0 140669 340007

14-06-69-34
(161.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант А - 3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Ли Дмитрия
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«7» апреля 2024 года

Подпись участника

14-06-69-34
(161.2)

80 (Восемьдесят) ~~Сму~~

Черновик

№1

$v_B = 3$ м/с $\quad v_A$

t_A – время в пути Ал $\quad v_Б$

$t_Б$. $\quad t = t_A - t_Б$

$t_A \cdot (v_A - v_B) - t_Б(v_Б - v_B) = 700 \quad t_A v_A - t_A v_B - t_Б v_Б + t_Б v_B = 700$

$v_A t_A - v_Б t_Б = \quad t_A v_A - t_Б v_Б = 700 - v_B(t_A - t_Б)$

$v_B = 3$ м/с $\quad 300$

$700 + 300 = 1000$

№ 3

$$36\cos(x + \cos x)\cos(x - \cos x) + 9 = \pi^2$$

$$36 \cdot \frac{1}{2}\left(\cos 2x + \cos 2\cos x\right) + 9 = \pi^2$$

$$18\cos 2x + 18\cos 2\cos x + 9 = \pi^2$$

$$\cos 2x + \cos 2\cos x = \frac{\pi^2}{18} - \frac{1}{2}$$

Пусть $\cos x = t$ $\quad \frac{1}{2}\left(\cos \alpha+\beta + \frac{\cos \alpha-\beta}{2}\right)$

$$\cancel{\cos} \; t^2 - 1 + \cos 2t = \frac{\pi^2}{18} - \frac{1}{2}$$

$$f(x) = t^2 - 1 + \cos 2t$$

$$f'(x) = 2t - 2\sin 2t$$

$$2(t - \sin 2t)$$

№ 2 Черновик

$f(x) = |2x+3| - |2x+1| + 4 \quad x \in [-2; 0]$

$f(x+3) \leq f(x) + 6 \qquad f(x+2) \geq f(x) + 4$

При $x = -2$

$f(-2) = 1 - 3 + 4 = 2$

$f(-1) = 1 - 1 + 4 = 4$

$f(0) = 3 - 1 + 4 = 6$

С каждым новым целым x $f(x)$ увеличивается на 2

Если при $f(-2) = 2$ $\quad 8 - 6 = 2$

$f(-1) = 8 - 4 = 4$

№ 3

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$

$x = \arccos t$

$\cos : t$

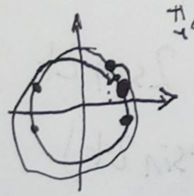
$\cos(\arccos$

$2t^2 - 1 + \cos 2t$

$\frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi^2}{18} - 1 + \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{18} - \frac{1}{2}$

$\arccos\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}$

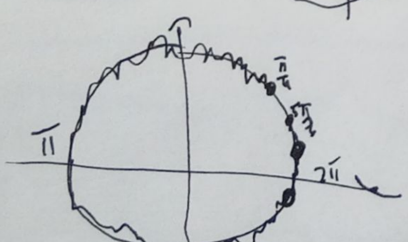
$\arccos\frac{\pi}{6} + \pi n$



$\frac{\pi}{2} < \pi$

$\arccos\frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$\arccos\frac{\pi}{6} + \cancel{2\pi n}$



$-\arccos\frac{\pi}{6} + 2\pi$

$+\arccos\frac{\pi}{6} + 2\pi$

14-06-69-34 (161.2)

№ 1 Чистовик

Дано:

$V_{ветра}$: $V_B = 3$ м/с

$t_A = t_Б - 300$

на 700м Альфа дальше

V_A - скорость Альфы без ветра

$V_Б$ - скорость Беты без ветра

Решение.

$t_A(V_A - V_B) - t_Б(V_Б - V_B) = 700$

$t_A V_A - t_A V_B - t_Б V_Б + t_Б V_B = 700$

$t_A V_A - t_Б V_Б = 700 - t_Б V_B + t_A V_B$

Разница в расстоянии без ветра:

$|t_A V_A - t_Б V_Б|$

$t_A V_A - t_Б V_Б = 700 + V_B(t_A - t_Б) \qquad t_A - t_Б = -300$

$t_A V_A - t_Б V_Б = 700 + 3(-300)$

$t_A V_A - t_Б V_Б = 700 - 900 = -200$

Если $t_A V_A - t_Б V_Б < 0$, то Бета пролетит дальше на 200 метров

Ответ: Бета пролетит большее расстояние на 200м.

№ 3

Дано:

$36\cos(x+\cos x)\cos(x-\cos x) + 9 = \pi^2$

сумма корней на отрезке $[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{3}]$ - ?

Решение.

$36\cos(x+\cos x)\cos(x-\cos x) + 9 = \pi^2$

$36 \cdot \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 2\cos x) = \pi^2 - 9$

$18(\cos 2x + \cos 2\cos x) = \pi^2 - 9 \quad | : 18$

$\cos 2x + \cos 2\cos x = \frac{\pi^2}{18} - \frac{1}{2}$

Рассмотрим функцию $f(x) = \cos 2x + \cos 2\cos x$

$f(x) = 2\cos^2 x - 1 + \cos 2\cos x$

Пусть $\cos x = t$, $t \in [-1; 1]$

$f(x) = 2t^2 - 1 + \cos 2t$

$f'(x) = 4t - 2\sin 2t$

экстремумы $f(x)$ при $t=0$, при $t=1$

$f'(1) = 4 - 2\sin 2$ $\sin \in [-1; 1] \Rightarrow 4 - 2\sin 2t > 0 \Rightarrow$

функция $f(x)$ монотонна и

возрастает при $t \in [0; 1] \Rightarrow$

$f(x) = \frac{\pi^2}{18} - \frac{1}{2}$ будет при едином t

При $t = \frac{\pi}{6}$ $f(x) = \frac{2\pi^2}{36} - 1 + \cos\frac{2\pi}{6}$

$f(x) = \frac{\pi^2}{18} - 1 + \frac{1}{2}$

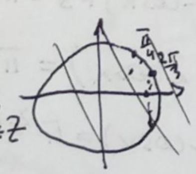
$f(x) = \frac{\pi^2}{18} - \frac{1}{2} \Rightarrow$

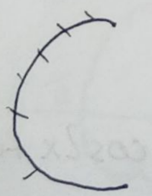
$t = \pm\frac{\pi}{6}$, т.к. t^2 и $\cos 2t$ уже не важен

Обратная замена

$\cos x = \pm\frac{\pi}{6}$

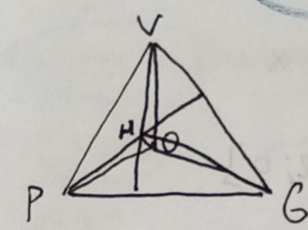
$x = \pm\arccos\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$



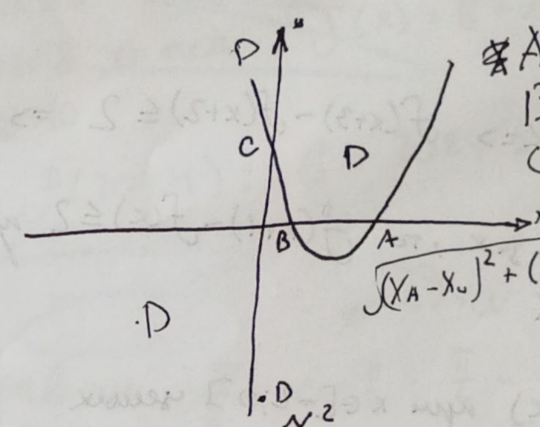


14-06-69-34 (161.2)

Черновик



N5



A$(x_A; y_0)$

B$(x_A; y_0)$

C$(x_0; y_C)$

D$(x_0; y_0)$

$\sqrt{(x_A - x_0)^2 + (y_0 - y_0)^2} =$

N2

N1

$y = x^2 + px + q$

$x = -1{,}5$

$x = -\frac{1}{2}$

$t_A(v_A - v_B) - t_B(v_B - v_B) = 700$

$t_A v_A - t_B v_B - v_B t_A + v_B t_B = 700$

$-v_B(t_A - t_B)$

$700 + v_B(t_A - t_B)$

$700 - v_B(t_B - t_0)$

-200

$t_B v_0 = 2_H v_A - 00$

$f(x) = \;\; 2x + 3 \;\; -2x - 1 + 4 = 6$

$2x + 3 \;\; +2x + 1 + 4 =$

$-2x - 3 \;\; +2x + 1 + 4 = 2$

$f(5) \leq f(2) + 6$

$f(5) - f(2) \leq 6$

$f(5) - f(3) \leq 4$

Чистовик

№ 2

Дано:

$f(x+3) \le f(x)+6$

$f(x+2) \ge f(x)+4$ при любых целых x

$f(x)=|2x+3|-|2x+1|+4$ при $x \in [-2;0]$

$f(2024)$-?

Решене

$\begin{cases} f(x+3)-f(x) \le 6 \\ f(x+2)-f(x) \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow f(x+3)-f(x+2) \le 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ если взять $x+2$ за x, то $f(x+1)-f(x) \le 2$ при любом целом x

Найдем $\cancel{f(-2)}$ $f(x)$ при $x \in [-2;0]$ целых

$f(-2)=|-4+3|-|-4+1|+4=+2$

$f(-1)=|-2+3|-|-2+1|+4=4$

$f(0)=|3|-|1|+4=6$

Так ~~прав~~ условие $f(x+1)-f(x) \le 2$ распространяется на все целые x, то на $x=-2;-1;0$ правило должно работать, поскольку $f(-1)-f(-2)=2$, то так будет для всех целых x,

то есть разница между значении x и $x+1$ будет 2 и с каждым ~~новым~~ ~~следу $x+1$~~ следующим целым x $f(x)$ будет увеличиваться на 2

Чистовик

№2 продолжение

Найдем закономерность

$f(-2)=2$

$f(-1)=4$

$f(0)=6$

$f(1)=8$, то есть $f(x)=6+2x$, при всех целых x

$f(2)=10$

$f(2024)=6+2024\cdot 2=6+4048=4054$

Ответ: 4054

~~№ Д~~ № 3 продолжение

Сравним $\frac{\pi}{6}$ и $\cos\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{6}$ и $\cos\frac{5\pi}{3}$

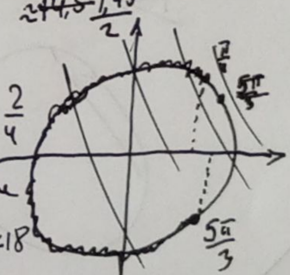
$\frac{\pi}{6}$ $\cos\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{6}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{3{,}1415926...}{6}$ ... ~~2,44.8~~ $\frac{1{,}45}{2}$

$\frac{3{,}14...}{6}$ v $\frac{\pi^2}{36}$ v $\frac{2}{4}$

π^2 v 18, если $\pi^2<4^2 \Rightarrow 4^2<18 \Rightarrow \pi^2<18$



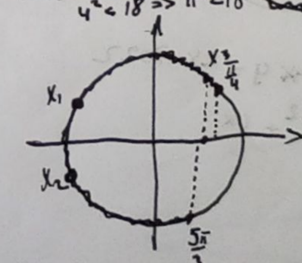
$\frac{\pi}{6}$ $\cos\frac{5\pi}{3}$

$\frac{\pi}{6}$ $\frac{1}{2}$

$\frac{3{,}1415926...}{6} > \frac{3}{6}$

$\cos\frac{5\pi}{3} < \frac{\pi}{6}$

$\cos\frac{5\pi}{3} <$



~~X_3~~ $X_1+X_2+X_3=$

$= \cancel{-\arccos\frac{\pi}{6}+(-\arccos\frac{\pi}{6}+\pi)}$

$= \pi+\arccos\frac{\pi}{6}+\pi-\arccos\frac{\pi}{6}+\arccos\frac{\pi}{6} =$

$= \arccos\frac{\pi}{6}+2\pi$

$\pm\arccos\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$; — решение

Ответ: $\arccos\frac{\pi}{6}+2\pi$ — сумма корней

№4 Черновик

$\sqrt{2}$

$1{,}3 \times 1{,}3 = 169$

$135 \times 135 = 18225$

$137 \times 137 = 18769$

$14 \times 14 = 196$

$14 \times 15 = 210$

$141 \times 141 = 19281$

$14 \times 10 = 140$ 145 11025

$145 \times 145 = 20025$

$145 \cdot 3 = 435$

$\frac{145}{3}$

$\frac{\pi}{6} \vee \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi^2}{36}$ $\frac{2}{4}$

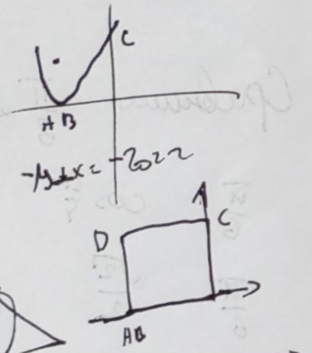
π^2 18

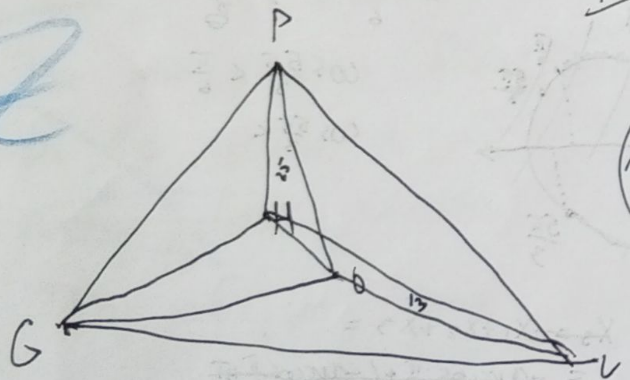
3,1415

№ 4

$-y = x - 2022$

$-x \; y = 2022$





$y = -x - 2022$

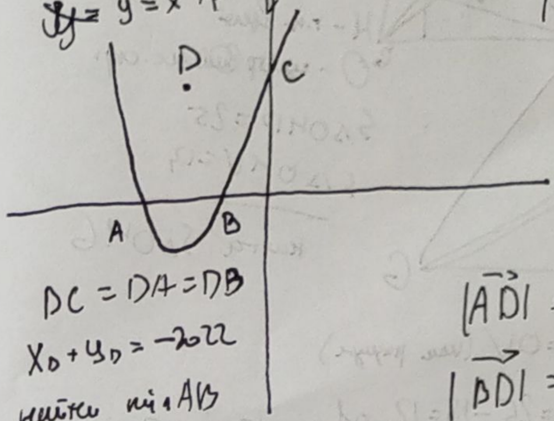
$x^2 + cx$

Чистовик

№5

Дано:

$y = x^2 + px + q$



$DC = DA = DB$

$x_D + y_D = -2022$

найти $p_1 \cdot AB$

Решение

Пусть

$A(x_A; 0)$

$B(x_Б; 0)$

$C(0; y_C)$

$D(x_D; y_D)$

$|\vec{AD}| = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (0 - y_D)^2}$

$|\vec{BD}| = \sqrt{(x_Б - x_D)^2 + (0 - y_D)^2}$

Если $AD = BD$, то $\triangle ADB$ – р/б

Пусть DH – высота, но коорд. x совпадает с x_B

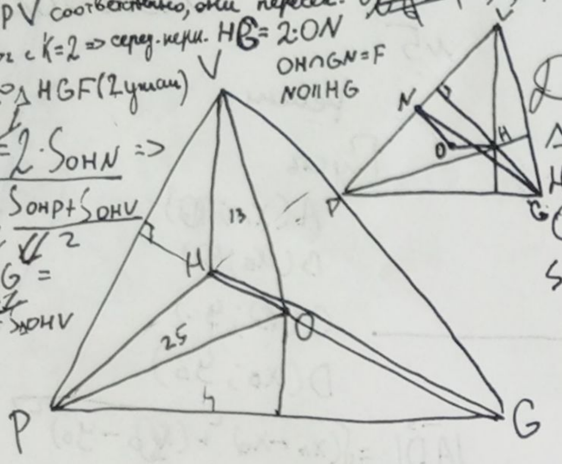
$x_B = \frac{-p}{2}$

$H(-\frac{p}{2}; 0)$ $|\vec{BA}| = \sqrt{(x_A - x_Б)^2} = |x_A - x_Б|$

~~При~~ Если A и B совпадают при $x = -\frac{p}{2}$, то $x_D = x_A = x_Б$ $x_D + y_D = 2022$

Ответ: 0

Пусть N-середина PV. Если провести прямые через P, V, G ∥ VG; PG, PV соответственно, они пересек. в ~~т.~~ P_2, V_2, G_2, $\Delta PVG \sim$ Чистовик №4
$\sim P_2V_2G_2$ с $k=2$ => серед. перп. $HG = 2 \cdot ON$
$OH \cap GN = F$
$NO \parallel HG$
$\Delta ONF \sim \Delta HGF$ (2 угла)
=> $S_{OHG} = 2 \cdot S_{OHN}$ =>
=> $S_{OHN} = \frac{S_{OHP} + S_{OHV}}{2}$
=> $S_{\Delta OHG} =$
$= S_{\Delta OHP} + S_{\Delta OHV}$



Дано:
ΔPVG
H – т.п. высот
O – центр опис. окр.
$S_{\Delta OHP} = 25$
$S_{\Delta OHV} = 13$

Найти $S_{\Delta OHG}$

ΔPOV – р/б т.к. $PO = OV$ (как радиусы)

$S_{OHG} = 25 + 13 = 38$ или $S_{OHG} = 25 - 13 = 12$ Ответ: 12; 38

№6 Чистовик

Дано
$|2[tg a]+1|^x = [tg a]^2 + 2$
Н.

Решение
Пусть $tg a = t$
$|2[t]+1|^x = [t]^2 + 2$
$[t]^2 + 2 \geq 2$
$|2[t]+1|^x \geq 1$
При $a = 0$
$1^x = 2$ нет решений
при $a = \frac{\pi}{4}$
$|2+1|^x = 1^2 + 2$
$x = 1$
Ответ: $\frac{\pi}{4}$

Z+