



2 514546 170009

31-45-46-17

(192.2)



Время 12:54 - 13:08

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант А-4

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Города Воробьевы горы
наименование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Моканко Андрей Александрович
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«07» апреля 2021 года

Подпись участника
[Подпись]

31-45-46-17
(161.2)

Чертовик

90 (Васильев)

√1

$u = 2 \text{ км/с}$

$t_2 - t_1 = 900 \text{ (с)}$

v_1 и v_2 - скорости

Сергей Иванович А1 и Б2

$l = 900 \text{ м}$

$t_1 \cdot (v_1 - u) - t_2 \cdot (v_2 - u) = l$

$t_1 v_1 - u t_1 - t_2 v_2 + u t_2 = l$

$l = u t$

$900 = 2 \cdot t$

$t = 450$

~~$t_1 v_1 - t_2 v_2 = l + u t_1 - u t_2$~~

~~$t_1 \cdot v_1 - t_2 \cdot v_2 = u t + u t_1 - u t_2$~~

~~$t_1 (v_1 + u) - t_2 (v_2 + u) = u (t_1 - t_2)$~~

~~$t_1 \cdot v_1 - t_2 \cdot v_2 = u (t_2 + t_1 + t_1 - t_2)$~~

√2

$f(2024) = ?$

$f(x) = |3x + 9| - |3x + 2| + 7 \quad x \in [-2; 0]$

$f(x+3) - 6 \leq f(x) \quad f(x+2) - 9 \geq f(x)$

√3

~~$36 \sin(x + \sin x) \sin(x - \sin x) + 9 = \sqrt{6}^2$~~

~~$36 (\sin x \cdot \cos \sin x + \sin \sin x \cdot \cos x) \cdot (\sin x \cdot \cos \sin x -$~~

~~$\sin \sin x \cdot \cos x) + 9 = \sqrt{6}^2$~~

~~$36 ((\sin x \cdot \cos \sin x)^2 - \sin x \cdot \cos \sin x \cdot \sin \sin x \cdot \cos x +$~~

~~$\sin \sin x \cdot \cos x \cdot \sin x \cdot \cos \sin x - (\sin \sin x \cdot \cos x)^2)$~~

~~$+ 9 = \sqrt{6}^2$~~

~~$36 ((\sin x \cdot \cos \sin x)^2 - (\sin \sin x \cdot \cos x)^2) + 9 = \sqrt{6}^2$~~

~~$36 \sin x - 36 \cos \sin x$~~

~~100 - 6 - 100 = 600~~ $100 = 6x$ $\frac{-100}{6} \mid \frac{6}{176}$ *учитывая*

~~1~~ $\frac{1}{6} = \frac{x}{100}$ $\frac{40}{-36}$ $\frac{1}{1}$

$36 \sinh(x + \sinh x) - 36 \sinh(x - \sinh x) + 0 = \sqrt{u}^{-2}$

~~$\sqrt{u} \sinh x = t$~~

~~$36 = t \sinh x$~~

$36 ((\sinh x + \cosh \sinh x)^2 - (\sinh \sinh x + \cosh x)^2) + 0 = \sqrt{u}^{-2}$

~~$\sqrt{u} \sinh x = t$~~

~~$36 (t^2 + \cosh^2 t) - (t^2 + \cosh^2 t) = \sqrt{u}^{-2}$~~

$\sinh \sinh x = x$

$\sqrt{1}$

A-1 - скорость беспилотника

B-2

$u = 2 \text{ м/с}$ (скорость ветра)

$l = 900$ (~~расстояние~~ на начальном расстоянии пролетов)

V_1 и V_2 - скорости беспилотников A-1 и B-2

$t(B-2) - t(A-1) = 900 \text{ м} = t_2 - t_1$

~~$t_1(V_1 - u) - t_2(V_2 - u) = l$~~

$t_1(V_1 - u) - t_2(V_2 - u) = l$

$t_1 V_1 - t_1 u - t_2 V_2 + t_2 u = l$

$t_1 V_1 - t_2 V_2 = l + t_1 u - t_2 u \quad | : -1$

$-t_1 V_1 + t_2 V_2 = -l + t_1 u - t_2 u$

~~$t_2 V_2 - t_1 V_1 = -l + u(t_1 - t_2)$~~

$t_2 V_2 - t_1 V_1 = -l + u(t_1 - t_2)$

$t_2 V_2 - t_1 V_1 = -l + u t$

Чертова

~~6x = 6~~
~~6x + 9 = 6x + 9~~
 $6x + 9 - 6x - 2 = 6 - 6$

~~6x = 6~~

$6x + 9 - 6x - 2 = 900 - 2 \cdot 400$

$6x + 9 - 6x - 2 = 100$

Ответ: ~~6~~ человек А - 1 пролетит дальше на 100 м

$\sqrt{2}$

$f(2020) = ?$

$f(x) = (3x + 4) - |3x + 2| + 7 \quad x \in [-2; 0]$

$f(x+3) - 6 \leq f(x) \quad f(x+2) - 4 \geq f(x)$

+ -

$3x + 4 + 3x - 2 + 7 = 0$

$6x + 9 = 0$

$6x = -9$

$x = -\frac{3}{2}$

ВАЖ

- +

$-3x - 4 - 3x + 2 + 7 = 0$

$-6x - 2 + 7 = 0$

$-6x = -5$

$x = -\frac{5}{6}$

- -

$-\frac{3}{2} - 4 + 3x - 2 + 7 = 0$

$1 \neq 0$ - не подходит

~~$f(2020) =$~~

$f(2020) - 6 \leq f(2020)$

$f(2020) \leq f(2020)$

+ +

$3x + 4 - 3x + 2 + 7 = 0$

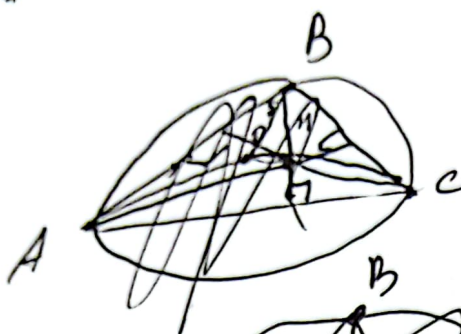
$73 \neq 0$ - не подходит

$f(2022) \geq f(2020)$

№5

Упрости

$$f(x+3) \leq f(x) + 6$$



$$f(x+3) \leq -\frac{9}{6} + 6$$

$$f(x+3) \leq 4,5$$

$$f(x+2) - 4 \geq f(x)$$

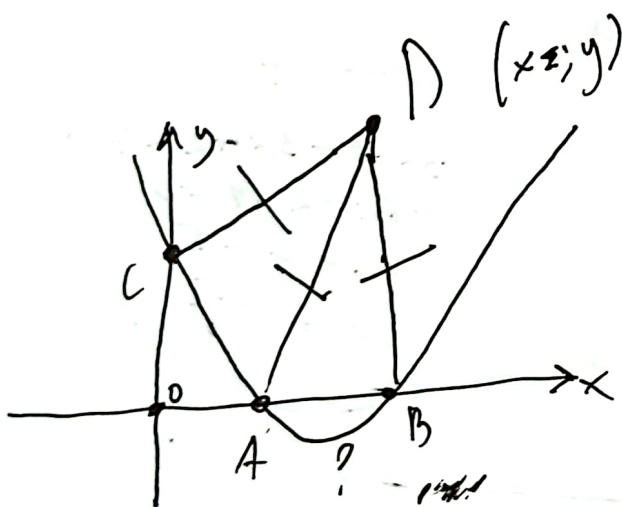
$$f(x+2) \geq f(x) + 4$$

$$f(x+2) \geq -\frac{9}{6} + 4$$

$$f(x+2) \geq -5,5$$

$$f(x+2) \in [-5,5; 4,5]$$

$$y = x^2 + px + q$$



$$x^2 + y^2 = 2027$$

$$\begin{array}{r} 99 \\ \times 99 \\ \hline 891 \\ 891 \\ \hline 9801 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 99 \\ \times 79 \\ \hline 891 \\ 777 \\ \hline 7779 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 77 \\ \times 77 \\ \hline 5389 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 94 \\ \times 94 \\ \hline 376 \\ 846 \\ \hline 8836 \end{array}$$

31-45-46-17
(162.2)

$$2021 = \del{1000} \del{20} = 40$$

$$2021 - 400 = 1621$$

Умнож

$$\begin{array}{r} \times 47 \\ 47 \\ \hline 764 \\ \hline 1681 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \del{2321} \\ - 7681 \\ \hline 340 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 27 \\ 27 \\ \hline 42 \\ \hline 991 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 99 \\ 99 \\ \hline 796 \\ \hline 2401 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 98 \\ 98 \\ \hline 384 \\ 792 \\ \hline 2304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 90 \\ 2021 \\ 991 \\ \hline 7580 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 96 \\ 96 \\ \hline 276 \\ \del{677} \\ 784 \\ \hline 2176 \end{array}$$

f(2029) - ?

упрощение

$$f(x) = |3x+4| - |3x+2| + 9$$

$$x \in [-2; 0]$$

$$f(x+3) - 6 \leq f(x) \quad \text{и} \quad f(x+2) - 13 \geq f(x)$$

+ -

$$3x+4+3x-2+9=0$$

$$6x = -9$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

- +

$$-3x-4-3x+2+9=0$$

$$-6x = -5$$

$$x = \frac{5}{6}$$

+ +

$$3x+4-3x+2+9=0$$

$$9 \neq 0$$

- -

$$-3x-4+3x-2+9=0$$

$$7 \neq 0$$

~~f(2029) =~~

№7 Дано: Числовик

A-1 } - Флотилии беспилотников
B-2

$u = 2$ м/с (скорость ветра)

$L = 900$ (насколько дальше пролетит)

V_1 и V_2 (скорости беспилотников A-1 и B-2)

$$t_2(B-2) - t_1(A-1) = 900 \text{ см} = t_2 - t_1$$

$$t_1(V_1 - u) - t_2(V_2 - u) = L$$

$$t_1 V_1 - t_1 u - t_2 V_2 + t_2 u = L$$

$$t_1 V_1 - t_2 V_2 = L + t_1 u - t_2 u$$

$$t_1 V_1 - t_2 V_2 = L - u t$$

$$t_1 V_1 - t_2 V_2 = 900 - 2 \cdot 900$$

$$t_1 V_1 - t_2 V_2 = 100$$

Какая может пролететь
дальше и на сколько,
при заданных скоростях?

Ответ: беспилотник A-1 пролетит дальше на 100 м

Дано:

$$\sqrt{2} \quad f(x) = |3x+4| - |3x+2| + 7 \text{ при } x \in [-2; 0]$$

$$f(x+3) - 6 \leq f(x) \text{ и } f(x+2) - 4 \geq f(x)$$

$$f(2024) = ?$$

Решение

$$f(2027) = f(x+3) - 6 \leq f(x) \leq f(x+2) - 4$$

$$f(-7) = 7, \quad h = 675$$

$$f(2024) \leq f(-7) + 675 - 6 = 4057$$

$$f(2029) = f(x+2) \geq f(x) + 4 \geq f(x+2) + 4$$

$$h = 7072, \quad f(0) = 9$$

$$f(2024) \leq f(0) + 7072 - 4 = 4057$$

получаем: $4057 \leq f(2024) \leq 4057$

Ответ: 4057

Учитывая

~~1/3~~
 $\sqrt{3}$

$$36 \operatorname{sh}(x + \operatorname{sh} x) \operatorname{sh}(x - \operatorname{sh} x) + 9 = \sqrt{v}^2$$

$$\text{Сумма корней} \in \left[\frac{\sqrt{v}}{6}; \frac{7\sqrt{v}}{4} \right]$$

Решение

Известно

$$2 \operatorname{sh} 2 \operatorname{sh} B = \cos(L - B) - \cos(L + B) \Rightarrow \textcircled{*} \text{ следует}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sh}(x + \operatorname{sh} x) \cdot \operatorname{sh}(x - \operatorname{sh} x) =$$

$$= \frac{1}{2} (\cos(x + \operatorname{sh} x - x + \operatorname{sh} x) - \cos(x + \operatorname{sh}^2 x + x - \operatorname{sh}^2 x))$$

$$= \frac{1}{2} (\cos(2 \operatorname{sh} x) - \cos 2x)$$

$$\textcircled{*} \Rightarrow 18 (\cos(2 \operatorname{sh} x) - \cos 2x) = \sqrt{v}^2 - 9$$

$$\cos(2 \operatorname{sh} x) - \cos 2x = \frac{\sqrt{v}^2}{18} - \frac{1}{2}$$

$$a \in [-1; 1]$$

$$\cos 2a - 1 + 2a^2 = \frac{\sqrt{v}^2}{18} - \frac{1}{2}$$

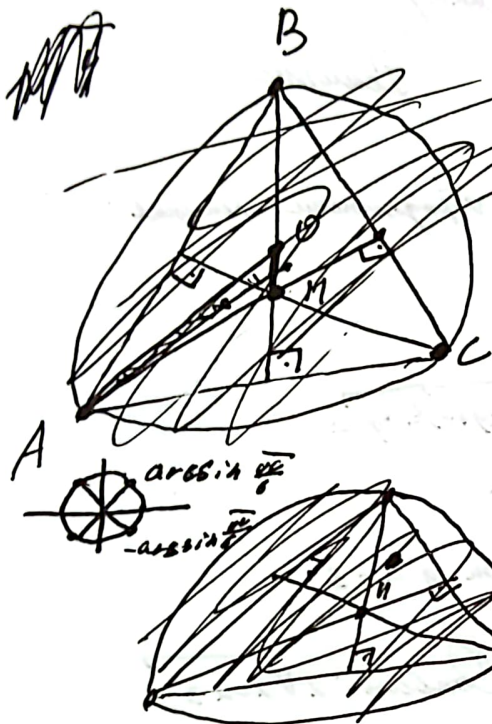
проверим монотонность

f(a)

$$f'(a) = 4a - 2 \operatorname{sh} 2a \quad \text{рациональная,}$$

Числовит

$f(-a) = f(a) \Rightarrow \uparrow$ при $a \in [0; 7]$; \downarrow при $a \in [-7; 0]$
 \Rightarrow на отрезке $[-7; 7]$ можно найти
 подобранный 2 корня, других не будет

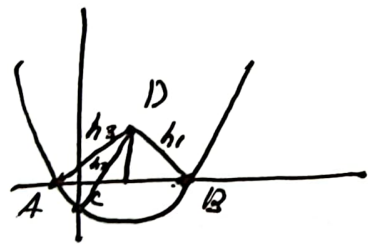


~~СД АОН~~
~~СД ВОП~~
 $\cos(2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{6}) - 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{1}{2}$
 Верно $a = \frac{\sqrt{6}}{6}$
 $\cos(2 \cdot (-\frac{\sqrt{6}}{6})) - 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{1}{2}$
 Верно $a_1 = \frac{\sqrt{6}}{6}$ $a_2 = -\frac{\sqrt{6}}{6}$

$x = \pm \arcsin \frac{\sqrt{6}}{6} + \sqrt{6}h; h \in \mathbb{Z}$
 $\frac{\sqrt{6}}{6} \leq \pm \arcsin \frac{\sqrt{6}}{6} \leq \frac{\sqrt{6}}{6}$
 Проверим:
 1) $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{6}$
 2) $2\sqrt{6} - \arcsin \frac{\sqrt{6}}{6}$
 3) $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{6} + \sqrt{6}$
 $\sqrt{\frac{3}{2}} < \frac{1}{2} - \text{ложно} \Rightarrow \text{не берем}$

Ответ: $x = \pm \arcsin \frac{\sqrt{6}}{6} + \sqrt{6}h; h \in \mathbb{Z}$
 Сумма корней равна $2\sqrt{6} + \arcsin \frac{\sqrt{6}}{6}$

$y = x^2 + px + q$



$\sqrt{5}$
 $h_1 = h_2 = h_3$
 $D(x_1; y_1)$
 $x_1^2 + y_1^2 = 2027$
 $AB_{\max} = ?$
 $\Delta ADB - \text{равнобедренный} \Rightarrow$
 $x_1 - \text{сердце } AB \Rightarrow$
 $x_1 = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 2x_1 = x_A + x_B$
 $h_1 = \sqrt{(x_B - x_1)^2 + (y_B - y_1)^2}; y_B = 0$
 $h_2 = \sqrt{(x_C - x_1)^2 + (y_C - y_1)^2}; x_C = 0$
 $h_3 = \sqrt{(x_A - x_1)^2 + (y_A - y_1)^2}; y_A = 0$

\Rightarrow
 $(x_B - x_1)^2 + y_1^2 = x_1^2 + (y_C - y_1)^2$
 $x_1^2 + (y_C - y_1)^2 = (x_A - x_1)^2 + y_1^2$
 $x_B^2 - 2x_B x_1 + x_1^2 + y_1^2 = x_1^2 + y_C^2 - 2y_C y_1 + y_1^2$
 $x_B^2 - 2x_B x_1 = y_C^2 - 2y_C y_1 \Rightarrow x_B^2 - x_B(x_A + x_B) = y_C^2 - 2y_C y_1 \Rightarrow$
 $x_B^2 - x_B x_A - x_B^2 = y_C^2 - 2y_C y_1 \Rightarrow y_C^2 - 2y_C y_1 + x_B x_A = 0$
 или иначе, это $\begin{cases} x_A + x_B = -p \\ x_A \cdot x_B = q \end{cases} \Rightarrow y_C^2 - 2y_C y_1 + x_B x_A = 0$
 $q - 2y_1 y_1 + y_1^2 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{q + y_1}{2}$
 $x_A + x_B = -p \Rightarrow x_1 = -\frac{p}{2}$
 $(\frac{q+y_1}{2})^2 + \frac{p^2}{4} = 2027$
 $\Rightarrow (q+y_1)^2 + p^2 = 8108$

Дано: Числовая

$\angle D = \angle A = \angle B = 90^\circ$

(i) $D(x, y); x^2 + y^2 = 2027$

$y = x^2 + px + q$

максимум AB - ?

Решение

Используем параметр:

Нужно найти AB_{\max}

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + 0^2} = |x_B - x_A| = \sqrt{p^2 - 4q} = \sqrt{2027 - (q+7)^2 - 4q} =$

$\sqrt{2027 - q^2 - 27q - 4q} = \sqrt{2027 - (q^2 + 6q + 9 - 9) - 7} =$

$\sqrt{2023 + 9 - (q+3)^2} = \sqrt{2032 - (q+3)^2} \Rightarrow \max \text{ при } q = -3$

$\Rightarrow AB_{\max} = \sqrt{2092} = 2\sqrt{2023}$

$\sqrt{6}$

Дано:

Ответ: $2\sqrt{2023}$

$|2[\text{Лег} a] + 7|^x = [\text{Лег} a]^2 + 2$

x - рационал. $[\text{Лег} a]$ - целая часть числа a

a - ?