(+1) [signature]

17-43-92-25
(162.3)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

дешифр

Вариант А-4

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Золотаревой Екатерины Алексеевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«7» апреля 2024 года

Подпись участника
Золотарева

95 (девяносто пять) Ануш ЛИСТ-ВКЛАДЫШ черновик

17-43-92-25

А1 x $y+900$

Б-2 $x+400$ y

$36\sin(x+\sin x)\sin(x-\sin x)+9=\pi^2$

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$

$\frac{y+900}{x}$ м/с $\frac{y}{x+400}$ м/с

$36\left(\frac{\cos(2\sin x)-\cos(2x)}{2}\right)+9=\pi^2$

$\left(\frac{y+900}{x}+2\right)\cdot x=y+900+2x$

$18(\cos(2\sin x)-\cos(2x))+9=\pi^2$

$\left(\frac{y}{x+400}+2\right)(x+400)=y+2x+800$

$f(x)=|3x+4|-|3x+2|+7$ при $x\in[-2,0]$

$\forall x\in\mathbb{Z}$ $f(x+3)-6\le f(x)$ $f(x+2)-4\ge f(x)$

$f(2024)-?$

$\cos(2t)=\cancel{2\cos}\ \cos^2t-\sin^2t=2\cos^2t-1$

$\cos(2\sin x)=2\cos^2(\sin x)-1$

$\cos 2x=2\cos^2x-1$

$3x+4=0$ $x=-\frac{4}{3}$

$3x+2=0$ $x=-\frac{2}{3}$

$36(\cos^2(\sin x)-\cos^2x)+9=\pi^2$

$f(t)=\cos^2t+t^2$

$f'(t)=2\cos t\cdot(-\sin t)+2t=2(t-\sin t\cos t)$

$t-\sin t\cos t=0$

$2t=\sin 2t$

$x=\sin x$

$x<-\frac{4}{3}$

$f(x)=-3x-4-(-3x-2)+7=-3x-4+3x+2+7=5$

$f(x+1)=f(x)+2$

$t\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$\cos^2t$

t^2

$1-\sin^2t$

$-\frac{4}{3}\le x<-\frac{2}{3}$

$f(x)=-3x-4-3x-2+7=-6x+1$

$f(0)=9$

$x>\sin x$

$x\ge-\frac{2}{3}$

$f(-1)=6+1=7$

$2t-\sin 2t>0$

$f(x)=3x+4-3x-2+7=9$

$f(-2)=5$

$f(x+3)\le f(x)+6$

$f(0)+2\cdot 2024=$

$f(x+2)\ge f(x)+4$

$=4048+9=4057$

$\boxed{f(1)=11}$

$f(1)\le f(-2)+6=11$

$\sin x=t$

$\sin^2x=t^2$ $\cos^2x=1-t^2$

$f(1)\ge f(-1)+4=11$

$36(\cos^2t+t^2-1)+9=\pi^2$

$t\in\mathbb{Z}$ и $t\ge0$

$f(t+1)=f(t)+2$

$9\pi^2>\pi^2>27$

$t-1\to t$

$8\pi^2>27$

$\pi^2>\frac{27}{8}$

$f(t)=f(t-1)+2$

$\boxed{t=\frac{\pi}{6}}$

$\pi^2\approx9$

$36\cos^2t+36t^2-27=\pi^2$

$36(\cos^2t+t^2)=\pi^2+27$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

демифф

№1.

Пусть А-1 продерж. в воздухе x секунд, тогда Б-2 продерж. в воздухе $x+400$ секунд. Пусть Б-2 пролетела y метров, тогда А-1 пролетела $y+900$ метров.
Скорость А-1 при встречном ветре $= \frac{y+900}{x}$ $\frac{м}{с}$, значит собств. скорость А-1 $= \frac{y+900}{x}+2$.
Скорость Б-2 при встреч. ветре $= \frac{y}{x+400}$, т.е. собств. скорость Б-2 $= \frac{y}{x+400}+2$. Тогда без ветра А-1 пролетит $\left(\frac{y+900}{x}+2\right)\cdot x =$ $= y+900+2x$, Б-2 пролетит $\left(\frac{y}{x+400}+2\right)\cdot$ $\cdot(x+400) = y+2x+800$. Т.к. $y+2x+900 >$ $> y+2x+800$, А-1 пролетит большее расстояние на $y+2x+900-y-2x-800=100$ метров.
Ответ: А-1, на 100 метров.

№2.

$f(x)=|3x+4|-|3x+2|+7$ при $x\in[-2,0]$
Отсюда $f(-2)=|-6+4|-|-6+2|+7=$ $=2-4+7=5$
$f(-1)=|-3+4|-|-3+2|+7=1-1+7=7$
$f(0)=|4|-|2|+7=4-2+7=9$.
Заметим, что $f(0)=f(-1)+2$ и $f(-1)=f(-2)+2$.

чистовик

дешифр

17-43-92-25 (162.3)

II случай $(2t+1\leq 0)$:

$2t+1\leq 0 \Rightarrow t\leq -1 \Rightarrow 2t+1\leq -1$.

Пусть $s=-t$ $(s\in\mathbb{N})$

$|2t+1| = |-2s+1| = 2s-1$.

$(2s-1)^x = t^2+2 = s^2+2$

x - рац. $\Rightarrow x=\frac{m}{n}$ $(m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N},\ (m,n)=1)$.

$s^2+2\geq 2s-1$, т.к. $s^2-2s+3=(s-1)^2+2\geq 0$

$2s-1\geq 1 \Rightarrow f(x)=(2s-1)^x$ неубывает.

$(2s-1)^1 \leq \underset{s^2+2}{\underbrace{t^2+2}} \Rightarrow x\geq 1$. (в частности $x>0 \Rightarrow m>0 \Rightarrow m\in\mathbb{N}$)

$(2s-1)^m = (s^2+2)^n$

Если $2s-1=1$, то $2s=2$ $s=1$.

$1^m = 3^n \Rightarrow 3^n=1 \Rightarrow n=0$ - противоречие

$2s-1\neq 1$

$2s-1\in\mathbb{N} \Rightarrow 2s-1$ делится на p - простое

$(s^2+2)^n \vdots p \Rightarrow s^2+2 \vdots p$

$\begin{cases} s^2+2 \vdots p \\ 2s-1 \vdots p \end{cases} \Rightarrow \underset{(s+1)^2}{\underbrace{s^2+2s+1}} \vdots p \Rightarrow s+1 \vdots p \Rightarrow$ (p-простое) $\Rightarrow \begin{cases} 2s+2 \vdots p \\ 2s-1 \vdots p \end{cases} \Rightarrow 3 \vdots p \Rightarrow p=3$.

Отсюда $2s-1=3^a$.

$s^2+2 = 3^{\frac{am}{n}} = 3^b$

$\begin{cases} s^2+2=3^b \\ 2s-1=3^a \end{cases} \Rightarrow (s+1)^2 = s^2+2s+1 = 3^b+3^a = 3^a(3^{b-a}+1)$

Т.к. $s^2+2\geq 2s-1$, $3^b\geq 3^a \Rightarrow b\geq a$.

$\left.\begin{matrix} 3^{b-a} \\ 3^{b-a}\vdots 3 \end{matrix}\right.$ (т.к. $b-a\in\mathbb{Z}$) $\Big\} \Rightarrow 3^{b-a}+1 \not\vdots\, 3$

черновик

Отсюда $v_3(s+1)^2 = v_3 3^a = a$ дешифр

$v_3(s+1) = \frac{a}{2}$

$v_3(2s+2) = \frac{a}{2}$ (т.к. $(2,3)=1$).

$2s+2 \vdots 3^{\frac{a}{2}}$

$2s-1 \vdots 3^a$

Если $\frac{a}{2} \geq 2$, то $2s+2 \vdots 3^2$ и $2s-1 \vdots 3^2$

$\Rightarrow 3 \vdots 3^2$ – противоречие.

Если $\frac{a}{2} = 0$, то ~~2s+1~~ $2s-1 = 3^0 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow s=1$

не подходит

Т.е. $\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a=2$

$2s-1 = 3^2 = 9$

$2s = 10 \Rightarrow s=5$.

$s^2+2 = 27$

$(2s-1)^x = t^2+2 = s^2+2$

$9^x = 27$

$3^{2x} = 3^3$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow s=5$ подходит

$s=5 \Rightarrow t=-5$.

Итого $\left[\begin{array}{l} t=-5 \\ t=1 \end{array}\right.$.

1) $t=1$.

$[\operatorname{ctg} a] = 1$

$1 \leq \operatorname{ctg} a < 2$

$\frac{1}{2} < \operatorname{tg} a \leq 1$

$a \in \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right] + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$

2) $t=-5$

$[\operatorname{ctg} a] = -5$

$-5 \leq \operatorname{ctg} a < -4$

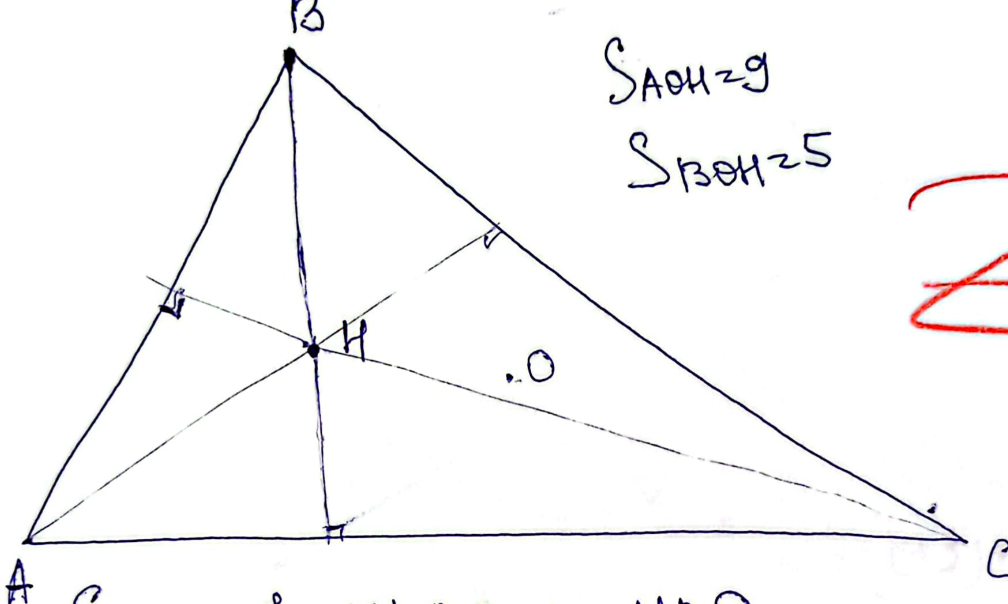
$-\frac{1}{4} < \operatorname{tg} a \leq -\frac{1}{5}$

$a \in \left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{4}\right), \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{5}\right)\right] + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$

Ответ: при $\alpha \in (\operatorname{arctg}\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}] + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\cup$ $\alpha \in (\operatorname{arctg}(-\frac{1}{4}), \operatorname{arctg}(-\frac{1}{5})] + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

№4.



$S_{AOH} = 9$

$S_{BOH} = 5$

$S_{AHO} = \frac{1}{2} AH \cdot AO \cdot \sin\angle HAO$

$S_{BHO} = \frac{1}{2} BH \cdot BO \cdot \sin\angle HBO$

$S_{CHO} = \frac{1}{2} CH \cdot CO \cdot \sin\angle OCH$

$S_{AHO} + S_{BHO} + S_{CHO} = \frac{1}{2} R \, (AH \cdot \sin\angle HAO + BH \cdot \sin\angle HBO + CH \cdot \sin\angle OCH)$

R - радиус опис. окр. $\triangle ABC$.

$$\left[\begin{array}{l} S_{COH} + S_{AHC} = S_{AHO} + S_{AOC} \\ S_{AOH} + S_{COH} + S_{ACH} = S_{AOC} \\ S_{AOH} + S_{AHC} = S_{CHO} + S_{AOC} \end{array}\right.$$

И аналогичные р-ва для B, C и A, B.

$\angle AHB = 180° - \angle C$

$\angle AOB = 2\angle C$

17-43-92-25 (162.3)

дешифр

Покажем что при $t \in \mathbb{Z}$ и $t \geq -2$ $f(t+1) = f(t)+2$.

Индукция по t

База ($t=-2$ и $t=-1$):

$f(-1) = f(-2)+2$ – верно

$f(0) = f(-1)+2$ – верно.

Переход ~~(t → t+1)~~: $(t-1, t \to t+1)$:

По предположению индукции:

$f(t) = f(t-1)+2$

$f(t+1) = f(t)+2$

Д-ть: $f(t+2) = f(t+1)+2$.

По условию: 1) для $x = t-1$: 1) $f((t-1)+3) = f(t+2) \leq f(t-1)+6 =$

$= f(t+1)+2$

2) для $x = t$:

2) $f(t+2)-4 \geq f(t)$

$f(t+2) \geq f(t)+4 = f(t+1)+2$

Откуда $\begin{cases} f(t+2) \leq f(t+1)+2 \\ f(t+2) \geq f(t+1)+2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(t+2) = f(t+1)+2$.

ч.т.д.

Значит $f(t+1) = f(t)+2$ (при $t \in \mathbb{Z}$ и $t \geq -2$)

$f(t+1) - f(t) = 2$ Применим рез. для $t = 0, \ldots, 2023$:

$\begin{cases} f(2024) - f(2023) = 2 \\ f(2023) - f(2022) = 2 \\ \vdots \\ f(1) - f(0) = 2 \end{cases}$ складываем уравн. $\Rightarrow f(2024) - \cancel{f(2023)} + \cancel{f(2023)} - \cancel{f(2022)} + \cancel{f(2022)} - \ldots - \cancel{f(1)} + \cancel{f(1)} - f(0) = 2 \cdot 2024$

$f(2024) - f(0) = 4048$

$f(2024) = 4048 + f(0) = 4048 + 9 = 4057$

Ответ: 4057.

черновик

дешифр

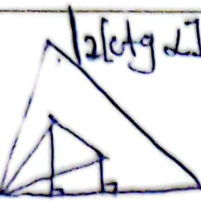
$\sqrt{2[ctg\,2\angle]+1}|^{x} = [ctg\,2\angle]^2+2$

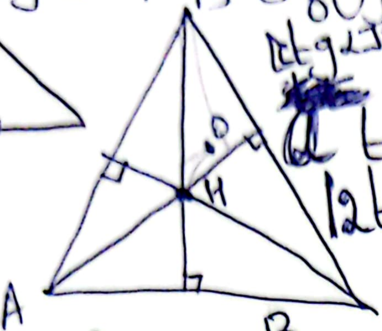
$8092-12=8080$

$[ctg\,2\angle]=t$

$a = \frac{\sqrt{8092}\pm\sqrt{8080}}{2} = \frac{\sqrt{2020}-\sqrt{2023}}{2}$

$\sqrt{2020}+\sqrt{2023}$





$t \in Z$

$|2t+1|^{x} = t^2+2$ $\quad \cos^2 t$

$2t+1 \in Z$ $\quad 2020$ $\quad 2023$

$\frac{\pi}{n}$ $\quad x=\frac{p}{q}$

$(2t+1)^{\frac{p}{q}} = (t^2+2)^{q}$

$2\sqrt{2023}$

$b = a+\sqrt{8092}$

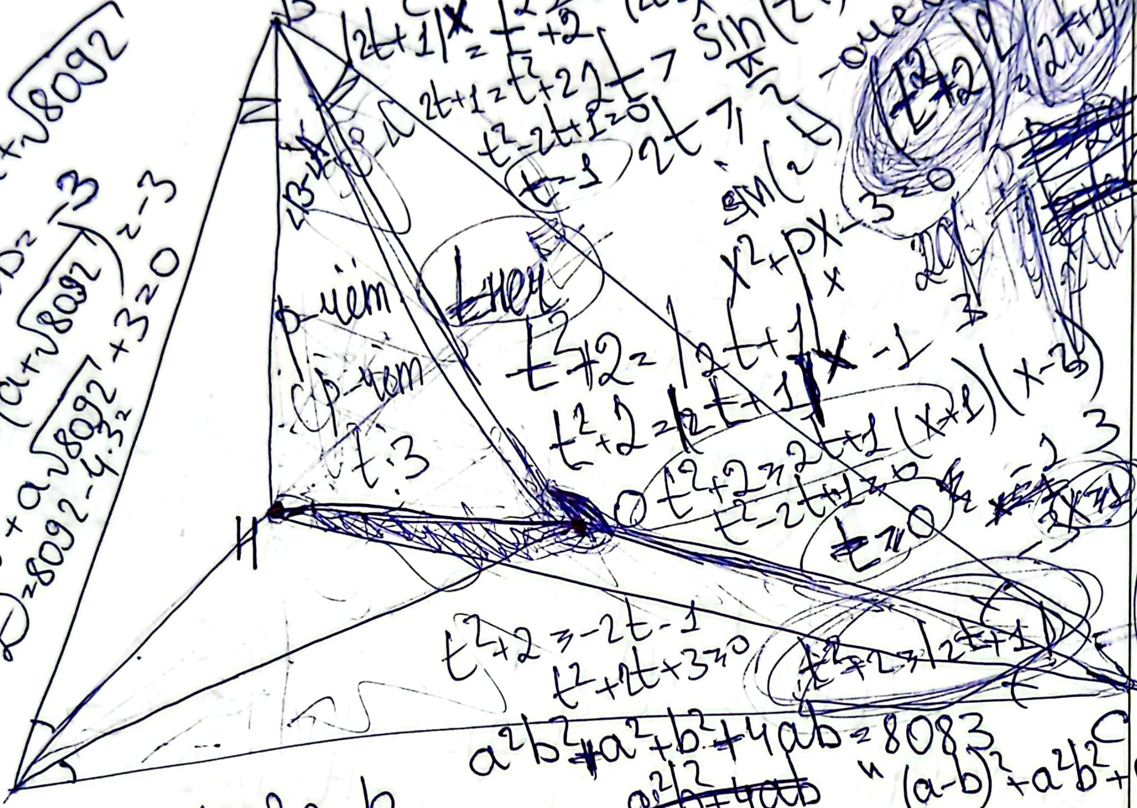
$ab=-3$

$a(a+\sqrt{8092})=-3$

$a^2+a\sqrt{8092}+3=0$

$D = 8092-4\cdot 3 =$

$\angle B - 180^\circ + 2\angle A = \angle A - \angle C$



$|2t+1|^{x} = t^2+2$

$2t+1=t^2+2$ $\quad t>1$ $\quad \sin\frac{\pi}{2}$

$t^2-2t+1=0$ $\quad 2t>1$

$t=1$ $\quad$ нет

$\sin(2t)$

$x^2+px-3=0$

p – чет

p – чет

$t^2+2 = |2t+1|^{x}$ $\quad x=1$

$t^2+2=|2t+1|$ $\quad (x+1)(x-3)$

$t:3$

$t^2+2=2t+1$ $\quad 3$

$t^2-2t+1=0$

$t=1$ $\quad x\neq 1$

$t^2+2=-2t-1$

$t^2+2t+3=0$

$t^2+2=|2t+1|$

$ab=-3$

$a^2b^2+a^2+b^2+4ab=8083$

~~a^2b^2+4ab~~ $\quad$ и $\quad (a-b)^2+a^2b^2+6ab$

$a^2b^2+6ab+9=$

$a^2b^2+6ab=-9$

$(a-b)^2 \leq 8092$

$(a-b)\leq\sqrt{8092}$

$90^2=8100$

$89^2=$

$=(90-1)^2=$

$=8100-180+1$

$180^\circ - 2\angle B$

$\angle A-(180^\circ-2\angle B)=\angle A+2\angle B-180^\circ=\angle B-\angle C$

$|a-b|$ $\quad (a^2-2ab+b^2)$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\approx\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$ $\quad \frac{196}{100}$

$\frac{2}{3}$ $\quad \frac{7}{10}>\frac{\pi}{6}$

$y=x^2+px+q$

$\frac{(a+b)^2}{4}+y^2=2021$

$\frac{a^2b^2+2ab+1}{4}=2021$

$\frac{a^2+b^2+2ab}{4}$

$8084=a^2+b^2+a^2b^2+4ab$ $\quad +2>10\pi$

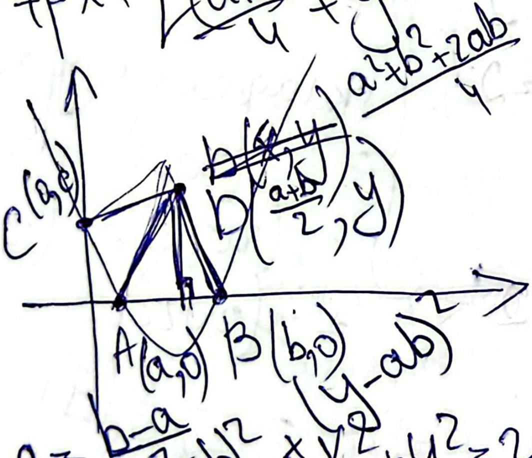
$\frac{\pi}{4}<4,2$

$BH\cdot BO\cdot \sin\angle HBO=$

$AB\cos\angle B$

$\frac{AB}{\sin\angle C}$

$BH=$



$x^2+px+q=(x-a)(x-b)$

$c=(0-a)(0-b)=$

$=ab$

$\frac{a+b}{2}-a=\frac{b-a}{2}$

$x^2+y^2=2021-2aby$

$\frac{(a-b)^2}{4}+y^2=\frac{(a+b)^2}{4}$ $\quad (y-ab)^2$

$\frac{a^2+b^2-2ab}{4}$ $\quad \frac{a^2+b^2+2ab}{4}$

$(x-a)^2+y^2$ $\quad (x-b)^2+y^2$

$a^2b^2+ab-2aby=0$

$ab(ab-2y+1)=0$

$ab=0$

$2y=ab+1$

дешифр

17-43-92-25 (162.)

№3

$$36\sin(x+\sin x)\cdot\sin(x-\sin x)+9=\pi^2$$

Т.к. $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$,

$$36\cdot\left(\frac{\cos(2\sin x)-\cos(2x)}{2}\right)+9=\pi^2.$$

$$18\cdot(\cos(2\sin x)-\cos(2x))+9=\pi^2$$

$$18\cdot(2\cos^2(\sin x)-\cancel{1}-2\cos^2x+\cancel{1})+9=\pi^2$$

$$36(\cos^2(\sin x)-\cos^2x)+9=\pi^2$$

Пусть $t=\sin x$ $(t\in[-1,1])$.

$t^2=\sin^2x \Rightarrow \cos^2x=1-\sin^2x=1-t^2$.

$$36(\cos^2(t)-1+t^2)+9=\pi^2$$

$$36(t^2+\cos^2(t))-36+9=\pi^2$$

$$36(t^2+\cos^2(t))=\pi^2+27$$

Заметим, что $t=\pm\frac{\pi}{6}$ – решение, т.к.

$36\left(\dfrac{\pi^2}{36}+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=\pi^2+36\left(\dfrac{\sqrt3}{2}\right)^2=\pi^2+36\cdot\dfrac{3}{4}=$

$=\pi^2+27$.

Функция $36(t^2+\cos^2(t))$ – чётная,

т.к. $36((-t)^2+\cos^2(-t))=36(t^2+\cos^2t)$. Поэтому

можно считать, что $t\geq0$.

$\cos^2(t)\geq0$ $\forall t$.

~~При $t\geq\frac{\pi}{4}$ $36(t^2+\cos^2t)\geq36\cdot\frac{\pi^2}{16}$~~

~~$=\frac{9\pi^2}{4}>\pi^2+27$ (т.к. $\frac{5\pi^2}{4}>27$)~~

~~Значит при $t\geq\frac{\pi}{2}$ решений нет.~~

~~Отсюда ищем решения при $t\in[0,\frac{\pi}{2})$.~~

~~($t=0$ – не реш., т.к. $36\neq\pi^2+27$).~~

~~Пусть $f(t)=t^2+\cos^2t$~~

~~Тогда $f'(t)$~~

При $t \geq \frac{\pi}{2}$ $\quad 36(t^2+\cos^2 t) \geq 36t^2 \geq \frac{36\pi^2}{4} = 9\pi^2 > \pi^2+27$

(т.к. $\pi^2 > 9$).

Значит при $t \geq \frac{\pi}{2}$ реш. нет.

Т.е. можно считать, что $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

($t=0$ – не решение, т.к. $36 \neq 27+\pi^2$).

Пусть $f(t) = t^2+\cos^2 t$

$f'(t) = 2t + 2\cdot\cos t\cdot(-\sin t) = 2t - 2\sin t\cos t =$

$= 2t - \sin 2t$.

Пусть $p = 2t$ $(p \in (0, \pi))$.

Покажем, что при $p \in (0, \pi)$:

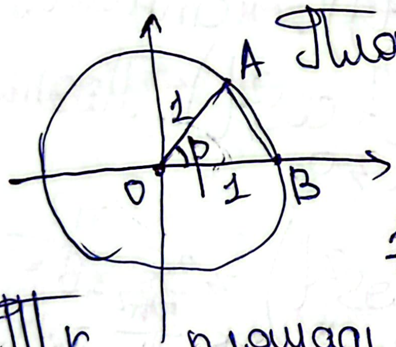
$p - \sin p > 0$

$p > \sin p$

При $p \geq \frac{\pi}{2}$ нер-во очевидно (т.к. $\sin p \leq 1 < \frac{\pi}{2}$)

При $p \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

Рассмотрим окр-ть радиуса 1 и отложим угол, равный p (см. рисунок).



Площадь сектора AOB равна $\frac{p}{2}$.

Площадь $\triangle AOB$ равна $\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot \sin p = \frac{\sin p}{2}$.

Т.к. площадь сектора > площади тр-ка

$\frac{p}{2} > \frac{\sin p}{2} \Rightarrow p > \sin p$.

Отсюда $f'(t) > 0$ при $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Т.е. $f(t)$ монотонно возр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ значение $\frac{\pi^2+27}{36}$ – const она принимает ≤ 1 раза.

Значит $t = \frac{\pi}{6}$ – единственное реш. при $t \geq 0$

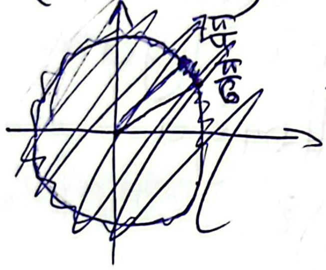
Отсюда (из чётности $f(t)$) $t=\pm\frac{\pi}{6}$ - ~~единств~~ все решения.

$t=\sin x$

$\sin x=\pm\frac{\pi}{6}$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\arcsin\frac{\pi}{6}+2\pi k \\ x=\pi-\arcsin\frac{\pi}{6}+2\pi k \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \sin x=-\frac{\pi}{6} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\arcsin-\frac{\pi}{6}+2\pi k \\ x=\pi-\arcsin-\frac{\pi}{6}+2\pi k \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$\left(\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}<\frac{2}{3}\right)$. ~~Отрезок $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}\right]$ включает всю окр-ть~~



$\frac{\pi}{6}>\frac{1}{2} \Rightarrow \arcsin\frac{\pi}{6}>\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$.

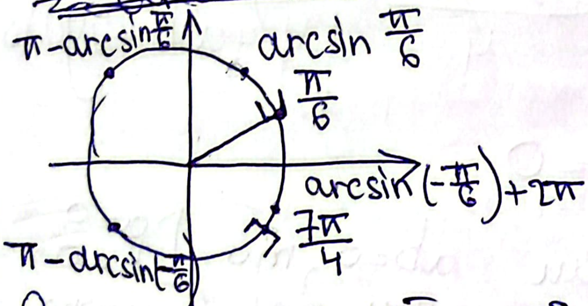
$\frac{\pi}{6}<\frac{7}{10}=\frac{1,4}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \arcsin\frac{\pi}{6}<\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4} \Rightarrow$

~~$\Rightarrow \arcsin\frac{\pi}{6}+2\pi$~~

$\arcsin-\frac{\pi}{6}>-\frac{\pi}{4}$

$\arcsin-\frac{\pi}{6}+2\pi>\frac{7\pi}{4}$



Сумма корней $\in\left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}\right]=\cancel{\arcsin\frac{\pi}{6}}+$

$+\pi-\cancel{\arcsin\frac{\pi}{6}}+\pi-\arcsin(-\frac{\pi}{6})=2\pi+\arcsin\frac{\pi}{6}$.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=\arcsin\frac{\pi}{6}+2\pi k \\ x=\pi-\arcsin\frac{\pi}{6}+2\pi k \\ x=-\arcsin\frac{\pi}{6}+2\pi k \\ x=\pi+\arcsin\frac{\pi}{6}+2\pi k \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$

сумма корней $=2\pi+\arcsin\frac{\pi}{6}$.

 чистовик

№5.

Пусть у A и B коорд. ~~(0, a)~~ $(a,0)$ и $(b,0)$ соотв. Тогда a и b - решения $x^2+px+q=0 \Rightarrow x^2+px+q=(x-a)(x-b)$.
Пусть у C коорд $(0,c)$. Тогда $c=(0-a)(0-b)=ab$. Т.к. A и B - различны, ~~А~~ $a\neq b$. Геом. место точек, равноудал. от A и B - сер. пер. к отр. AB - это прямая $x=\frac{a+b}{2}$. Значит т. D принад. этой прямой. Пусть у D коорд $\left(\frac{a+b}{2}, y\right)$. Тогда

$$y^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+(y-ab)^2$$

$$\cancel{y^2}+\frac{\cancel{a^2+b^2}-2ab}{4}=\frac{\cancel{a^2+b^2}+2ab}{4}+\cancel{y^2}+a^2b^2-2yab$$

$$ab+a^2b^2-2yab=0$$

$$ab(ab-2y+1)=0$$

Если $ab=0$, то $\left[\begin{array}{l}a=0\\ b=0\end{array}\right.$, значит у C коорд. $(0,0)$ и у одной из т. A, B коорд. $(0,0)$ противоречие, т.к. точки различны. Т.е. $ab\neq0$

~~I случай ($ab\neq0$)~~

$$ab-2y+1=0$$

$$2y=ab+1$$

$$y=\frac{ab+1}{2}$$

По условию

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+y^2=2021$$

$$\frac{a^2+b^2+2ab}{4}+\frac{a^2b^2+2ab+1}{4}=2021$$

$$a^2b^2+a^2+b^2+4ab+1=8084$$

 чистовик

дописать

$a^2b^2+a^2+b^2+4ab=8083$

Длина отр. $AB = |a-b|$.

$(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$.

$(a-b)^2+a^2b^2+6ab=8083$

$a^2b^2+6ab+9=(ab+3)^2\geq 0 \Rightarrow a^2b^2+6ab\geq -9$

$(a-b)^2\leq 8083+9=8092$

$|a-b|\leq\sqrt{8092}$.

Р-во достигается, когда $ab=-3$.

Т.е. $q=-3$ (т. Виета).

~~Например, при b = 2 и q = -3 : $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$ у A и B коорд. (-1, 0) и (3, 0), у C коорд. (0, -3), у D коорд. (1, -1).~~

НУО, считаем, что $b>a$

$\begin{cases} b-a=\sqrt{8092} \\ ab=-3 \end{cases}$

$b=a+\sqrt{8092}$

$a(a+\sqrt{8092})=-3$

$a^2+a\sqrt{8092}+3=0$..

$D>0 \Rightarrow \exists$ найдется a, удовл. усл.

и соотв. ему b. У т. C коорд. $(0,-3)$.

У точки D $\left(\frac{a+b}{2},\frac{ab+1}{2}\right)$. Значит

$\exists$ p и q, такие, что $|a-b|=\sqrt{8092}$.

$(p=-a-b)$! q $*$

*) Например, подойдут

$a=\sqrt{2020}-\sqrt{2023}$

$b=\sqrt{2020}+\sqrt{2023}$

$c=ab=-3$.

~~x^2+px+q~~

У D коорд. $(\sqrt{2020},-1)$

$(\sqrt{2020})^2+(-1)^2=2021$

$2023+1=2020+4 \Rightarrow$ D равноудалена от A, B, C.

Ответ: $\sqrt{8092}=2\sqrt{2023}$.

черновик

$3^a \quad 3^b$

$|2t$

$a^p = \boxed{b^q}$ $\quad (p,q)=1$

~~$a, b \in \mathbb{Z}$~~ $\quad a, b \in A$

$v_r\ a = kq \quad 2t+1$

$v_r\ b = kp \quad ((t-1)^2, 2t+1) = 1, 3, 9$

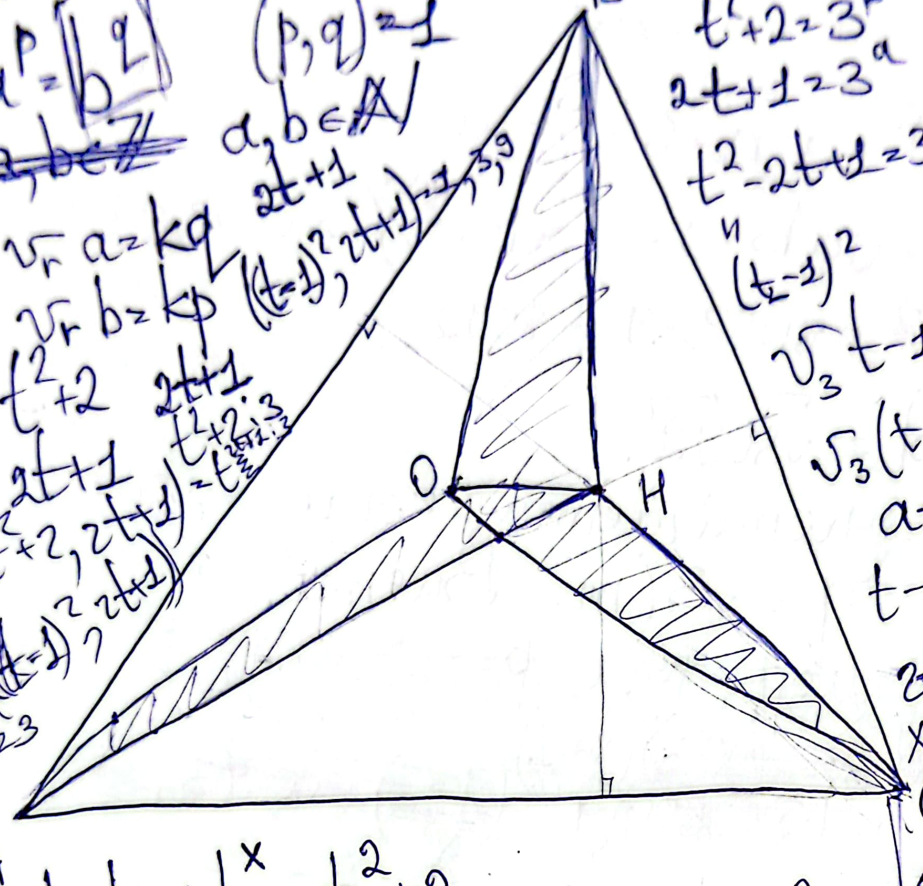
$t^2+2 \quad 2t+1$

$t^2+2 \vdots 3$

$2t+1$

$(t^2+2, 2t+1) = (t-1)^2, 2t+1)$

$p=3$



$t^2+2 = 3^b$

$2t+1 = 3^a$

$t^2-2t+1 = 3^b - 3^a$

$(t-1)^2 \quad 3^a(3^{b-a}-1)$

$v_3\ t-1 = x$

$v_3\ (t-1)^2 = 2x$

$a = 2x$

$t-1 \vdots 3^x$

$2t-2 \vdots 3^x$

$x=1$

или

$a=1$

$a=1$ или $a=2$

$2t+1=3 \quad 2t+1=9$

$2t=2 \quad 2t=8$

$t=1 \quad t=4$

$|2t+1|^x = t^2+2$

$x = \log_{|2t+1|} t^2+2$

$[ctg\,a] = t$

$t^2+2 \geq |2t+1|$

$|2t+1| \geq 1$

$x \geq 1$

$(t^2+2)^q = (2t+1)^p$

$3 \quad 3$

$9 \quad 18$

чистовик

№6

$|2[ctg a]+1|^x = [ctg a]^2+2$

Пусть $t = [ctg a]$, $t \in \mathbb{Z}$.

$|2t+1|^x = t^2+2$

x – рационален $\Rightarrow x = \frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ и $(m,n)=1$.

I случай $(2t+1 \geq 0)$:

$2t+1 \geq 0 \Rightarrow t \geq 0$ $(t \in \mathbb{Z}) \Rightarrow 2t+1 \geq 1$

Отсюда $f(x)=(2t+1)^x$ не убывает

~~Если $x<0$, то $(2t+1)^x = \frac{1}{(2t+1)}$~~

$t^2+2 \geq 2t+1$, т.к. $(t-1)^2 \geq 0$

$(2t+1)^1 \leq t^2+2 \Rightarrow x \geq 1$.

$\frac{m}{n} \geq 1 \Rightarrow m \geq n$ (в частности, $m>0$) $m \in \mathbb{N}$

$(2t+1)^{\frac{m}{n}} = t^2+2$

$(2t+1)^m = (t^2+2)^n$

$2t+1 = 1 \Rightarrow t=0$

$1^x = 2$ – нет рац. решений

Пусть $2t+1 \neq 1$. Тогда $2t+1 \vdots p$, p – простое

Отсюда $(t^2+2)^n \vdots p \Rightarrow t^2+2 \vdots p$.

$\begin{cases} t^2+2 \vdots p \\ 2t+1 \vdots p \end{cases} \Rightarrow \underbrace{t^2-2t+1}_{(t-1)^2} \vdots p \Rightarrow t-1 \vdots p \Rightarrow$ (p – простое)

$\Rightarrow \begin{cases} 2t-2 \vdots p \\ 2t+1 \vdots p \end{cases} \Rightarrow 3 \vdots p \Rightarrow p=3.$

Откуда $2t+1 = 3^a$ (ведь любой простой делитель $2t+1$ равен 3)

$a \geq 0$.

 чистовик

дешифр

$3^{am} = (t^2+2)^n$

$t^2+2 = 3^b = 3^{\frac{am}{n}}$ $(b \in \mathbb{N},$ т.к. $t^2+2 \in \mathbb{N})$.

$\begin{cases} t^2+2 = 3^b \\ 2t+1 = 3^a \end{cases}$

Откуда $(t-1)^2 = 3^b - 3^a = 3^a(3^{b-a}-1)$.

Пусть v_3 – ст. вхождения 3 в число S $(S \in \mathbb{N})$. Если $b \neq a$, т.е. $3^{b-a}-1 \neq 0$:

$v_3 (t-1)^2 = a$ (т.к. $3^{b-a}-1 \not\vdots\, 3$ ибо $3^{b-a} \vdots\, 3$, т.к. $b \neq a$)

$v_3 (t-1) = \frac{a}{2}$.

$v_3 (2t-2) = \frac{a}{2}$ (т.к. $(2,3)=1$).

$2t-2 \,\vdots\, 3^{\frac{a}{2}}$

Если $\frac{a}{2} \geq 2$, то $2t+1 \,\vdots\, 3^2$ и $2t+2 \,\vdots\, 3^2$

$\Rightarrow 3 \,\vdots\, 3^2$ – противоречие

Значит $\frac{a}{2}=1$ или $\frac{a}{2}=0$

$a=2$ или $a=0$;

$2t+1=9$ $\quad$ $2t+1=1$

$2t=8$ $\quad$ $t=0$

$t=4$ $\quad$ $(2t+1)^x = 1$

$9^x = 18$ $\quad$ $t^2+2=2$

$\vdots 2$ $\quad$ $1 \neq 2$ – противоречие

$\not\vdots 2$

не имеет рац. решений

Значит $3^{b-a}-1=0$

$a=b$

$t^2+2 = 2t+1$

$(t-1)^2=0 \Rightarrow t=1$

$3^x = 3 \Rightarrow x=1$

$t=1$ – подходит