0 153684 860009

15-36-84-86
(162.2)

+1 лист
Ои/

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант А – 4

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы Горы"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Топкало Валерии Алексеевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«7» апреля 2024 года

Подпись участника

№3

Чистовик

№3 80 (Восемьдесят)

$36\sin(x+\sin x)\sin(x-\sin x)+9=\pi^2$

$18\cos(2\sin x)-18\cos(2x)+9=\pi^2$

$\cancel{18}-36\sin^2(\sin x)-\cancel{18}+36\sin^2 x+9=\pi^2$

Пусть $\sin x=t$, $\Rightarrow$ $t\in[-1;1]$, тогда:

$36t^2-36\sin^2 t+9=\pi^2$

Рассм $f(t)=t^2-\sin^2 t$

$f'=2t-2\sin t\cdot\cos t$

$f''=2-2(\cos^2 t-\sin^2 t)=$

$=2-2\cdot\cos 2t=2(1-\cos 2t)\geq 0$

для $\forall t\in\mathbb{R}$

Зн, $f(t)$ выпукла вниз

$f'(t)=2(t-\sin t\cdot\cos t)=0$

$t=\sin t\cdot\cos t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=0$

$-1 \quad - \quad 0 \quad + \quad 1$ $\Rightarrow$ ф-ция монотонна при $t\in[-1;0]$ и при $t\in[0;1]$

$\Rightarrow$ $36t^2-36\sin^2 t+9=\pi^2$ имеет не более 2 реш

при $t=\frac{\pi}{6}$: $\pi^2-9+9=\pi^2$ (в)

$t=-\frac{\pi}{6}$: $\pi^2-9+9=\pi^2$ (в)

Зн, $\left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{\pi}{6}\\ \sin x=-\frac{\pi}{6}\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}x=\arcsin\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ x=\pi-\arcsin\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}\\ x=-\arcsin\frac{\pi}{6}+2\pi m, m\in\mathbb{Z}\\ x=\pi+\arcsin\frac{\pi}{6}+2\pi q, q\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

Чистовик

на $[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{4}]$: $x = \{\arcsin\frac{\pi}{6}; \pi - \arcsin\frac{\pi}{6}; \pi + \arcsin\frac{\pi}{6}\}$

$\Rightarrow$ сумма корней:

$\arcsin\frac{\pi}{6} + \pi - \cancel{\arcsin\frac{\pi}{6}} + \pi + \cancel{\arcsin\frac{\pi}{6}} =$

$= 2\pi + \arcsin\frac{\pi}{6}$

Ответ: $2\pi + \arcsin\frac{\pi}{6}$

N6

$|2[\mathrm{ctg}\, a] + 1|^x = [\mathrm{ctg}\, a]^2 + 2$

] $n \le \mathrm{ctg}\, a < n+1$, где $n \in Z$, тогда ур-е равносильно:

$|2n+1|^x = n^2 + 2$

$n \in Z \Rightarrow n^2 \in Z \Rightarrow |2n+1|^x \in Z$

при $x \ge 2$

$|2n+1|^x \ge |4n^2 + 4n + 1| > n^2 + 2$

$\Rightarrow x \ge 2$ не подх

при $x < 0$:

$|2n+1|^x \le \left|\frac{1}{2n+1}\right| < 1 < n^2 + 2$

$\Rightarrow x < 0$ не подх

при $x = 0$: $|2n+1|^x = 1 < n^2 + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ не подх

Т.к. при $x \in (0; 2)$ $|2n+1|^x \in Z$

15-36-84-86 (162.2)

Чистовик

№1

Пусть v, м/с – скорость модели А-1
u, м/с – скорость модели Б-2
t, с – время, кот. модель А-1 может продержаться в возд;
$(t+400)$, с – модель Б-2 в возд.

Тогда можем получить след. ур-е:
~~$vt - 900 = u(t+400)$~~ (с учётом того, что модель А-1 при ветреном ветре пролетела на 900 м дальше):

$$(v-2)t = (u-2)(t+400) + 900$$

$$vt - \cancel{2t} = u(t+400) - \cancel{2t} - 800 + 900$$

$$\Rightarrow \quad vt = u(t+400) + 100 \quad (1)$$

НО, заметим, что рассм, кот. пролетит модель А-1 при безветренной погоде равно:
$S_A = vt$, м. ; модель Б-2 – $S_Б = u(t+400)$, м.

Тогда ур-е (1):

$$S_1 = S_2 + 100. \Rightarrow S_1 - S_2 = 100$$

Зн, при безветренной погоде модель А-1 пролетит на 100 м больше, чем модель Б-2

Ответ: модель А-1 пролетит большее расст, чем модель Б-2, причём на 100 м.
(модель А-1 пролетит на 100 м больше модели Б-2)

Чистовик

№2

$f(2024)$ – ?

$f(x) = |3x+4| - |3x+2| + 7$ при $x \in [-2;0]$

Тогда:

$f(-2) = |-6+4| - |-6+2| + 7 = 2 - 4 + 7 = 5 =$
$= 1 + 2(4-2)$

$f(-1) = |-3+4| - |-3+2| + 7 = 1 - 1 + 7 = 7 =$
$= 1 + 2(4-1)$

$f(0) = |0+4| - |0+2| + 7 = 4 - 2 + 7 = 9 = 1 + 2(4+0)$

$f(x+3) - 6 \leq f(x) \Rightarrow f(x) + 6 \geq f(x+3)$

$f(x+2) - 4 \geq f(x) \Rightarrow f(x+3) \geq 4 + f(x+1)$

Тогда:

$f(x+1) + 4 \leq f(x+3) \leq f(x) + 6$

~~тогда~~ или

$f(x-2) + 4 \leq f(x) \leq f(x-3) + 6$

~~для $x = 3$:~~

~~$f(1) + 4 \leq f(2) \leq f($~~

Тогда для $x = 1$:

$f(-1) + 4 \leq f(1) \leq f(-2) + 6$

$7 + 4 \leq f(1) \leq 5 + 6$, $11 \leq f(1) \leq 11$

$\Rightarrow f(1) = 11 = 1 + 2 \cdot (4+1)$

для $x=2$:

$f(0) + 4 \leq f(2) \leq f(-1) + 6$

$9 + 4 \leq f(2) \leq 7 + 6$, $13 \leq f(2) \leq 13$

$\Rightarrow f(2) = 13 = 1 + 2 \cdot (4+2)$

15-36-84-86 (162.2)

Чистовик

Докажем, ~~где~~ что для $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$

~~f(n) = 1 + f(...)~~ $f(n) = 1 + 2(4+n)$

1) База доказана ($f(1) = 11 = 1 + 2\cdot(4+1)$)

2) $\exists$ верно для $n = x - 2$

Тогда:

$f(n-2) + 4 \leq f(n) \leq f(n-3) + 6$

$1 + 2(4 + n - 2) + 4 \leq f(n) \leq 1 + 2(4 + n - 3) + 6$

$1 + 8 + 2n - \cancel{4} + \cancel{4} \leq f(n) \leq 1 + 2 + 2n + 6$

$9 + 2n \leq f(n) \leq 9 + 2n$

$\Rightarrow f(n) = 9 + 2n = 1 + 2(4+n)$ (!)

Зн, для $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$: $f(n) = 1 + 2(4+n)$

$\Rightarrow f(2024) = 1 + 2(4 + 2024) =$

$= 1 + 8 + 2\cdot 2024 = 9 + 4048 = 4057$

~~= 4055~~

Ответ: 4057

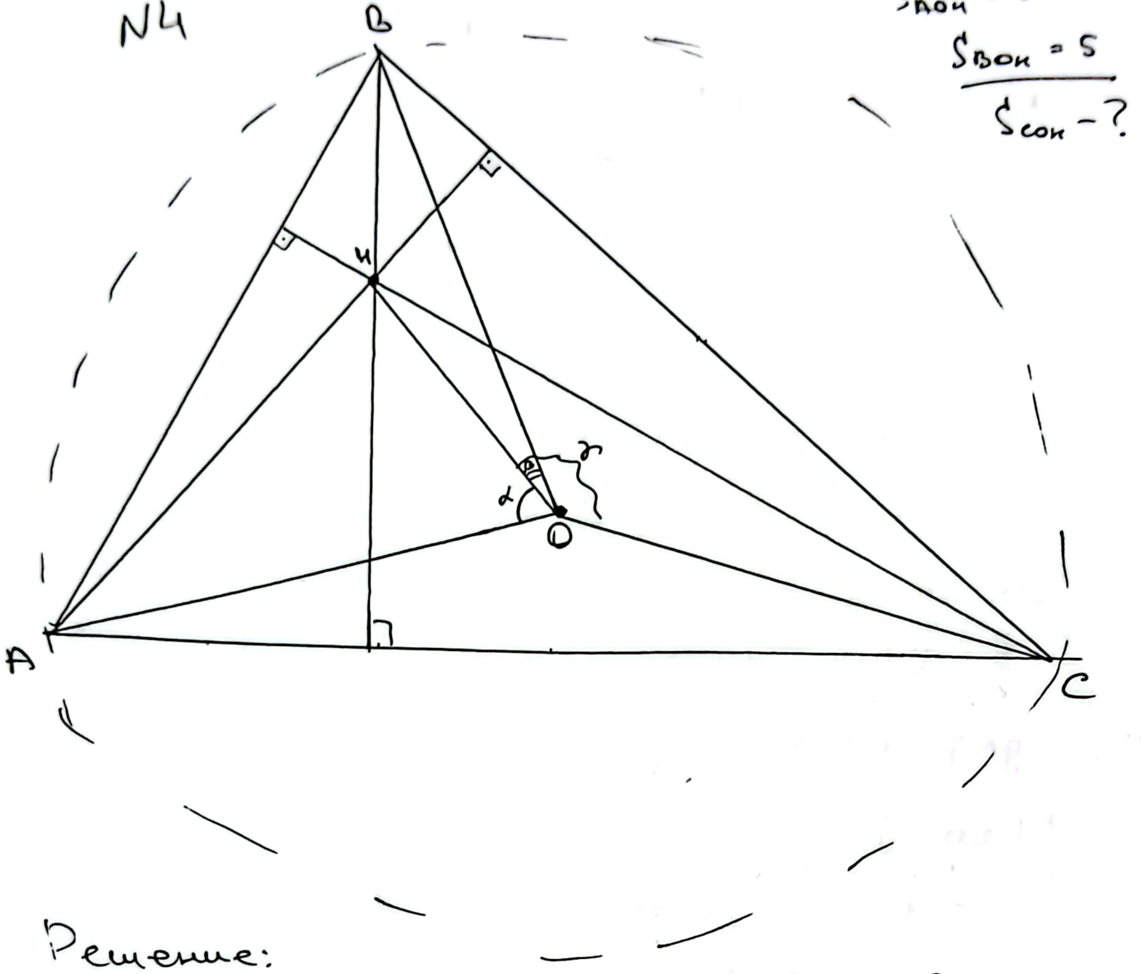
Чистовик

N4

$S_{AOH} = 9$

$S_{BOH} = 5$

$S_{COH} - ?$



Решение:

Т $\angle AOH = \alpha$, $\angle BOH = \beta$, $\angle COH = \gamma$, R – радиус опис ок-ти,

$\frac{1}{2} \cdot OH \cdot R = x$, $S_{COH} = S$

Тогда:

$S_{AOH} = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot R \cdot \sin\alpha \Leftrightarrow 9 = x \cdot \sin\alpha$

$S_{BOH} = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot R \cdot \sin\beta \Leftrightarrow 5 = x \cdot \sin\beta$

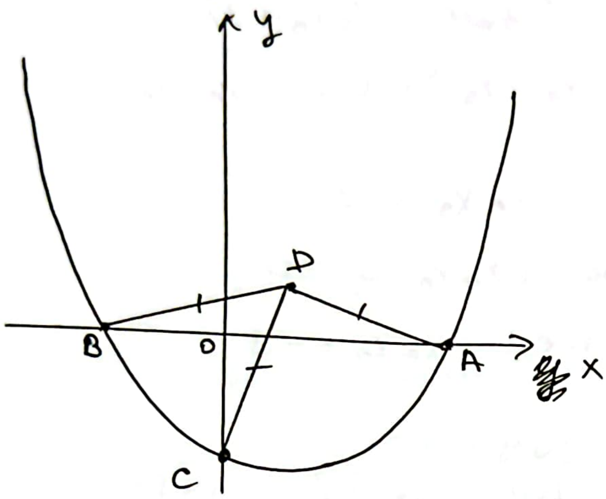
$S_{COH} = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot R \cdot \sin\gamma \Leftrightarrow S = x \cdot \sin\gamma$

Как

Шифр

Чистовик

N5



$\exists$ $A(x_A; 0)$

$B(x_B; 0)$

$C(0; q)$

причём $\exists x_A > x_B$

x_A и x_B – корни ур-я

$x^2 + px + q = 0$

$\Rightarrow$ по т. Виета:

$p = -(x_A + x_B)$

$q = x_A x_B \Rightarrow C(0; x_A x_B)$

~~$AD^2 = ...$~~ $\exists$ $D(x_D; y_D)$. По усл: $x_D^2 + y_D^2 = 2021$

$AD^2 = (x_D - x_A)^2 + y_D^2$

$BD^2 = (x_D - x_B)^2 + y_D^2$

$CD^2 = x_D^2 + (y_D - x_A x_B)^2$

По усл: $AD = BD = CD$

$AD = BD \Rightarrow (x_D - x_A)^2 + y_D^2 = (x_D - x_B)^2 + y_D^2$

$\cancel{x_D^2} - 2x_A x_D + x_A^2 + \cancel{y_D^2} = \cancel{x_D^2} - 2x_B x_D + x_B^2 + \cancel{y_D^2}$

$(x_A - x_B)(x_A + x_B) - 2x_D(x_A - x_B) = 0$

Т.к $x_A \neq x_B \Rightarrow$ $\underline{x_A + x_B = 2x_D}$

$AD = CD \Rightarrow (x_D - x_A)^2 + y_D^2 = x_D^2 + (y_D^2 - x_A x_B)^2$

$-2x_A x_D + x_A^2 = -2y_D x_A x_B + (x_A x_B)^2$

С уч. x_D:

$2y_D x_A x_B = (x_A x_B)^2 - x_A^2 + (x_A + x_B)x_A$

$2y_D x_A x_B = (x_A x_B)^2 + x_A x_B$

Т.к. т. A, B и C – различны $\Rightarrow$ $x_A \neq x_B \neq x_A x_B \neq 0$

$\Rightarrow$ $\underline{2y_D = x_A x_B + 1}$

По усл: $x_D^2 + y_D^2 = 2021$, $(2x_D)^2 + (2y_D)^2 = 4 \cdot 2021$

$(x_A + x_B)^2 + (x_A x_B + 1)^2 = 4 \cdot 2021$

~~$x_A^2 + 2x_A x_B + x_B^2 + (x_A x_B)^2 + 2x_A x_B + 1 = 4 \cdot 2021$~~

$x_A^2 + 2x_A x_B + x_B^2 + (x_A x_B)^2 + 2x_A x_B + 1 = 4 \cdot 2021$

$x_A^2 - 2x_A x_B + x_B^2 + ((x_A x_B)^2 + 6x_A x_B + 9) - 9 + 1 = 4 \cdot 2021$

Чистовик

$(x_A - x_B)^2 = 4\cdot 2021 + 8 - \cancel{2x_Ax_B}\,(x_A x_B + 3)^2$

Но заметим, что $AB^2 = (x_A - x_B)^2 + 0 = (x_A - x_B)^2$

$\Rightarrow AB^2 = 4\cdot 2021 + 8 - (x_A x_B + 3)^2$

$\Rightarrow$ длина AB max, когда $(x_A x_B + 3)^2 = 0$,

т.е. $x_A x_B = -3$

Тогда $AB^2 = 8084 + 8 = 8092$

~~Пример: y=~~ $\Rightarrow AB = \sqrt{8092} = 2\cdot 17\sqrt{7} = 34\sqrt{7}$

Пример ф-ции, у кот $x_A \cdot x_B = -3$:

$y = x^2 + 2x - 3$ (по т. Виета: $x_A x_B = -3$)

$y(0) = -3 \Rightarrow$ ~~...~~ $A(3;0)$, $B(-1;0)$, $C(0;-3)$,

т.е. точки не совпадают

Ответ: ~~8092~~ $34\sqrt{7}$

N 3

$36\sin(x+\sin x)\sin(x-\sin x) + 9 = \pi^2$

$18\cos(2\sin x) - 18\cos(2x) + 9 = \pi^2$

$18 - 36\sin^2(\sin x) - 18 + 36\sin^2(x) + 9 = \pi^2$

$36(\sin x - \sin(\sin x))(\sin x + \sin(\sin x)) = \pi^2 - 9$

$18\cos^2(\sin x) - 18\sin^2(\sin x) - 18\cos^2 x + 18\sin^2 x = \pi^2 - 9$

Черновик

$\cancel{9} + 9\cos(4\sin x) - \cancel{9} - 9\cos 4x + 9 = \pi^2$

$9(\cos(4\sin x) - \cos 4x + 1) = \pi^2$

$\cos(4\sin x) - \cos 4x + 1 = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2$

~~$f(x) = \cos(4\sin x) - \cos 4x$~~

] ~~$x = \sin t$~~] $x = \arcsin t$ ~~$+2\pi n$~~, $n \in t$

$\sin x = t$

~~$\cos 4t$~~ $\cos x = \sqrt{1 - t^2}$

~~$36t^2 - 36\sin^2$~~

$36\sin^2 x - 36\sin^2(\sin x) + 9 = \pi^2$

~~$36t^2 - 36($~~

$36t^2 - 36\sin^2 t + 9 = \pi^2$

$36\sin^2 t = 36t^2 + 9 - \pi^2$

~~$t = a$~~ $\sin t = \pm\left(t^2 + \frac{1}{4} - \left(\frac{\pi}{6}\right)^2\right)$

$t =$ ~~$\arcsin$~~ $-1 \le t^2 + \frac{1}{4} - \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \le 1$

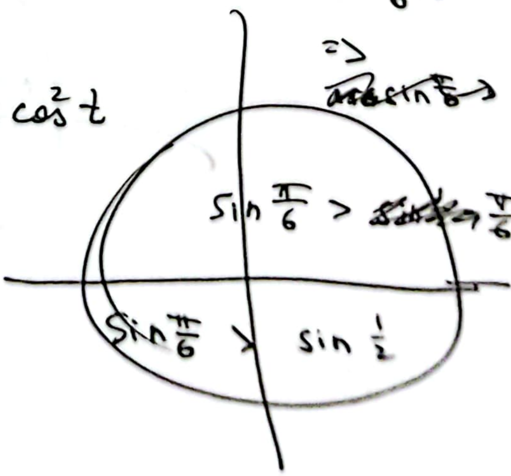
$36(t^2 - \pi)^2 = 36\left(\sin^2 t - \frac{1}{4}\right)$

$\frac{\pi}{6} > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$

~~$\arcsin\frac{\pi}{6}$~~

$2 + 2\sin^2 t - 2\cos^2 t$



$\sin\frac{\pi}{6} >$ ~~$\sin$~~ $\frac{\pi}{6}$

$\sin\frac{\pi}{6} > \sin\frac{1}{2}$

~~7π~~

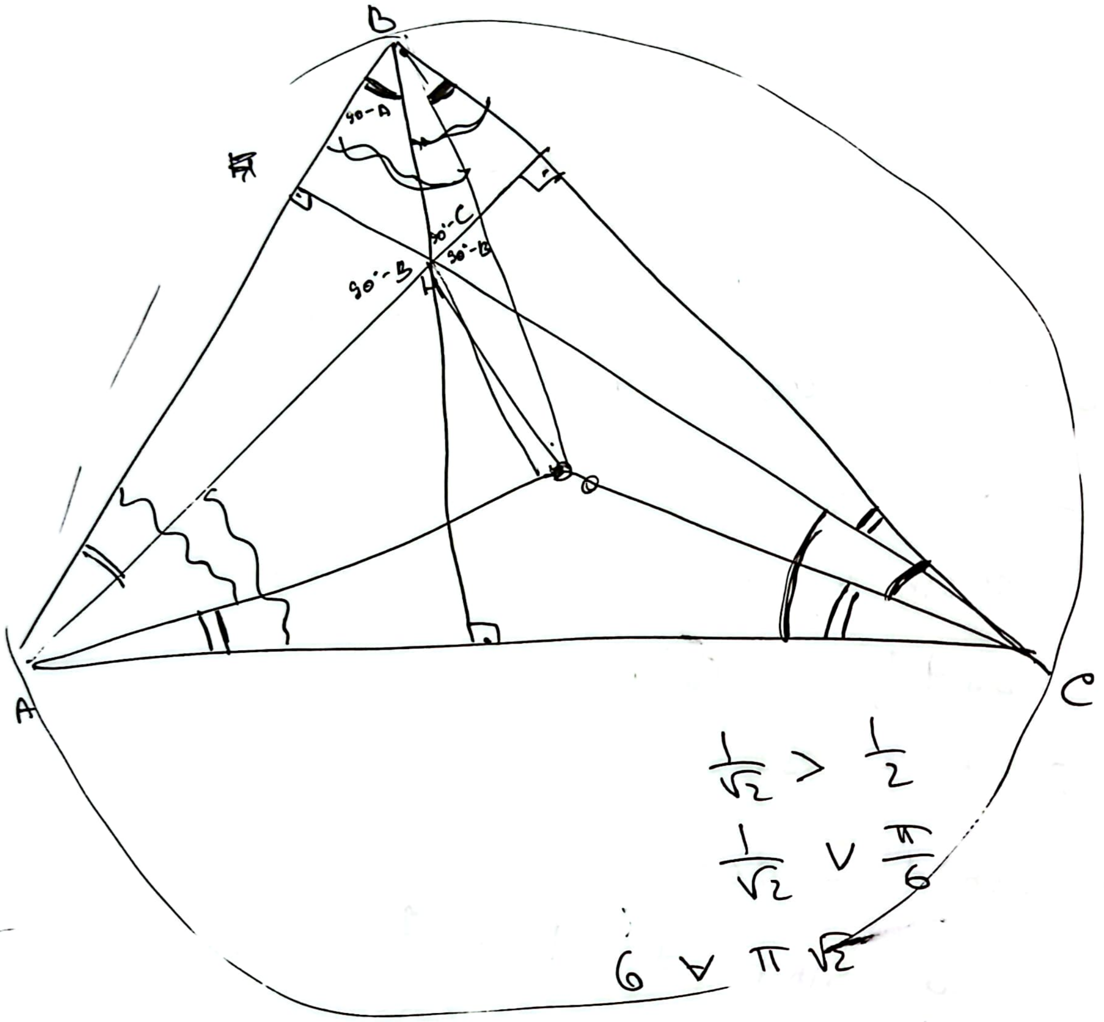
$2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \vee \frac{7\pi}{4}$

44 $\quad 20\pi < 42\pi$

Черновик

$$36\cos^2(\sin 4x) - 36\cos^2(x) = \pi^2 - 9$$

$$36\cos^2(\sin x) = 36\cos^2(x) + \pi^2 - 9$$

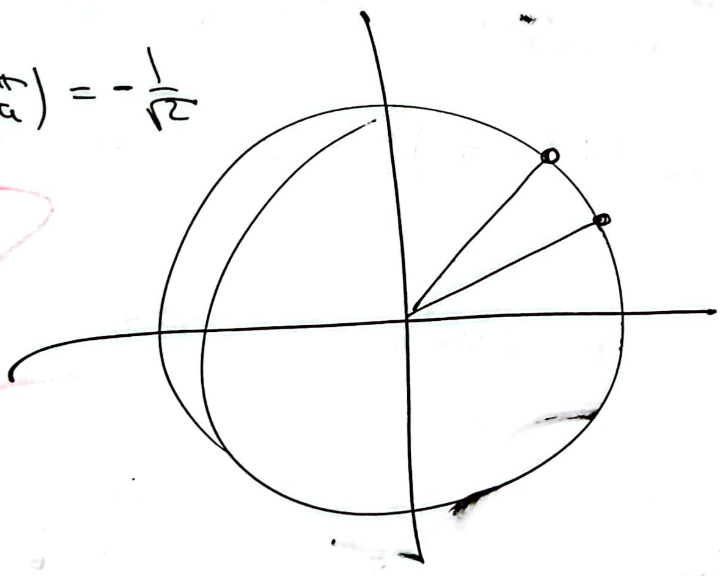


$$\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \vee \frac{\pi}{6}$$

$$6 \wedge \pi\sqrt{2}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$



Черновик

$(x_A x_B)^2 + x_A^2 + x_B^2 + 4x_A x_B + 1 = 4 \cdot 1011$

$p^2 + (q+1)^2 = 4 \cdot 2021$

$(x_A + x_B)^2 + (x_A x_B + 1)^2 = 4 \cdot 2021$

$b = 4 \cdot 2021 - (x_A x_B + 1)^2$

$x_A x_B = -1$

$x_A^2 + x_B^2 - 2x_A x_B = 4 \cdot 2021 - 6x_A x_B - (x_A x_B)^2 - 1$

$L^2 = 4 \cdot 2021 - ((x_A x_B)^2 + 6x_A x_B + 9) + 9 - 1$

$L^2 = 4 \cdot 2021 - (x_A x_B + 3)^2 + 8$

$x_{AB} = -3$

$f = \sin(\sin x) \uparrow$

при $x \in [0; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$

$0 \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{3\pi}{2} \quad 2\pi$

$\downarrow$

при $x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$

$\cancel{9} - 2\ 36 \quad \cancel{18} - 36\sin^2(\sin x) - \cancel{18} + 36\sin^2(x) + 9 = \pi^2$

$36\sin^2 x + 9 - \pi^2 = 36\sin^2(\sin x)$

$\sin y = \pi n$

$f = \cos(\sin x)$

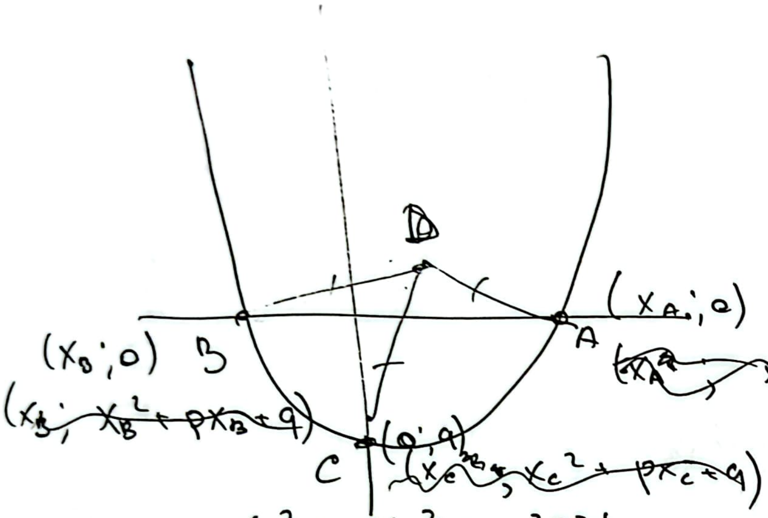
$f' = -\sin(\sin x) \cdot \cos x = 0$

$+ \quad +$

$0 \quad \frac{\pi}{2} \quad \pi \quad \frac{3\pi}{2} \quad 2\pi$

Черновик

$25 = 14 + r(2\sin\gamma - \sin\alpha - \sin\beta)$



$x_A - x_B$?

$x_D^2 + y_D^2 = 2021$

$p = -(x_A + x_B), \quad q = x_A \cdot x_B$

$(x_D - x_B)^2 + y_D^2 = (x_D - x_A)^2 + y_D^2 =$

$= x_D^2 + (y_D - q)^2$

$x_B^2 - 2x_Bx_D = x_A^2 - 2x_Ax_D$

$(x_A - x_B)(x_A + x_B) - 2x_D(x_A - x_B) = 0$

$x_A + x_B = 2x_D$

$-2x_Dx_A + x_A^2 = -2y_Dq + q^2$

$-2x_Dx_A + x_A^2 = -2y_D \cdot x_Ax_B + x_A^2x_B^2 =$

$= -\cancel{x_A^2} \cdot x_Ax_B + \cancel{x_A^2}$

$2y_D = x_Ax_B + 1$

$x_A^2 + \cancel{2x_Ax_B} + x_B^2 + (x_Ax_B)^2 - \cancel{2x_Ax_B} + 1 = 4 \cdot 2021$

$(x_A^2 + 1)(x_B^2 + 1) = 4 \cdot 2021$

Черновик

$f(-2) = |4-6| - |2-6| + 7 = 2 - 4 + 7 = 5$

$f(-1) = 1 - 1 + 7 = 7 = 1 + \cancel{\ldots} 2(-1+4) \quad 1 + 2(-2+4)$

$f(0) = 4 - 2 + 7 = 9 = 1 +$

$\cancel{f(3) - 6 \leq}$

$f(1) - 6 \leq f(-2), \qquad f(1) - 4 \geq f(-1)$

$f(1) \leq 11, \qquad f(1) \geq 11$

$\Rightarrow \quad 11 \leq f(1) \leq 11 \Rightarrow f(1) = 11$

$f(x+3) - 6 \leq f(x), \qquad f(x+3) - 4 \geq f(x+1)$

$f(x+1) + 4 \leq f(x+3) \leq f(x) + 6$

$f(3) \leq$

$f(x) = 1 + \cancel{\ldots} 2(4+x)$

$\cancel{9 + 2x \leq f(x+3) <}$

$9 + 2x + 2 + 4 \leq f(x+3) \leq 1 + 8 + 2x + 6$

$S_{ROH} = \frac{1}{2} R \cdot OH \cdot \sin\alpha \qquad \frac{1}{2} ROH = x$

$\sin\beta$

3

$\sin\gamma$

$\cancel{\ldots} = c$

$\alpha + \beta = 2\angle C$

$\gamma - \beta = 2\angle A$

$\cancel{\alpha + \gamma =}$

$\alpha + \gamma = 180^\circ - 2\angle B$

$4 = x(\sin\alpha - \sin\beta) = x \cdot$

$\cancel{5}\, 5 - 5 = x(\sin\gamma - \sin\beta)$

$9 - 5 = x(\sin\alpha - \sin\gamma)$

Черновик

$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$

$18\cos(\cancel{x} + \sin x - \cancel{x} + \sin x) -$

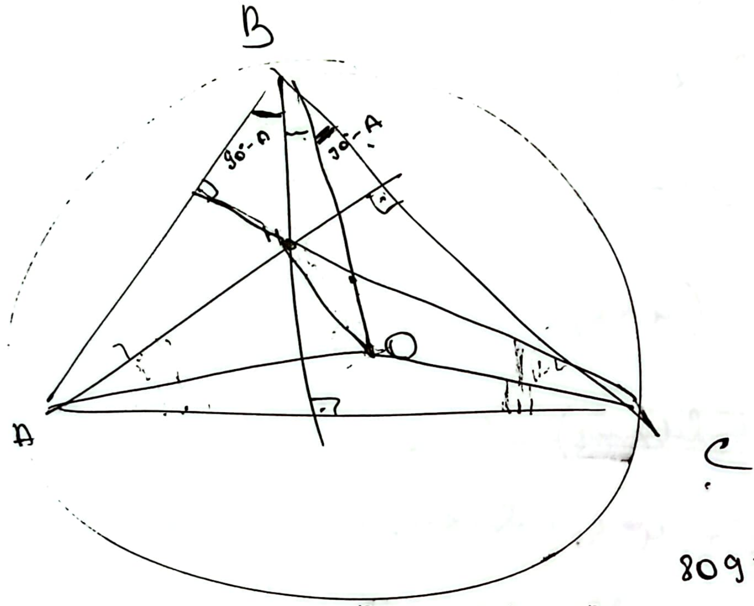
$-18\cos(x + \cancel{\sin x} + x - \cancel{\sin x}) + 9 = \pi^2$

$18\cos(2\sin x) - 18\cos(2x) + 9 = \pi^2$

$9 + \cos(4\sin x) - \cancel{9} - \cos(4x) + \cancel{9} = \pi^2$

$\cos(4\sin x) = \pi^2 - 9 + \cos(4x)$

$4048 + 9 = 4057$



$3, -1$

$8092 : 2 = 4046$, $4046 : 2 = 2023$

$8092 = 2^2 \cdot 2023$

$8092 : 4 = 2023$

$\cancel{\ \ } = \angle B - 180° + 2A$

$S_{BOH} = -\frac{1}{2} \cdot BH \cdot R \cdot \sin(2\angle A + \angle B)$

$S_{AOH} = -\frac{1}{2} \cdot AH \cdot R \cdot \sin(2\angle C + \angle A)$

$S_{COH} = -\frac{1}{2} \cdot CH \cdot R \cdot \sin$

$S_{BOH} = \frac{1}{2} BH \cdot R \cdot \sin(\angle A - \angle C)$

$S_{AOH} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot R \cdot \sin(\angle B - \angle C)$

$S_{COH} = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot R \cdot \sin(\angle B - \angle A)$

$119 : 17 = 7$

$2023 : 17 = 119$

$2023 : 11 = 18$ (ост. 43)

Черновик

$t \in [-1; 1]$

$36t^2 + 9 = \pi^2 + 36\sin^2 t$

$(6t - \pi)(6t + \pi) = (6\sin t - 3)(\sin t + 3)$

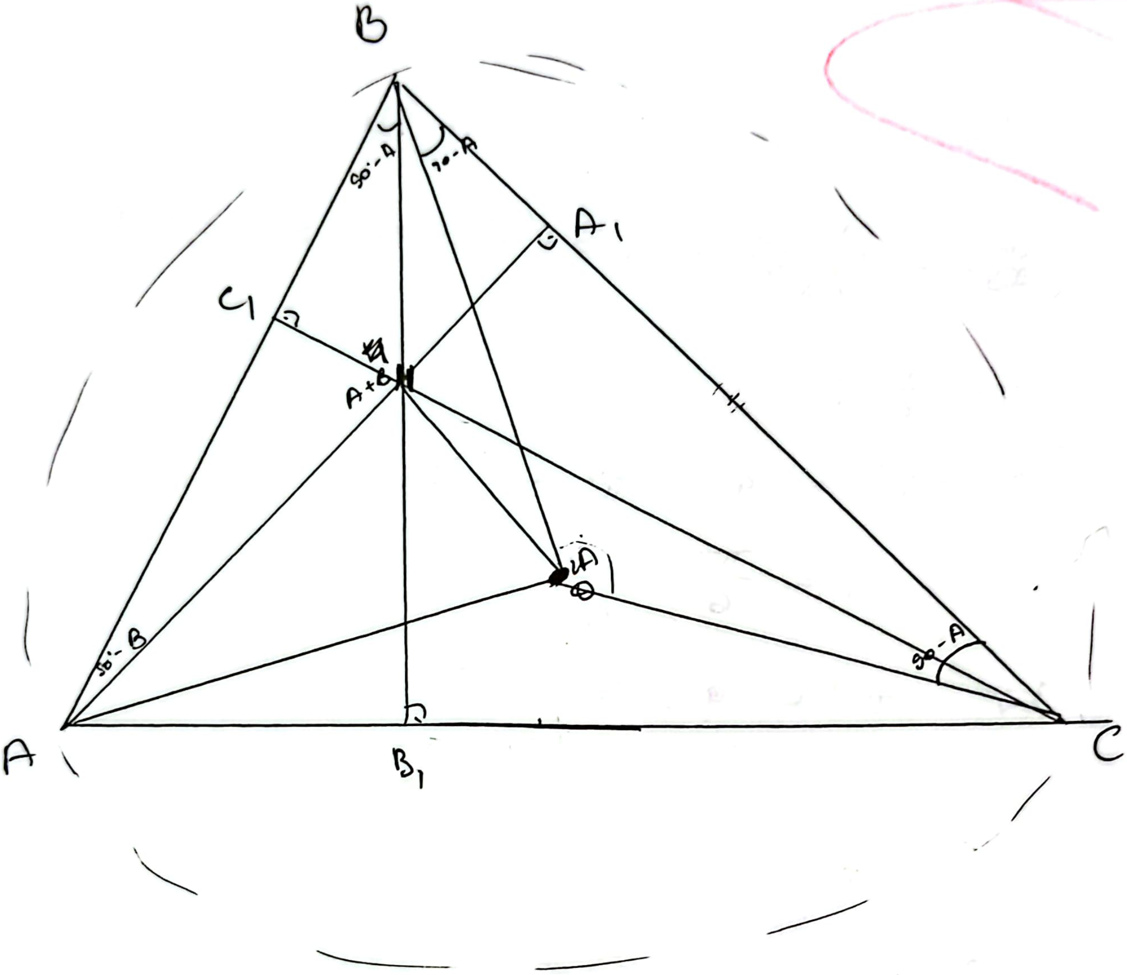
$t = \frac{\pi}{2}$:

$9\pi^2 + 9 = \pi^2 + 36$

$t = \frac{\pi}{6}$

$36 \quad \pi^2 + 9 = \pi^2 + 9$

Черновик



$\gamma - \beta = 2A$

$\alpha + \gamma = 180° - 2B$

$\alpha + \beta = \angle C$ $\qquad \alpha = 180° - 2B - \gamma$

$5 \sin\alpha = 9 \sin\beta$ $\qquad \beta = \gamma - 2A$

$5 \sin(2B + \gamma) = 9 \sin(\gamma - 2A)$

$\frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin 2C - \frac{1}{2} \cdot AH \cdot HB \cdot \sin C = 4$

$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R^2}$