cos x) = a$

$\cos x = \arcsin(a)$

$\frac{a}{b}$

$\left(\frac{\pi}{3}\right)^2$ a

$2\cos(2x) + 2\cos(2\cos x) + 1 = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2$

$4\cos^2 x - \cancel{2} + 4\cos^2(\cos x) - \cancel{2} = \frac{\pi^2}{9} + 3$

$4\cos^2(a) = \frac{\pi^2}{9} + 3 - 4a^2$

$\frac{1}{2} \le \cos(\cos x) \le 1$

$\cos x!$

$\sin(x) = 0$

$-8\cos x\sin x + 8\cos(\cos x)\sin x(\cos x)\sin x = 0$

$2\cos(\cos x)\sin(\cos x) = 2\cos x$

72-42-09-41 (161.3)

~~Чистовик~~ Черновик

№ 1

Пусть модель Альфа имеет скорость a м/с, а модель Вета b м/с. Тогда в ветреную погоду

Альфа пролетела: $|(a-3)t|$ м

Вета: $|(b-3)(t+300)|$ м

1) $\begin{cases} a \ge 3 \\ b \ge 3 \end{cases} \Rightarrow (a-3)t - (b-3)(t+300) = 700$

$at - 3t - bt - 300b + 3t + 900 = 700$

В безветренную погоду: $at - b(t+300) =$

$= at - bt - 300b = 700 - 900 = 200$

$\Rightarrow$ Вета пролетит на 200м больше Альфы

2) $\begin{cases} a \ge 3 \\ b \le 3 \end{cases} \Rightarrow (a-3)t + (b-3)(t+300) = 700$

$at - 3t + bt + 300b - 3t - 900 = 700$

$at - b(t+300) = at - bt - 300b$

$\cancel{at} = 1600 + 6t - \cancel{bt} - 300b$

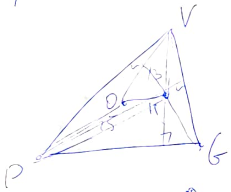
$-bt - 300b = -1600 - 6t + at$

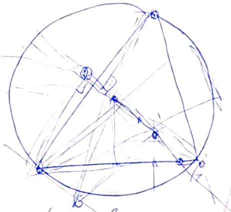
$= \cancel{1600 + 6t - 2bt - 600b}$

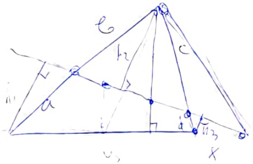
$= 2at - 1600 - 6t$

2024 · 2 = 4048   4046 + 6 = 4054

Черновик







$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b}$$

$$h_1 + h_3 = h_2\left(\frac{a}{b} + \frac{d}{c}\right)$$

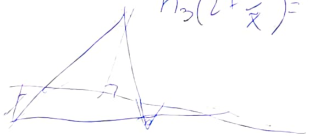
$$\frac{h_3}{h_2} = \frac{d}{c}$$

$$\frac{h_2}{h_3} = \frac{x+y}{x}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{x}{x+y} = 1 \qquad \frac{x+y}{x} \cdot \frac{d}{c}$$

$$h_1 = h_3\left(1 + \frac{y}{x}\right) \qquad \frac{d}{c}\left(1 + 1 + \frac{y}{x}\right)$$

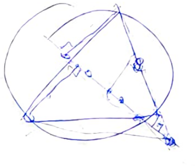
$$h_3\left(2 + \frac{y}{x}\right) = h_2 \cdot \frac{d}{c} \qquad \frac{a}{b} = \frac{d}{c} \cdot \frac{x+y}{x}$$



$$h_1 = h_2 \cdot \frac{a}{b}$$

$$h_3 = \frac{d}{c} \cdot h_2$$

$$h_1 = \left(1 + \frac{y}{x}\right) h_3 \qquad \frac{d}{c}\left(1 + 1 + \frac{y}{x}\right)$$



72-42-09-41 (1613)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик

№ 2

$f(-2) = 1 - 3 + 4 = 2$

$f(-1) = 1 - 1 + 4 = 4$

$f(0) = 3 - 1 + 4 = 6$

~~$x = k \Rightarrow$~~

$f(x+3) \le f(x) + 6$

$f(x+2) \ge f(x) + 4$

$x+1 \Rightarrow f(x+3) \ge f(x+1) + 4$

Докажем по индукции, что для x-целого начиная с -1

$f(x) + 6 = f(x+1) + 4$, тогда так как $\begin{cases} f(x+3) \le f(x) + 6 \\ f(x+3) \ge f(x+1) + 4 \end{cases}$

то $f(x+3) = f(x) + 6 = f(x+1) + 4$

$x = -2 \Rightarrow f(x+3) = f(1)$ $\quad f(1) \le f(-2) + 6 = 2 + 6 = 8$

$f(1) \ge f(-1) + 4 = 4 + 4 = 8$

$\Rightarrow f(1) = f(-2) + 6 = f(-1) + 4 = f(0) + 2 = 6 + 2 = 8$

$x = k \Rightarrow \begin{cases} f(k+3) \le f(k) + 6 \\ f(k+3) \ge f(k+1) + 4 \end{cases}$

Мы пытаемся найти $f(k+3)$ и $f(k+2)$ нам уже известо и $f(k+1)$ и ... про них мы знаем, что начиная с $f(-2)$ каждое следующие на 2 больше предыдущего $\Rightarrow f(k+3) \le f(k) + 6$

$f(k+3) \ge f(k+1) + 4 = f(k) + 2 + 4$

$\Rightarrow f(k+3) = f(k) + 6 = f(k+1) - 2 + 6 = f(k+2) - 2 - 2 + 6 =$

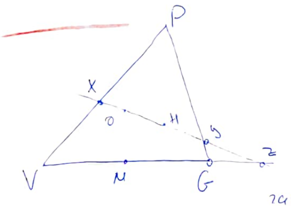
$= f(k+2) + 2 \Rightarrow$ мы доказали, что каждое следущее $f(x)$ где $\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x \ge -1 \end{cases}$ $f(x) = f(x-1) + 2$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик №2 продолжение

Тогда так как $f(0)=6$, то $f(2024)=6+2024\cdot 2=$
$=4054$ Ответ: 4054

№~~3~~4



1) OH – прямая Эйлера
X; Y; Z – точки перес. OH с VP; PG; VG

У прямой Эйлера есть замечательное св-во. На нашем чертеже оно звучит так: Сумма расстояний от V и G до прямой Эйлера = Расстоянию P до прямой Эйлера. $h_V; h_G; h_P$ – расстояния точек V; G; P до OH

$S_{OHP}=h_P\cdot OH\cdot\frac{1}{2}$; $S_{OHV}=h_V\cdot OH\cdot\frac{1}{2}$; $S_{OHG}=h_G\cdot OH\cdot\frac{1}{2}$

$h_P=h_G+h_V \Rightarrow S_{OHP}=S_{OHV}+S_{OHG} \Rightarrow S_{OHG}=25-13=12$

Ответ: 12

Свойство, которое я применил можно доказать так. Пусть M – ср. VG $\Rightarrow$ расстояние от M до OH это полусумма h_V и h_G, но так как $OM=\frac{1}{2}PH$, то расстояние от M до OH $=\frac{1}{2}h_P \Rightarrow \frac{h_V+h_G}{2}=\frac{1}{2}h_P \Rightarrow h_V+h_G=h_P$

Чтд.

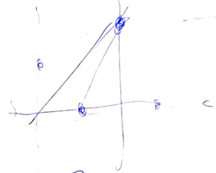
ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик

$y=x^2+px+q$

$\frac{A_x+B_x}{2}=d$

$|B_x-A_x|$



$C(0;q)$ $D(-\frac{p}{2}; y)$

$A(x_1;0)$

$B(x_2;0)$

$DC^2=\frac{p^2}{4}+(q-y)^2$

$\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$

$(x_1+\frac{p}{2})^2+y^2$

$p^2-4q+y^2=\frac{p^2}{4}+q^2+y^2-2qy$

$(x+\frac{p}{2})^2+(y-b)^2=R^2$

$C(0;q)$ $D(-\frac{p}{2};y)$

$(x_1+\frac{p}{2})^2+b^2=(x_2+\frac{p}{2})^2+b^2$

$A(\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2};0)$

$\frac{p^2}{4}+(q-y)^2=\frac{p^2-4q}{4}+y^2$

$B(\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2};0)$

$-q$

$q^2+\cancel{y^2}-2qy=-q+\cancel{y^2}$ $q^2+q=2qy$ $q+1=2y$

$y=\frac{q+1}{2}$

$\frac{q+1-p}{2}=2012\sqrt{p^2-4q}$

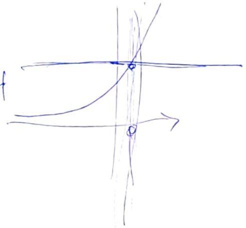
$q=-4048+p$

$p^2+4\cdot q-4p=0$

Черновик

$|2[\operatorname{tg}x]+1|^x=[\operatorname{tg}x]^2+2$

$|2a+1|^x=a^2+2$



$\frac{m}{n}$

$(2a+1)^x=a^2+2$ 1

$2a+1=0^0=0$

$+(a-3)t+(b-3)(t+300)=700$

$at-bt-300t=2at-bt-200$

$at-bt+bt+300b=200$

$\frac{\pi}{3}$

$a+3$ 1

$18(\cos(2x)+\cos(2\cos x))=\pi^2-9$

$18(2\cos^2(x)+2\cos^2(\cos x))=\pi^2+27$

$\cos^2(x)+\cos^2(\cos x)=\frac{\pi^2+27}{36}$

$\frac{5x}{11}$ $\frac{510}{14}$ $|2a+1|^x=a^2+2$ $\frac{k+3}{4k+3}$

$(|2a+1|)^m=(a^2+2)^n$ 1 $2k+1$

1   2 $(4k+3)^m=(4k^2+4k+3)^n$

3   3   7   11   11   27   15   51

5   6

$4k^2+4k+3 \mid 4k+3$

$-4k^2+3k \quad k$

$k+3$

Чистовик

№5

$y=x^2+px+q$ Пусть $A\left(\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2};0\right)$

$B\left(\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2};0\right)$

$C(0;q)$

$D\left(-\frac{p}{2};b\right)$

Найдём b из $CD^2=AD^2$

$\Rightarrow \frac{p^2}{4}+(q-b)^2=\frac{p^2-4q}{4}+b^2$

$q^2-2qb+b^2=-q+b^2 \Rightarrow q^2+q=2qb \quad q+1=2b$

$\Rightarrow b=\frac{q+1}{2} \Rightarrow D\left(-\frac{p}{2};\frac{q+1}{2}\right)$

$\frac{q+1-p}{2}=-2022$ Надо найти мин AB, то есть мин AB^2

$AB^2=p^2-4q$ $q=p-4043$

$AB^2=p^2-4p+16172$ мин значение в вершине данной параболы $\Rightarrow \frac{-D}{4}=$

$=\frac{-(16-4\cdot 16172)}{4}=-4+16172=16168$

$\Rightarrow$ мин. $AB=\sqrt{16168}$ Ответ: $\sqrt{16168}$

Чистовик

№1

Пусть Альфа летает со скоростью $a\frac{м}{с}$, а Бета со скоростью $b\frac{м}{с}$

Будем смотреть на величину $at-b(t+300)=$ $=at-bt-300b$ если она <0, то Бета пролетит больше и наоборот, а если $=0$, то одинаково.

1) $\begin{cases} a\geq 3 \\ b\geq 3 \end{cases} \Rightarrow (a-3)t-(b-3)(t+300)=700$

$at-bt-300b+900=700$

$at-bt-300b=-200<0$ Бета пролетит больше

2) $\begin{cases} a\leq 3 \\ b\geq 3 \end{cases} \Rightarrow (3-a)t-(b-3)(t+300)=700$

$3t-at-bt-300b+3t+900=700$

$-bt-300b=-200-6t+at$

$at-bt-300b=2at-200-6t=t(2a-6)-200$

$a\leq 3 \Rightarrow 2a\leq 6 \Rightarrow 2a-6\leq 0 \Rightarrow t(2a-6)-200<0$

$\Rightarrow$ Бета пролетит больше

3) $\begin{cases} a\geq 3 \\ b\leq 3 \end{cases} \Rightarrow (a-3)t+(b-3)(t+300)=700$

$at-3t+bt+300b-3t-900=700$

$-bt-300b=-1600-6t+at \Rightarrow at-bt-300b=2at-6t-$ -1600 в этом случае всё зависит от t и a, может быть, что Альфа пролетит больше, а может, что Бета

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик №1 (продолжение)

4) $\begin{cases} a\leq 3 \\ b\leq 3 \end{cases} \Rightarrow (3-a)t+(b-3)(t+300)=700$

$3t-at+bt+300b-3t=1600$

$at-300b-bt=-1600<0 \Rightarrow$ Бета пролетит больше

Ответ: Во всех случаях кроме одного ответ Бета. В случае, когда $\begin{cases} a\geq 3 \\ b\leq 3 \end{cases}$ могут быть два разных ответа.

№3

$36\cos(x+\cos x)\cos(x-\cos x)+9=\pi^2$

$2(\cos(2x)+\cos(2\cos x))=\frac{\pi^2}{9}-1$

$\underbrace{\cos(2x)+\cos(2\cos x)}_{f(x)}=\frac{\pi^2}{18}-\frac{1}{2}$

Идея: $f(x)=f(-x)$

$f'(x)=-\sin(2x)\cdot 2-\sin(2\cos x)\cdot(-2\sin x)=2\sin x\sin(2\cos x)-$ $-2\sin x\cos x$ $\quad f'(x)=0$ $\quad$ 1) $\sin x=0$ $\quad$ 2) $\sin(2\cos x)=\cos x$

$\sin(2\cos x)=\sin(\frac{\pi}{2}-x) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x=\frac{\pi}{2}-x \\ 2\cos x=x-\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} \cos x=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2} \\ \cos x=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4} \end{array}\right.$

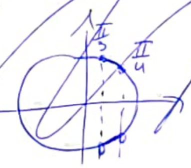
$\sin x=0 \Rightarrow$ $\cos x=1 \Rightarrow f(x)=1+\cos(2)$; $\cos x=-1 \Rightarrow f(x)=1+\cos(2)$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик

$\cos x = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \Rightarrow f(x) = \cos(2x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -2\sin^2 x + \sin x + 1$

~~Я не знаю как, но я пытался доказать что на этом промежутке нет корней~~



~~Тогда все корни ним~~

Дальше я не знаю как.

№ 6

$[\operatorname{tg}\alpha] = b \Rightarrow |2b+1|^x = b^2 + 2$ Пусть $x = \frac{m}{n}$ - рациональное

$\Rightarrow |2b+1|^m = (b^2+2)^n$ Проверим остатки на 2

слева всегда 1, значит $b = 2k+1$; $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow |4k+3|^m = (4k^2+4k+3)^n$ Проверим остатки

при делении на $4k+3$ слева 0, справа

$\cancel{k}\left(k + \frac{k+3}{4k+3}\right)^n$ $\left|\frac{k+3}{4k+3}\right| \leq 1 \Rightarrow$ чтобы не было остатка,

$\frac{k+3}{4k+3} = 1 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow b = 1$

Получается, что решением будет только $b = 1$

Проверка: $(2+1)^x = 1+2 \Rightarrow 3^x = 3$ $x = 1$ - рациональное

$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha \geq 1 \\ \operatorname{tg}\alpha < 2 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha \geq \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ \alpha < \operatorname{arctg}(2) + 2\pi n \end{cases} n \in \mathbb{Z}$

Ответ: $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \operatorname{arctg}(2) + 2\pi n\right)$ $n \in \mathbb{Z}$