0 228366 940000

22-83-66-94
(156.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Покори Воробьёвы Горы"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Мухиной Полины Ильиничны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«07» 04 2024 года

Подпись участника

Шифр работы:	22-83-66-94 (156.1)									M
Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Σ**	**Σ прописью**
Оценка	15	15	15	15	5	15			80	Восемьдесят

80 (восемьдесят)

22-83-66-94
(156.1)

Черновик

№1

156	2
78	2
39	13
3	3

$156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$

$390 \mid 130$

$390 = 3 \cdot 130 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$

312	3
104	4
26	13
2	2

$312 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13$

$\times 13$
6
78

кол-во букетов - делитель каждого из чисел

нужен ~~нод~~

$2 \cdot 3 \cdot 13 =$ 78 букетов

~~86~~ по 2 х, 4 т, 5 р

№2

20.04.24

будет ли 6 гч?

~~05.24~~
11.24

..24

~~2 в месяце~~

~~14.12.24~~

2 в дне

2. .24

2 . .24

Смотрим по месяцу

в апр. уже не будет

06, 07, 08, 09, 10 - уже 4 разл. цифры

24.11.24

Черновик

$\overline{aa} \vdots 11$ $\overline{bcb}$ $\Rightarrow \overline{bcb} \vdots 11$

~~$\overline{deed}$~~ $\vdots 11$

$100 1 d + 110 e =$

$= 91 d + 11 e$?

$2b - c \vdots 11$

b и c цифры

b побольше

если $b < 9$ то не получится

$= 11a$

$=$

~~$11a + x = 91d + 11e$~~

$b = 9$ $18 - 7 = 11$

$979 \vdots 11$

~~от 22 до 99~~

1 ок. на 1 $\Rightarrow$ 22

$$\begin{array}{r} 979 \\ +\ 22 \\ \hline 1001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 979 \\ +\ 22 \\ \hline 1001 \end{array}$$

1

9а, оу из 979 + 22

$\boxed{N{=}5}$ подходящие, нужно 18

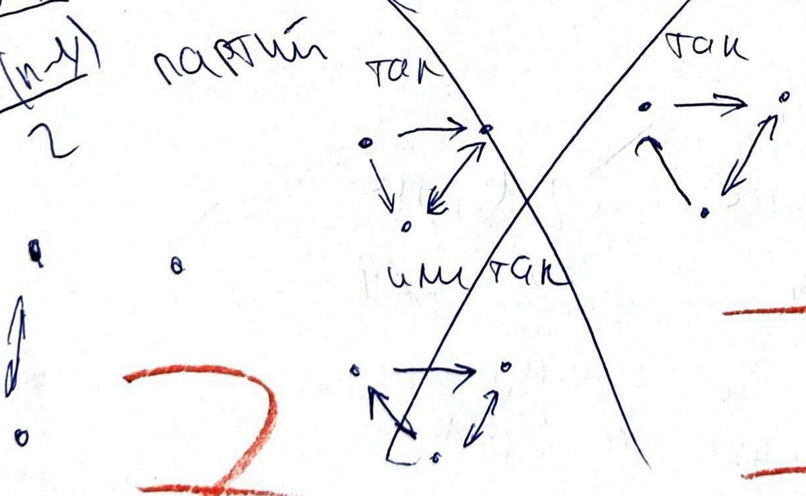
1	2	3	4			1	3	4	5
1	2	3	5	4		1	3	5	7
1	2	3	6			1	3	4	6
1	2	3	7			1	3	4	7
1	2	4	5						
1	2	4	6						
1	2	4	7	5					
1	2	5	6						
1	2	5	7						

5

14

$\boxed{N{=}4}$

$\frac{n(n-1)}{2}$ партий



22-83-66-94 (156.1)

Черновик

$C_5^2 = \frac{5\cdot4}{2} = 10$

$C_4^2 = \frac{4\cdot3}{2} = 6$

1	2	3	4	5	6	7
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7

– алмазы – S_a

– S_b

Пусть $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq a_6 \geq a_7$

$a_1+a_2+a_3+a_5 \geq a_4+a_6+a_7$

$a_1+a_2+a_3+a_5 \geq a_4+a_6+a_7$

какие 4 точно всегда можно брать?

a_1 всегда, ~~a_7 никогда~~ Σ_4 была больше Σ_3

$a_1+a_3+a_4+a_5$

$1+\dots+7 = \frac{7\cdot8}{2} = 28$

7 6 5 4 3 2 1

$\frac{a\ a\ a\ a}{\geq a_i} \geq 500{,}5$

$2(a\ a\ a\ a) \geq 7a$

$C_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!\cdot4!} = \frac{7\cdot6\cdot5}{3!} = \boxed{35 \text{ четв.}}$

2a 2a 2a 2a ≥ a a a a a a a

104 103 102 101 3 2 1 – S = 400 + 16 = 416 половина 208

1 2 3 4 5 6 7

10^6 6 5 4 3 2 1 – половина $> 10^3$ должно быть 1

1 6 5 4 3 2 10^{10} $\frac{k}{2} > 10^5$ должно быть?

$a_1+a_2+a_3 \geq a_4+a_5+a_6+a_7$

107 106 105 104 103 102 101 $\frac{1}{2}\frac{700+28}{2} = 350+14 = 364$

107 106 105 104 3 2 1 $\frac{1}{2}\frac{400+28}{2} = 214$

1 2 3 104 105 106 107

~~$C_7^4 = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{3!} = 140$~~

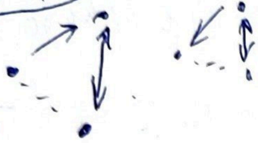
900 800 200 100 3 2 1 $S = 2000+6 = 2006$ $\frac{1}{2}$ 1003

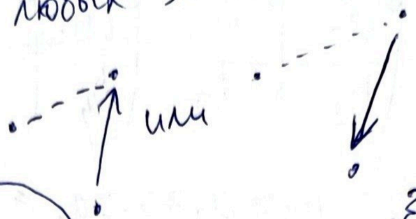
Черновик

№4

будем → если в., если ↔ -ничр.

для любых 3:



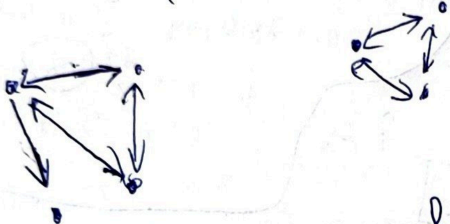


или

?

~~100 Σ очков~~

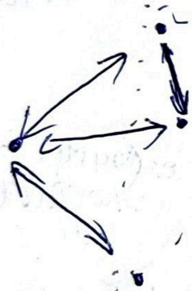
4:



$$\begin{array}{r} \times\, 78 \\ 5 \\ \hline 390 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 78 \\ 4 \\ \hline 312 \end{array}$$

~~для любых 3 сумма очков~~

Расм ~~конкретного~~ человека, который больше всех ничьих сыграл

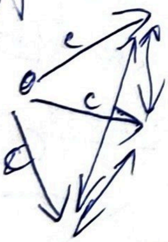


если он сыграл хотя бы 3, то плохо

Значит, максимум 2 у любого.

Пусть победы — синие, ничьи красные.

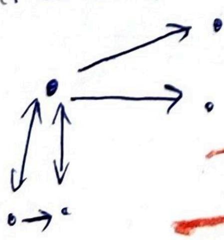
От



плохо

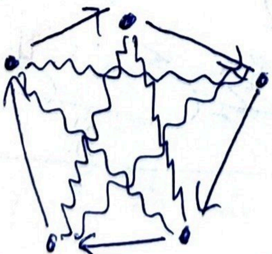
От каждого не более 2 с и 2 к — не более 4 ребер ⇒ человек максимум 5:

Пример



— поб

~ н



22-83-66-94
(156.1)

Чистовик

№1

Пусть было x букетов, в каждом из которых a_1 хризантем, a_2 тюльпанов, a_3 роз

Тогда:

$$\left.\begin{aligned} a_1x &= 156 \\ a_2x &= 312 \\ a_3x &= 390 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x \text{ делитель } 156, 312, 390$$

Требуется найти наибольшое возможное $x \Rightarrow$

$\Rightarrow x$ - НОД$(156, 312, 390) = 78$

Тогда в каждом букете по 2 хризантемы, 4 тюльпана, 5 роз

Ответ: 78 букетов

№2

Рассмотрим, встретится ли такая дата в 2024 году.

В апреле такой даты больше не будет. В 05, 06, 07, 08, 09, 10 месяцах также не будет, так как уже используются 4 различные цифры. В 11 месяце: __.11.24 такая дата будет: 24.11.24 (причем единственная). Ясно, что она ближайшая, так как в 2024 году больше до нее быть не могло.

Ответ: 24.11.24

1 из 5

Чистовик

№3

Да, существуют:

$22 + 979 = 1001$

Ответ: да, 22 и 979

№4

Рассмотрим конкретного человека.

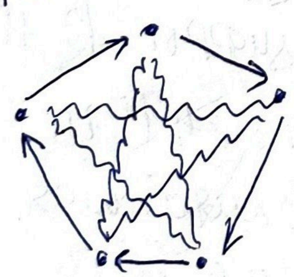
Предположим, ~~он~~ у него хотя бы 3 ничьих с какими-то людьми 1, 2, 3

тогда у 1 и 2, 2 и 3, 1 и 3 не ничья (так как для любой 3 игроков есть хотя бы 1 игра с победителем). Значит, у каждого человека максимум 2 ничьи

Аналогично доказывается, что каждый сыграл максимум 2 игры с победителем.

То есть, каждый человек сыграл не более $2+2 = 4$ игр $\Rightarrow$ всего максимум 5 человек

Пример



~ – ничьи

→ – игры с победителем

Ответ: 5 человек

2 из 5

Черновик

№5

$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = \boxed{20}$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad \boxed{a_6 \quad a_7}$

$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

$C_7^4 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$

1	2	3	4
1	2	3	5
1	2	3	6
1	2	3	7
1	2	4	5
1	2	4	6
1	2	4	7
1	2	5	6
1	2	5	7
1	3	4	5
1	3	5	7
1	3	4	6
1	3	4	7

14

$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq b_4 \geq b_5 \geq b_6 \geq b_7$

$1^2 + 2^2 = \sqrt{5}$

возьмем $\boxed{\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}}$

3 кор

2 боб

10 9 0

$C_7^3 = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} = 7 \cdot 5 \cdot 4$

$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 7 \cdot 5$

$a_1 \; a_2 \; a_3$

$b_1 \; b_2 \; b_3$

10 9 4

~~10 9 3~~

10 9 4

23

11,5

(11)

$C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \qquad \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} = $

$a_2 + a_3 \leq 2a_4$

№6

в выпуклом n угольнике максимум 3 острых угла

$<1 \Rightarrow$ наиб. $\Rightarrow$ обе стороны <1

не больше 6 нужен пример

Г П

Черновик

$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq a_6 \geq a_7$

$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq b_4 \geq b_5 \geq b_6 \geq b_7$

плохо когда $a_1 - b_6$

$a_2 - b_7$

7 6 5 4 3 2 1

Контрпример:

10^6 10^6 10^6 4 3 2 1

1 2 3 4 10^6 10^6 10^6

$S = \frac{3 \cdot 10^6 + 10}{2} = 1{,}5 \cdot 10^6 + 5$

$S = \frac{3 \cdot 10^6 + 10}{2} = 1{,}5 \cdot 10^6 + 5$

10^6 10^6 10^6 10^6 10^6 2 1

1 2 10^6 10^6 10^6 10^6 10^6

$\frac{5 \cdot 10^6}{2} = 2{,}5$ млн

15

38

6 6 6 5 5 5 5

№6

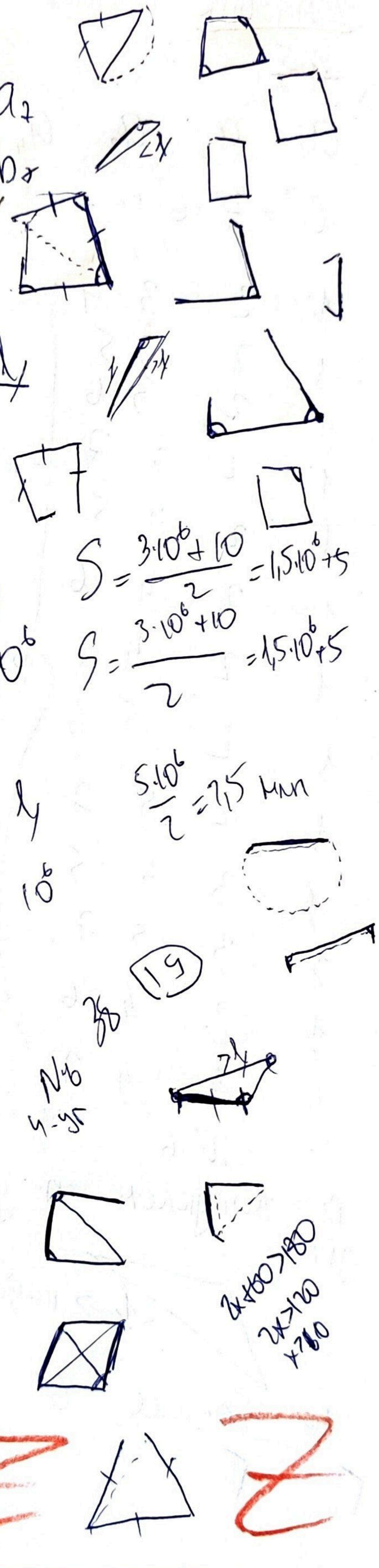
4-95

120 100 120

2x+100>180

2x>120

x>60



Чистовик

№6

Рассмотрим какую-нибудь сторону длины 1

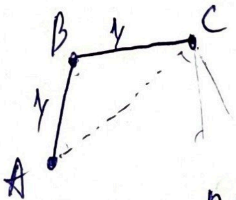
Если к ней прилегает тупой (или прямой) угол, то диагональ будет >1 (так как напротив наибольшего угла ~~лежит~~ наибольшая сторона) Значит, к стороне длины 1 прилегает 2 острых угла

Докажем лемму: в выпуклом n-угольнике не больше 3 острых углов.

Σ внешних углов выпуклого n-угольника $= 360°$. Если бы острых углов было хотя бы 4, то сумма смежных с ними уже больше $4 \cdot 90 = 360°$

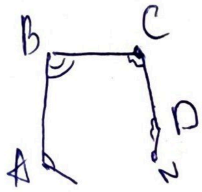
Значит, острых углов максимум 3

Значит, если в 2024-угольнике и есть вторая сторона длины 1, то она смежная с первой (иначе было бы 4 острых угла)



~~При этом угол между этими двумя сторонами $<60°$ (Если бы он был больше, то $\angle BCA + \angle CAB < 120° \Rightarrow$ один из углов $<60° \Rightarrow AB$ или AC наименьшая сторона $\Rightarrow AC > BC = 1$ или $AC > AB = 1$)~~

Предположим, есть третья сторона $= 1$. Она по аналогичным причинам прилегает к AB или BC (будем считать, что к BC)



Тогда $\angle MAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDN$ - острые - противоречие

Значит, максимум 2 стороны $= 1$

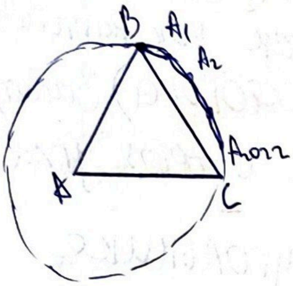
3 из 5

№6 (продолжение)

Пример

проведем окр. с центром в т. A, r=AC

ABC-равностор, дугу BC



разделим на 2022 равные части и соединим соседние точки отрезками

тогда $AA_1 = AA_2 \ldots = AA_{2022} = b \leq b$

$A_n A_m < BC = b$

$B A_n < BC = b$

$C A_n < BC = b$

Ответ: 2 стороны

4 из 5

Черновик

$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq a_6 \geq a_7$

$b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5 \quad b_6 \quad b_7$

$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \leq b_5 + b_6 + b_7$

1 2 3 4
1 2 3 5
1 2 3 6
1 2 3 7
1 2 4 5
1 2 4 6
1 2 4 7
1 2 5 6
1 2 5 7
1 3 4 5
1 3 4 6
1 3 4 7
1 3 5 7
1 3 5 6

14

$14b_1 + 9b_2 + 9b_3 + 7b_4 + 7b_5 + 5b_6 + 5b_7 \leq$

$\leq 5b_2 + 5b_3 + 7b_4 + 7b_5 + 9b_6 + 9b_7$

$14b_1 + 4b_2 \leq 4b_6 + 4b_7$

$7b_1 + 2b_2 \leq 2b_6 + 2b_7$

№5

Пусть в 1, 2 .. 7 королевствах добывают

$a_1 \geq a_2 \geq .. \geq a_7$ алмазов и $b_1, b_2, b_3 .. b_7$ золота

При таком упорядочивании можно выбрать 14 четверок, которые точно производят не менее 50% алмазов

~~а~~ это ~~деревни~~ королевства:

1 2 3 4
1 2 3 5
1 2 3 6
1 2 3 7
1 2 4 5
1 2 4 6
1 2 4 7
1 2 5 6
1 2 5 7
1 3 4 5
1 3 4 6
1 3 4 7
1 3 5 6
1 3 5 7

~~Аналогично~~

$b_1, b_2 .. b_7$ тоже можно как-то упорядочить и выбрать 14 четверок которые точно подходят

При этом, если какие-то 2 четверки совпадут (т.е. это будут 4 одинаковых ~~деревни~~ королевства), то условие будет выполняться

Б из 5