0 816368 820002

81-63-68-82
(181.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______

Место проведения Пенза
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы"
наменование олимпиады

по ~~по~~ математике
профиль олимпиады

Фролова Глеба Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«7» апреля 2024 года

Подпись участника

Шифр работы: 81-B3-68-82 M

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Σ прописью
Оценка	15	15	15	0	5	10			60	шестьдесят

60 шестьдесят

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ ~~ЧЕРНОВИК~~

ЧЕРНОВИК

81-63-68-82 (181.2)

$\overline{aa} + \cancel{\overline{bccb}} = \overline{deed}$ 1098

bcb 1001

$10a + a + 100b + 10c + b$

$\overline{aa} + \overline{bcb} = 1001$

99

902

$10a + a + 100b + 10c + b$

$\overline{aa} + 900 + 10c + 9$

$10a + a + 10c = 92$

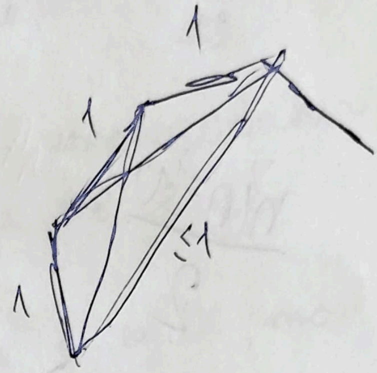
7

2

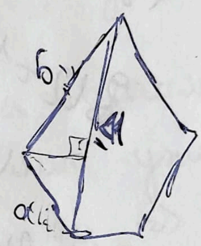
$\boxed{22 + 979 = 1001}$

$\boxed{3\surd}$

$\boxed{5\surd}$



Допустим, что можно найти и переместить такие,



$e_1 + f_1 + g_1 > 0{,}5x$

$a_1 + b_1 + c_1 + d_1 < 0{,}5x$

$a_2 + b_2 + c_2 + d_2 < 0{,}5y$

$e_2 + f_2 + g_2 > 0{,}5x$ x

$\leq 1 + a > b$

$\leq 1 + b > a$

$b + a > \leq 1$

$x + a > b$

$x + b > a$

$b + a > x$

$x + 2b + a > a + x$

$2x + a + b > a + b$

$2x + 2a + 2b > a + b + x$

$a_1 \quad b_1 \quad c_1 \quad \ldots \quad g_1 \quad \Sigma = 100\%$

$a_2 \quad b_2 \quad c_2 \quad \ldots \quad g_2 \quad \Sigma = 100\%$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

$\boxed{\text{ЧЕРНОВИК}}$

2. 2 двойки 2 четверки 2 x

14.12.24

~~25~~ xy.2b.24

>~~14.12~~.24

$\boxed{24}$

$\boxed{14.12.24}$

24.11.24

$\frac{n(n-1)}{2}$

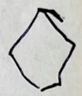
$C_4^3 = \frac{4!}{3!} = 4$

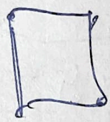
+39+39+39

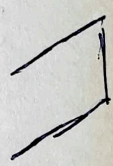
78+(312-78)

= 78+312 = $\boxed{390}$

312+117 = $\boxed{429}$







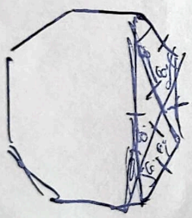
1012

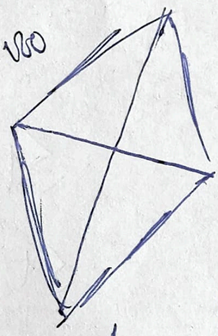
y>x

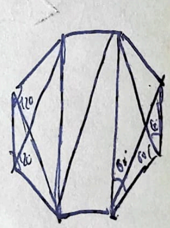
2y+x=180

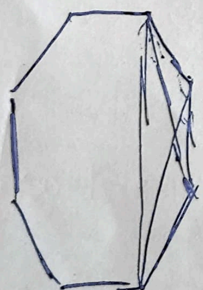
3x>180

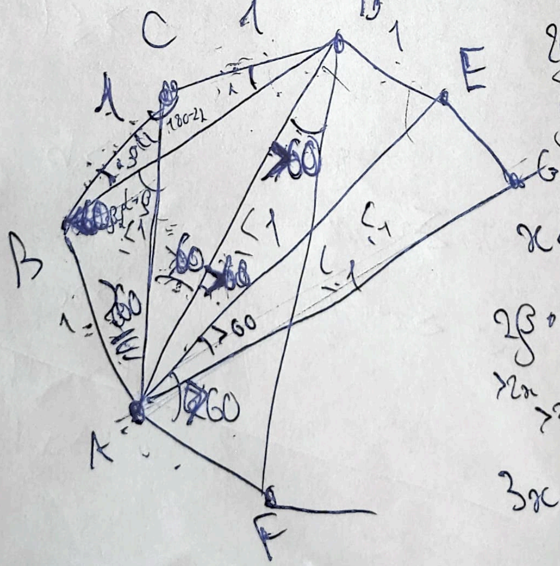
x>60











2022-60=

2β>120

β>60

x<β → β>x

2β+x=180

>2x

>3x

3x<180

ЧИСТОВИК

№2.

Допустим, что такая дата будет в 2024 году, тогда:
в обозначении даты будут использоваться две двойки, две четвёрки и две ещё каких-то цифры.
Если месяц будет начинаться с нуля, то 05, 06, 07, 08, 09, 10 не подойдут, так как тогда будут использованы 4 разных цифры $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ всего должно будет быть использовано 8 цифр, а такого быть не может.
Пусть месяц - ноябрь (11), тогда используются только цифры 1, 2, 4. Одни мы уже использовали два раза, поэтому день - 24 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ дата: 24.11.24.

Ответ: 24.11.24.

№3.

Четырёхзначный палиндром максимально равен $99+999=1098 \Rightarrow$ сам палиндром $1001 \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{aa}+\overline{bcb}=1001$
$\overline{aa}\le 99 \Rightarrow \overline{bcb}\geqslant 902 \Rightarrow b=9 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10a+a+900+10c+9=1001 \Rightarrow 11a+10c=92$
$c=7$, т.к. при других c $92-10c$ не кратно $11 \Rightarrow$
$\Rightarrow a=\frac{92-70}{11}=2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{aa}=22$, $\overline{bcb}=979$, четырёхзначный палиндром - $1001 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ такие два палиндрома существуют.
Ответ: существуют.

ЧИСТОВИК

№5.

Распложим данные в таблицу:

	I	II	III	IV	V	VI	VII
Золото	a_1	b_1	c_1	d_1	e_1	f_1	g_1
Алмазы	a_2	b_2	c_2	d_2	e_2	f_2	g_2

Например, I-е королевство добывает a_1 % от всего золота (100%) и a_2 % от всех алмазов (100%)

Тогда:

пусть есть четыре королевства, в которых добывается меньше 50% алмазов и меньше 50% золота, тогда:

$$\begin{cases} a_1+b_1+c_1+d_1<50 \\ a_2+b_2+c_2+d_2<50 \end{cases} \qquad \begin{cases} e_1+f_1+g_1>50 \\ e_2+f_2+g_2>50 \end{cases}$$ (из-за того, что $a_1+b_1+c_1+d_1+e_1+f_1+g_1=100$)

Но тогда если переместить какое-то одно королевство из левой группы в правую, то в правой группе будет 4 королевства и больше 50% добываемых ископаемых $\Rightarrow$ условие всегда можно выполнить.

Ответ: Верно.

№1.

~~Букет - это больше одного цветка~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~Пусть в каждом из одинаковых букетов будет по 2 цветка $\Rightarrow$ всего максимально~~

ЧИСТОВИК

возможное количество букетов $= \frac{156+312+390}{2} =$

$= 429$. Построим пример, соответствующий результату оценки:

Первым действием сделаем 78 букетов из одной хризантемы и одной розы. Затем сделаем $312 - 78 = 234$ букета из одного тюльпана и одной розы. Останется по 78 цветов каждого вида. Затем сделаем 39 букетов из одной хризантемы и одной розы, 39 букетов из одной розы и одного тюльпана и 39 букетов из одной хризантемы и одного тюльпана $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего букетов будет $78 + 234 + 39 \cdot 3 =$

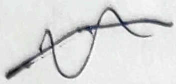
$= 312 + 117 = 429$ букетов $\Rightarrow$ пример подходит к оценке.

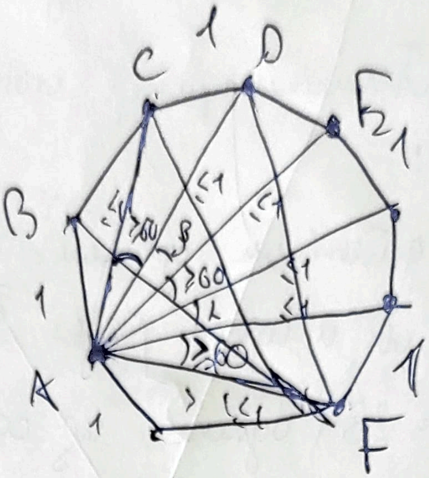
Ответ: 429 одинаковых букетов.

ЧЕРНОВИК

и победа
123
и победа
124
победа

победа и
234
победа





$1 \to 2$

$2 \to 3$

$1 \to 3$

$\angle CAF \geq 120$

$\angle CAF \geq 180+\alpha+\beta$

$\angle A \geq 180+\alpha+\beta$

$S-2=100$

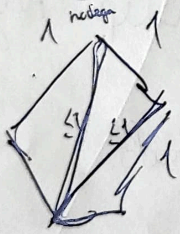
12345

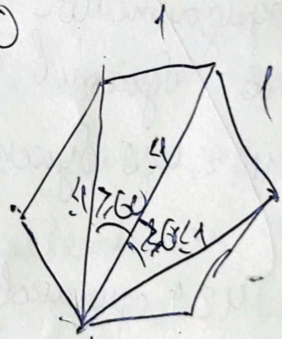
победа
123
234
победа
345

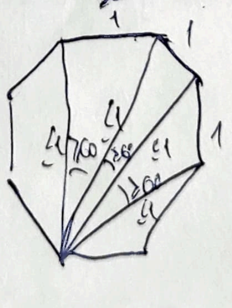
и
145
победа
135
и

и
125
и победа
239
победа

134
победа







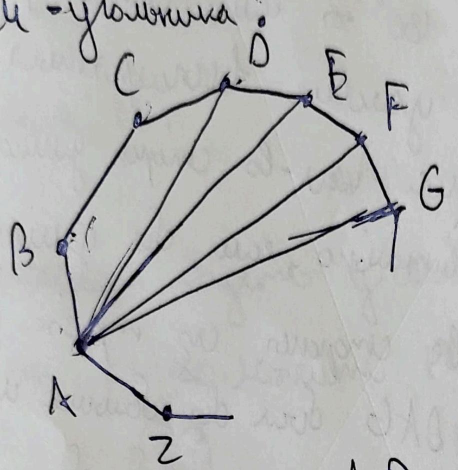
$312+117=\boxed{429}$

$C_4^3=\frac{4!}{3!}=4$

ЧИСТОВИК

№6.

Посмотрим на отдельный участок данного 2024-угольника:



По условию $AD \leq 1$, $AE \leq 1$, $AF \leq 1$, $AG \leq 1$

Рассмотрим случай, в котором $DE = EF = FG = 1$,

тогда:

в $\triangle ADE$: $AD \leq 1$, $AE \leq 1$, $DE = 1$. Против большей стороны лежит больший угол $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DAE \geq 60^\circ$

в $\triangle EAF$ и $\triangle FAG$ так же: $\angle EAF \geq 60^\circ$, $\angle FAG = 60^\circ$

$\angle DAG = \angle DAE + \angle EAF + \angle FAG \Rightarrow \angle DAG \geq 180^\circ$.

Возникает логичный вопрос: $\angle DAG$ ведь меньше $\angle BAZ$, а $\angle BAG \geq 180^\circ \Rightarrow \angle BAZ \geq 180^\circ$, но ведь многоугольник выпуклый? Вопрос правильный. Получаем, что в выпуклом многоугольнике есть угол больше $180^\circ \Rightarrow$ это уже впуклый многоугольник $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ противоречие с условием.

ЧИСТОВИК

Если разъединить эти стороны и оставить между ними какие-то треугольники, то ∠DAG будет только увеличиваться => ∠BAZ в любом случае будет больше 180° => если есть три стороны длиной 1, то условие выполняться не будет => максимальное кол-во сторон длиной 1 – 2 стороны. И действительно, если бы длину 1 имели бы только две стороны из трёх в нашем примере, то ∠DAG был бы больше или равен 90°, но не факт, что он был бы больше 180°. То же самое с ∠BAZ =>
=> Наибольшее количество сторон длины 1 в 2022-угольнике равно 2.

Ответ: 2.

№1.

В данном случае НОД этих трёх чисел (196, 312 и 390) и будет максимальным количеством букетов, т.к. в каждом букете должно одинаковое количество хризантем, тюльпанов и роз, то есть если в первом букете x хризантем, y тюльпанов и z роз, то и во втором букете тоже x хризантем,

ЧИСТОВИК

у тюльпанов и 2 роз.

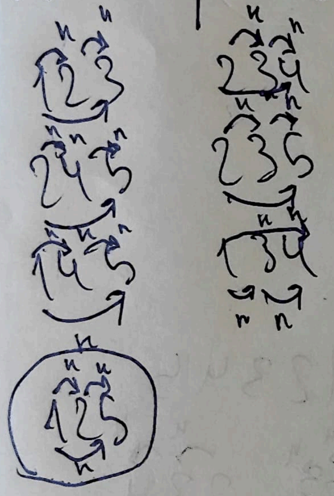
НОД(156; 312; 390) = 78 =>

в каждом букете по $\frac{156}{78} = 2$ хризантемы, $\frac{312}{78} = 4$ тюльпана и $\frac{390}{78} = 5$ роз => максимальное количество букетов — 78.

Ответ: 78.

№4.

~~Приведем~~ Пусть участников было 5, тогда: можно расположить ~~тройки~~ тройки так:

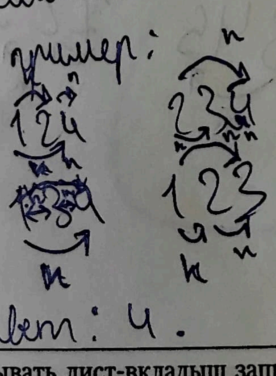


н — ничья

п — победа

То есть, в тройке 125 ~~три~~ три ничьих, а такого не может быть по условию. Для количества участников больше 5 такое невозможно, так как тройки будут те же => по оценке максимальное количество участников — 4 =>

=> пример:



=> для 4 участников работает

Ответ: 4.

ЧЕРНОВИК

1 2 3 4 5

123 125 234 345

134 124 235

345 145 245

2к 1н

2н 1к

1 2 3 4

123 234

124

12345

123 234

245 235

145 134

345 125