

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант _____

Место проведения Москва
город

дешифр

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Пакири Воробьевы Горы“
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Белковского Тимофея Романовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«07» 04 2024 года

Подпись участника
Тимофей

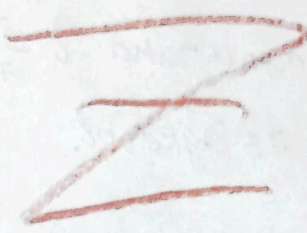
Шифр работы: 35-46-48-34 M

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Σ прописью
Оценка	15	15	15	5	5	15			20	70 (семьдесят)

№2, продолжение

	a	b	c	d	e
a	x	1	1	2	2
b	1	x	2	1	2
c	1	2	x	2	1
d	2	1	2	x	1
e	2	2	1	1	x

В этой таблице можно видеть ~~результаты~~ типы игр между участниками; в каждой тройке есть игры типа 1, и типа 2.



x - взаимодействие - по условию, у любой тройки участников между собой были и игра типа 1, и игра типа 2.

Ответ: 5

№3.

Сумма углов в выпуклом ~~четырёхугольнике~~ 2024-угольнике - $2022 \cdot 180^\circ$; Так как 2024-угольник - выпуклый, то каждый угол $< 180^\circ$.

Допустим, в 2024-угольнике есть 3 стороны длины 1.

Если сторона длиной 1 соседствует с другой стороной длины 1, то угол между ними $\leq 60^\circ$, чтобы диагональ между ними не была больше 1. Если сторона длиной 1 соседствует со стороной длиной меньше 1, то угол между ними $\leq 90^\circ$, чтобы диагональ между ними была меньше 1.

Допустим, что в 2024-угольнике нет сторон длины 1; тогда три стороны длиной 1 не могут быть тремя последовательными, т.к. иначе они либо образуют треугольник, либо пересекают друг друга. Тогда либо две стороны длиной 1 имеют общую точку, либо никакие. В первом случае есть и углы между сторонами длиной 1, и стороны длиной 1, и один угол между сторонами длиной 1.

№ 3 продолжение.

Тогда сумма углов $2021 \cdot 180^\circ + 60^\circ$. Тогда сумма углов $< 2022 \cdot 180^\circ$.

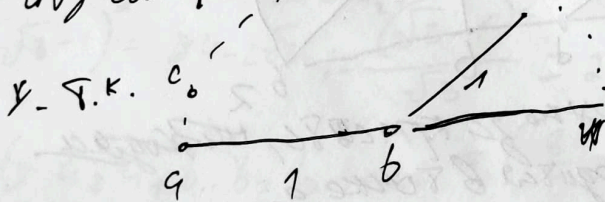
\Rightarrow Этот вариант не подходит.

Во втором случае есть случаи между сторонами длиной 1 и сторонами длиной ≤ 1 . Тогда

сумма углов $2022 \cdot 180^\circ$. \Rightarrow Этот случай также не подходит.

Случай, когда есть стороны длиной > 1 , можно не рассматривать, т.к. угол между сторонами длиной ≤ 1 и > 1 и сторонами длиной > 1 и $< 90^\circ$, а между сторонами длиной > 1 и сторонами > 1 и $< 90^\circ$, т.к. иначе условие не выполняется и длина > 1 .

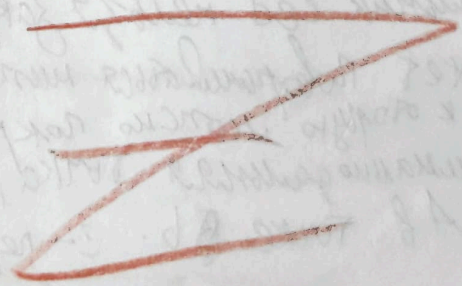
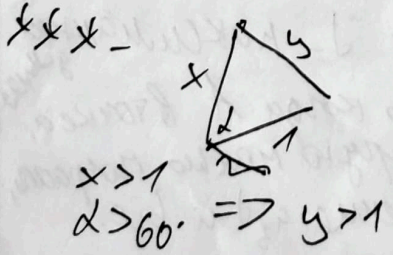
Если есть стороны длиной > 1 , то сумма углов не увеличится, \Rightarrow Этот случай рассматривать не нужно.



$\angle bac < 90^\circ$

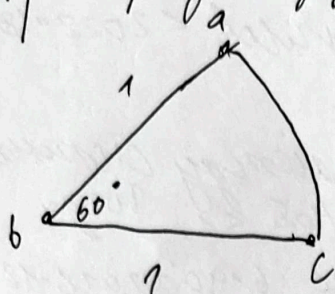
1 можно не рассматривать между a и b можно увеличить

xx - т.к. если в равнобедренном треугольнике угол между равными сторонами $> 60^\circ$, то основание меньше стороны



№ 3, Продолжение

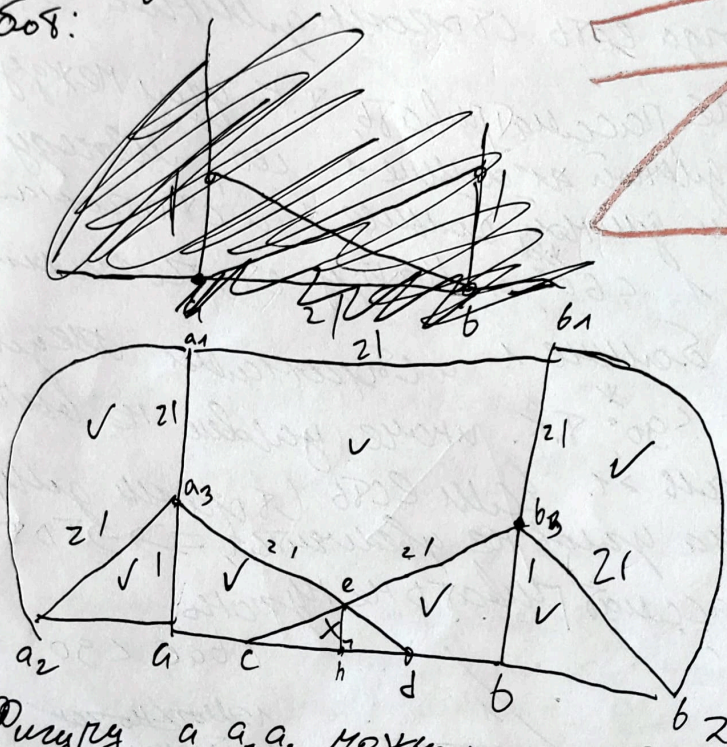
пример для двух сторон:



Остальные 2021 точки - на дуге ac ; дуга ac - часть окружности с радиусом 1 в центре b .

Ответ: 2.

б). Площадь Площадь которую может закрасить робот:



Фигуру $a a_1 a_2$ можно закрасить, ~~необходимо~~ когда A находится в точке a ;

Фигуру $b b_1 b_2$ можно закрасить, когда A находится в точке b

Треугольник sed нельзя закрасить, т.к. штанга BC_0 не может поворачиваться мимо ab ; d - максимальная точка, которую можно закрасить когда A в точке a , c - максимально дальняя точка, которую можно закрасить, когда A в точке b . e - пересечение $a_3 d$ и $b_3 c$.

№ 6, продолжение

a_3 - точка где находится B, когда A в точке a.

b_3 - точка, где находится B, когда A в точке b;

$a_1 d = \frac{\sqrt{3}}{2} l$; $b_1 c = \frac{\sqrt{3}}{2} l$; $\angle a a_3 d = 60^\circ$; $\angle a b b_3 c = 60^\circ$;

$\angle b b_3 b_2 = 60^\circ$; $\angle a a_3 a_2 = 60^\circ$; $\angle b_1 b_3 b_2 = 120^\circ$;

$\angle a_1 a_3 a_2 = 120^\circ$; $a a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} l$; $b b_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} l$.

У-т.к. соотн по длине сторон ~~треугольника~~ ~~треугольника~~ ~~треугольника~~

треугольника - 1:2 (катет: гипотенуза)

$$S_{b_1 b_3 b_2} = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot l^2 = \frac{4}{3} \pi l^2 = S_{a_1 a_3 a_2}$$

$$S_{a a_3 a_2} + S_{b b_3 b_2} = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$

$$S_{a a_1 b_1 b d e c} = 6l^2 - S_{c e d}$$

$$c d = \frac{\sqrt{3}}{2} (2 - 2(2 - \sqrt{3})) = (2\sqrt{3} - 2)l$$

$$e h = a_3 a \cdot \frac{h d}{a d} = 1 \cdot \frac{(2\sqrt{3} - 2)l}{\sqrt{3}l} = 1 \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}$$

$$S_{c e d} = e h \cdot c d \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{\sqrt{3}}$$

$$S_{b_1 b_2 b_3} + S_{a_1 a_3 a_2} + S_{a a_3 a_2} + S_{b b_3 b_2} + S_{a a_1 b_1 b d e c} =$$

$$\frac{8}{3} \pi l^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l^2 + 6l^2 - \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2\sqrt{3}} l^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} \pi + \sqrt{3} + 6 - \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{\sqrt{3}} \right) l^2$$

~~$$S_{c e d} = S_{a a_3 a_2} \cdot \frac{c d}{a d} = \frac{\sqrt{3}}{2} l \cdot \frac{(2\sqrt{3} - 2)l}{\sqrt{3}l} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2\sqrt{3}} l^2$$~~

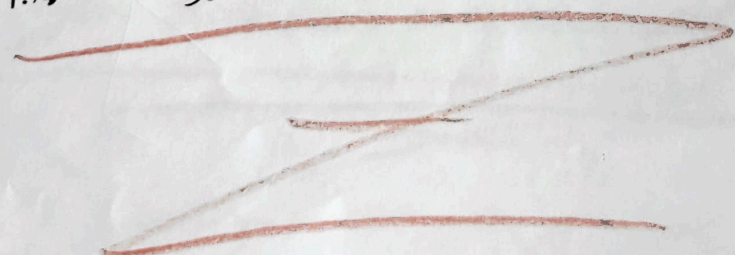
$$(\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}; \quad \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{\sqrt{3}} = 2 - \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$S_{a_2 a_1 b_1 b_2 b d e c a} = \left(\frac{8}{3} \pi + \sqrt{3} + 6 - \frac{4\sqrt{3}}{3} \right) l^2$$

$$\left(\frac{8}{3} \pi + 6 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) l^2$$

$$D_{\Delta a e c} = \left(\frac{8}{3} \pi + 6 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) l^2$$

$$У-т.к. 2l \cdot \sin 30^\circ = \sqrt{3}l$$



№5

Если корень целый, то $p^2 - 4q = a^2$; a - целое
 $x^2 + px + q - 2025^{24} = (x - 2023) \left(x + \frac{2025^{24} - q}{2023} \right)$, т.к. 2023 -

корень квадратного уравнения

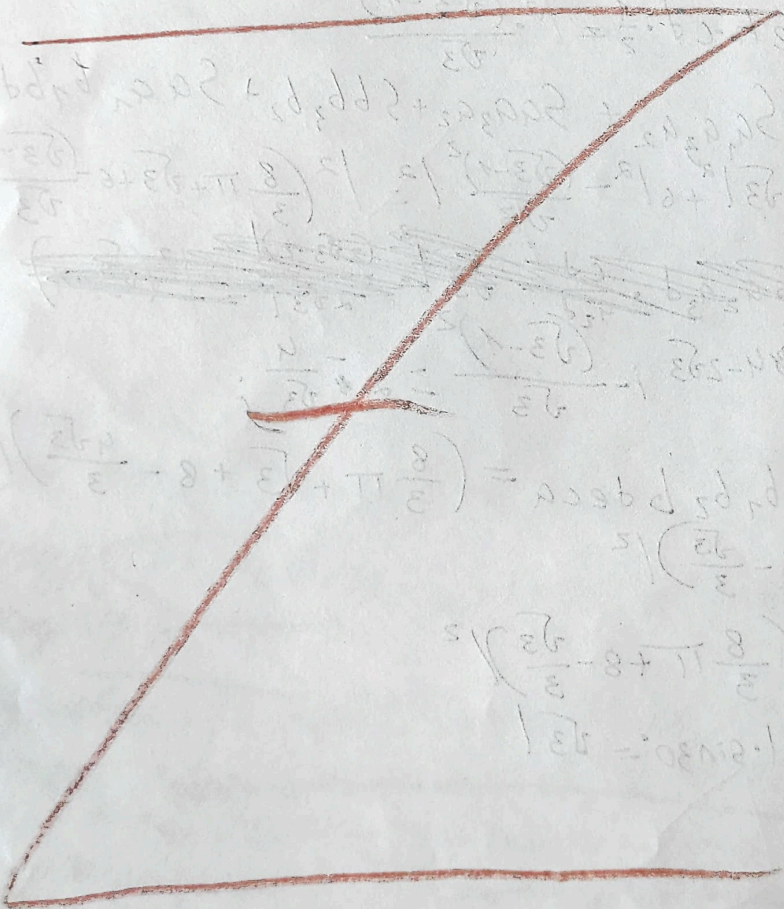
$$p = \frac{2025^{24} - a}{2023} - 2023 = \frac{2025^{24} - 2023^2 - a}{2023}$$

$$p^2 - 4q = 2025^{48} + 2023^4 - 2 \cdot 2025^{24} \cdot 2023^2 + q^2 + 2 \cdot 2023^2 q - 2 \cdot 2025^{24} q$$

$$2023^2 (p^2 - 4q) = 2025^{48} + 2023^4 - 2 \cdot 2025^{24} \cdot 2023^2 + q^2 - 2 \cdot 2023^2 q - 2 \cdot 2025^{24} q = (2023^2 + 2025^{24} - q)^2 - 4 \cdot 2025^{24} \cdot 2023^2$$

$$2023^2 = (2023^2 + 2025^{24} + 2 \cdot 2023^{12} \cdot 2025^{12} - q) (2023^2 + 2025^{24} - 2 \cdot 2023^{12} \cdot 2025^{12} - q) = 2023^2 \cdot q^2 = ((2023 + 2025^{12})^2 - q)$$

$$\left((2025^{12} - 2023)^2 - q \right)$$



~~2025~~ 20

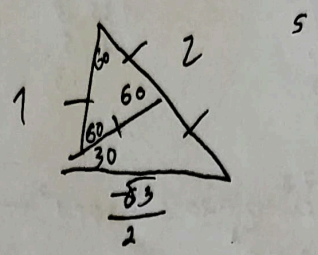
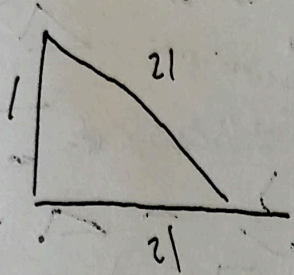
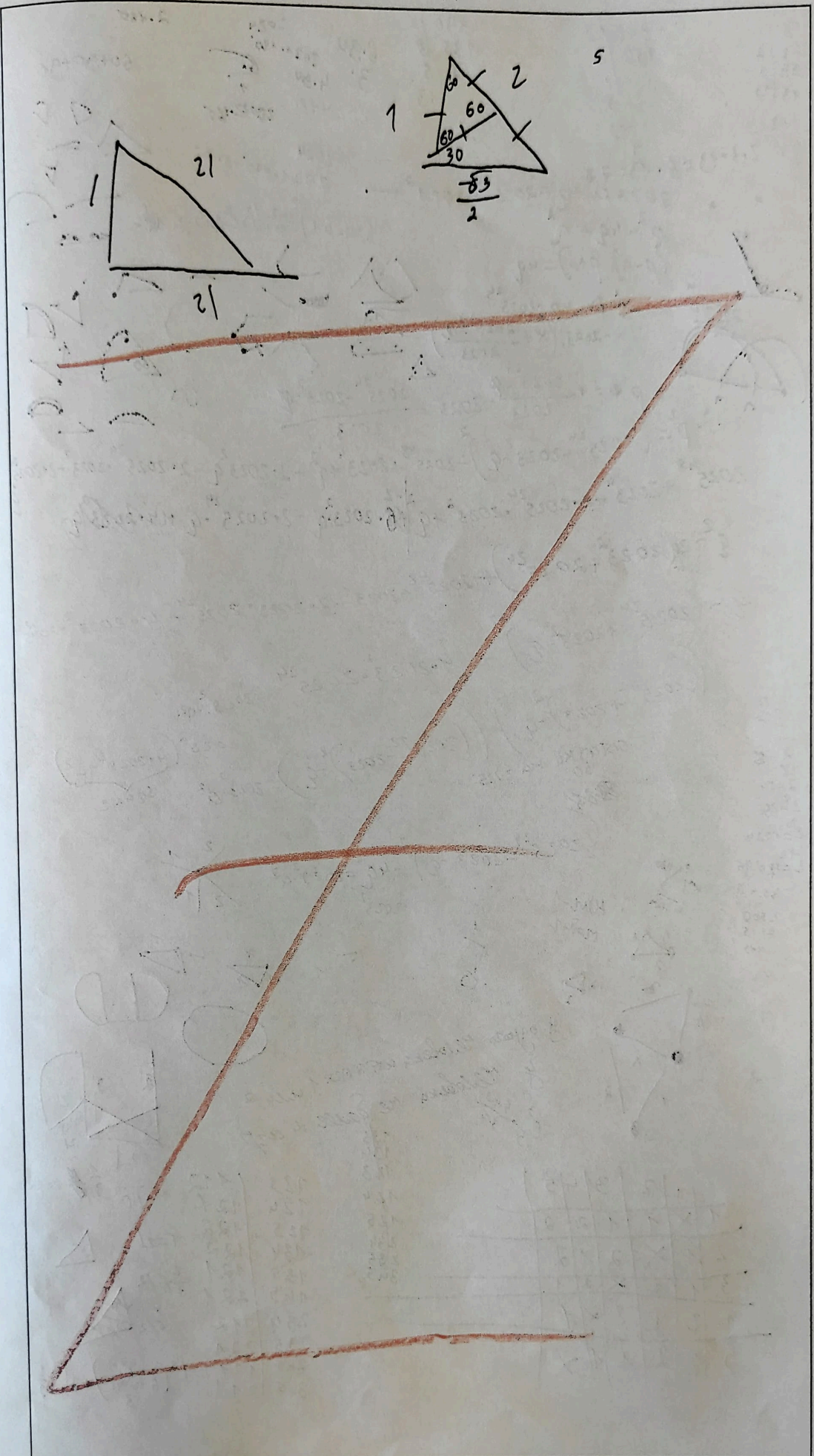
№ 4. Если это не так, то при случайном распределении
на 1012 и 1011 королевств, одноподбивает не
менее 50% алмазов, а другое - не менее 50%
золота. ~~Далее золото и алмазы X и Y.~~ Если
1011 королевств в лучшем производстве X, то
если взять ^{составляющую часть} X из 1012 и объединить с
1011, ситуация не изменится.

X - сильно плохого добывающего в той сфере,
в которой дано ^{не} 1012 лучше 1011.
^{из тех, кто был с ними в максимальном распределении.}
Так можно повторить до тех пор, пока
различия 1012 ^{внутренних} коалиций не станут
хуже во власти, после того как отдают

хуже всего работающее королевство. Т.к.
при таком обмене другие коалиции только улучшат
результат, получится нутное разделение.

Ответ: да.

XX - это произойдет, т.к. рано в какой-то момент
произойдет обмен 1011 худшими королевствами
и к этому моменту это точно произойдет. (изначально
1011 были в чем-то лучше, а 1011 худших для них - все)
X - в данном процессе коалиции (группы из
королевств) чередуются, т.к. после обмена
у другой становится 1012 королевств.



$156 \begin{array}{r} 2 \\ 78 \end{array} \begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ 39 \end{array} \begin{array}{r} 3 \\ 13 \end{array} \begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ 13 \end{array}$
 $312 \begin{array}{r} 2 \\ 156 \end{array} \begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 13 \end{array}$
 $390 \begin{array}{r} 2 \\ 195 \end{array} \begin{array}{r} 3 \\ 65 \end{array} \begin{array}{r} 5 \\ 13 \end{array}$
 $2024 \begin{array}{r} 2021 \cdot 180 \\ 3 \cdot 4 \cdot 90 \\ 2022 \cdot 180 \end{array} \begin{array}{r} 2024 \\ 2021 \cdot 180 + 3 \cdot 60 \\ 2022 \cdot 60 \end{array}$
 $2 \cdot 180$

$2 \cdot 3 \cdot 13 = 6 \cdot 13 = 78$
 $2023p + q = 2025^2 - 2023^2$
 $p^2 - 4q = a^2$
 $(p-a)(p+a) = 4q$
 $(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$

$x^2 + px + q = 2025^2$
 $(x-2023)(x + \frac{2025^2 - q}{2023})$
 $p = \frac{2025^2 - q}{2023} - 2023 = \frac{2025^2 - 2023^2 - q}{2023}$

$2023 \cdot p = (2025^2 - 2023^2 - q)^2$
 $2025^4 + 2023^4 - 2 \cdot 2025^2 \cdot 2023^2 + q^2 - 2 \cdot 2025^2 \cdot q - 2 \cdot 2023^2 \cdot q$
 $q^2 - 2q(2023^2 + 2025^2) + 2025^4 + 2023^4 + 2 \cdot 2023^2 \cdot 2025^2 - 4 \cdot 2023^2 \cdot 2025^2$

$(2025^2 + 2023^2 - q)^2 - 4 \cdot 2023^2 \cdot 2025^2 = 2023^2 \cdot q^2$
 $(2025^2 + 2023^2 - q)^2 - 4 \cdot 2023^2 \cdot 2025^2 = 2023^2 \cdot q^2$

$2 = 2^2 = 4$
 $2^4 = 16$
 $2^6 = 64$
 $2^8 = 256$
 $2^{10} = 1024$
 $2^{12} = 4096$
 $2^{14} = 16384$
 $2^{16} = 65536$
 $2^{18} = 262144$
 $2^{20} = 1048576$

$(2025^2 - 2023^2 - q)^2 - 4q = 2023^2 \cdot q^2$
 $2023^2 (4 \cdot 2025^2 + q^2)$

у одного человека нет 40х1 или 2.
 у человека не более 4 игр

	1	2	3	4	5
1	X	1	1	2	2
2	1	X	2	1	2
3	1	2	X	2	1
4	2	1	2	X	1
5	2	2	1	1	X

- 135
- 134
- 123
- 124
- 125
- 234
- 235
- 345

$123 \begin{array}{r} 112 \\ 121 \\ 122 \\ 121 \\ 121 \\ 221 \\ 212 \\ 221 \\ 121 \\ 211 \end{array}$
 $r = 2l$
 $\frac{4}{3}\pi/2$
 $\frac{4}{3}\pi$
 $l^2(6 + \frac{4}{3}\pi) + 2l \cdot \frac{1}{2}$