0 265248 080003

26-52-48-08
(127.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 06

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы"
наменование олимпиады

по Физике
профиль олимпиады

Иванова Родиона Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«5» апреля 2024 года

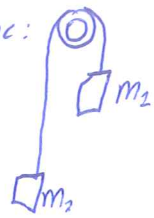
Подпись участника

Иванов

26-52-48-08 (127.1)

Задание 1)

Вопрос:



$m_1; m_2 >> m_1$;

$\frac{m}{l}$ ——— $\frac{m}{3l}$; $m_1 = 2m$;

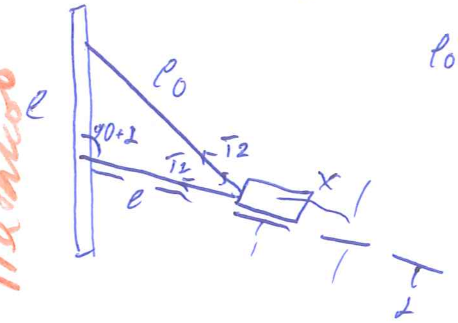
$k \cdot \Delta l = F$

F – постоянна по всей леске

т.о. $\Delta l = \frac{F}{k}$; $l_1 = \frac{1}{4} l$; $l_2 = \frac{3}{4} l$; $\Delta l_1 = \frac{1}{4}\Delta l = 0{,}25$мм

$\Delta l_2 = \frac{3}{4}\Delta l = 0{,}75$мм

Задача:

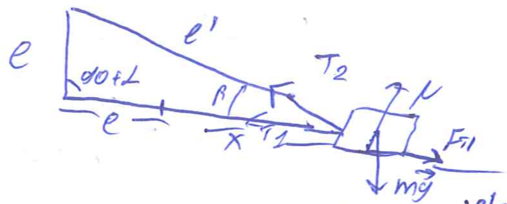


в момент одновременного натяжения

$l_0 = \sqrt{l^2 + l^2 - 2\cos(90+\alpha) l^2} = \sqrt{l^2 + l^2 + l^2 \cdot 2\sin\alpha} =$

$= \sqrt{3} l$

Рассмотрим смещение груза на x от ~~нач.~~ сост.



в пол равновесия:

2 з. Н:

$F_{тр} = T_1 + T_2 \cdot \cos\beta + mg\sin\alpha$

$N = mg\cos\alpha - T_2 \sin\beta$

$T_2 = k \cdot (l' - \sqrt{3} l)$

$T_1 = k \cdot x$

$T_2 \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{l}{l'} \cdot k(l' - \sqrt{3} l)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} k l - \frac{3}{2} \frac{l}{\sqrt{\dots}}$

$T_2 \cos\beta = k \cdot \left(\frac{5xl + 2l^2 + 2x^2}{2l + x} - \sqrt{3} l \cdot \dots\right)$

$kx +$

$l' = \sqrt{l^2 + (l+x)^2 + (x+l) l} =$

$= \sqrt{3l^2 + 3xl + x^2}$

$dl' = \sqrt{3} l \left(1 + \frac{dx}{2l}\right) - \sqrt{3} l = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot dx$

$\cos\beta = \frac{3l^2 + 3xl + x^2 + (l+x)^2 - l^2}{2\sqrt{3l^2 + 3xl + x^2} \cdot l + x} = \frac{5xl + 2l^2 + 2x^2}{2(l+x)\sqrt{\dots}}$

$\frac{l}{\sin\beta} = \frac{l'}{\sin(90+\alpha)}$

$\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3 + 3\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}}}$

$$\frac{F_{тр}}{N} = \frac{kx + \frac{5xl + 2l^2 + 2x^2}{2(l+x)} - \sqrt{3} l \cdot \frac{5xl + 2l^2 + 2x^2}{2(l+x) \cdot \sqrt{3l^2 + 3xl + x^2}} + mg\sin\alpha}{mg\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} k l + \frac{3}{2} \frac{kl}{\sqrt{3 + 3\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}}}} \le \mu$$

$\frac{T_1 + T_2\cos\beta + mg\sin\alpha}{mg\cos\alpha - T_2\sin\beta} \le \mu$; заметим что $T_1 \downarrow$ по мере увеличения T_2; $T_{1min} = 0$ (когда леска не натянута)

определяет равн.

скорее всего н/о ошиблись с напр $F_{тр}$

т.к. $\frac{F_{тр}}{N} \ge \frac{\sin\alpha\, mg}{\cos\alpha\, mg} = tg\alpha$ $tg\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0{,}4 = \mu$.

1	2	3	4
2	4	4	3
8	8	16	20

65 шестьдесят пять

$F_{тр} = mg\sin\alpha - T_1 - T_2\cos\beta$

Т.О.

$$\frac{mg\sin\alpha - T_1 - T_2\cos\beta}{mg\cos\alpha - T_2\sin\beta} \le \mu.$$

$\sin\beta < \frac{\sqrt{3}}{2}$ поскольку $x << \ell$;

$\cos\beta > \frac{1}{2}$; можно предположить что $\frac{\cos\beta}{\sin\beta} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} = tg\alpha$

Посмотрим на выражение $\frac{\cos\beta}{\sin\alpha} \approx \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$

$$tg\alpha \frac{mg - \frac{T_1}{\sin\alpha} - T_2\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}}{mg - T_2\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}} \le \frac{\mu}{tg\alpha}$$

$$1 - \frac{T_1/\sin\alpha}{mg - T_2\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}} \le \frac{\mu}{tg\alpha}$$

$$\frac{T_1}{\sin\alpha} \ge mg\left(1 - \frac{\mu}{tg\alpha}\right)$$

$$T_1 \ge mg\left(1 - \frac{\mu}{tg\alpha}\right)\sin\alpha = \cancel{0{,}3\,mg},$$

$mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$

в случае смены знака $F_{тр}$

$$\frac{\frac{T_1}{\sin\alpha} + T_2\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}) - mg}{mg - T_2\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}} \le \frac{\mu}{tg\alpha}$$

$$\frac{T_1}{\sin\alpha} \le \left(\frac{\mu}{tg\alpha} + 1\right) mg$$

$$T_1 \le mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

$$\frac{T_{1max}}{T_{1min}} = \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha} = \frac{(0{,}5 + 0{,}2\cdot\sqrt{3})^2}{\frac{1}{4} - 0{,}2^2\cdot 3} = \frac{\frac{37}{100} + 0{,}2\cdot\sqrt{3}}{\frac{13}{100}} =$$

$\frac{3}{25}$

$$= \frac{37 + 20\sqrt{3}}{13}$$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

$+ \cancel{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} =$

$\cancel{\mu(mg\cos\alpha -}$

подставим T_{max}

$\cancel{\mu(mg\cos\alpha} + T_2 \sin\beta) = \cancel{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} + T_2\cos\beta - \cancel{mg\sin\alpha}$

$+\mu T_2 \sin\beta = T_2 \cos\beta$

$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\mu};$

$\operatorname{tg}\beta < 0;$

$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\mu}\right) = \operatorname{arctg}(2,5)$

Т.О. груз отрывает от клина;

тогда $N=0$; ← опр. вариант

$mg\sin\alpha = T_1$; $\Delta T_2 \ll mg$;

$T_{2max} = mg\sin\alpha = \frac{mg}{2};$

Т.О. $\frac{T_{2max}}{T_{2min}} = \frac{1}{1 - \frac{2\sqrt{3}}{5}} = \frac{5}{5-2\sqrt{3}}$

Т.О. T_{max} достигается при $\beta = \operatorname{arctg}(2,5)$

$\cancel{\mu} mg\cos\alpha = T_2\sin\beta$; ← невозможно т.к. $\Delta T_2 \ll mg$

$dx_2 = dx_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow T_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} T_2$ при малых x

$mg\frac{\sqrt{3}}{2} - T_2 \cdot \frac{1}{2} = T_1 + T_2\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{mg}{2}$

$\cancel{-\frac{3\sqrt{3}}{4} T_2 = T_1 - \frac{mg}{2}(\sqrt{3}+1)}$

$mg\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{T_1}{\sqrt{3}} = T_2 + T_1 - \frac{mg}{2}$

$T_1\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{mg}{2}(\sqrt{3}-1)$

$$\boxed{T_{1\,min} = mg \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2+\frac{1}{\sqrt{3}}}}$$

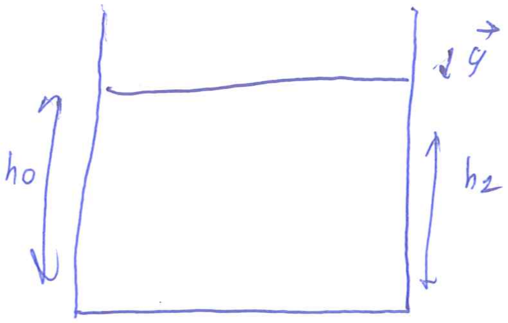
Задание 2

многоатом

$\gamma = \frac{i+2}{i}$; $\gamma = \frac{5}{3}; \frac{7}{5}; \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$;

1атом 2-хатом

Задача:



Из ЗСЭ:

УМК: знаем $pV^{\gamma} = const$.

т.к. процесс квазиравновесный

p_1 → давл поршня без гирьки

p_2 → с гирькой.

$p_1 \cdot (h_0 S)^{\gamma} = p_2 \cdot (h_1 S)^{\gamma}$

воспользуемся ЗСЭ: $Q = 0$:

$p \cdot S \cdot \Delta h = -(p_1 S h_0 - p_2 S h_1) \cdot \frac{C_V}{R}$ $\quad C_V = \frac{5}{2} R$;

$A_{над}$

$p_2 (h_0 - h_1) = -(p_1 h_0 - p_2 h_1) \cdot \frac{C_V}{R}$

$p_2 h_0 - p_2 h_1 = -\frac{5}{2} p_1 h_0 + \frac{5}{2} p_2 h_1$

~~$p_1 = p_2 \frac{\frac{2}{5}(h_0 - h_1) + h_1}{h_0} = \frac{147}{150} p_2 = \frac{49}{50} p_2$~~

$p_1 = p_2 \frac{\frac{7}{2} h_1 - h_0}{\frac{5}{2} h_0} = p_2 \frac{7 h_1 - 2 h_0}{5 h_0} = \frac{145 - 2}{150} = \frac{71}{75} p_2$

$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{h_1}{h_0}\right)^{\gamma}$

воспользуемся ЗСЭ при поднятии поршня

$-p_1 S (h_2 - h_1) = \frac{5}{2} \cdot (p_1 S h_2 - p_2 S h_1)$

$-p_1 h_2 + p_1 h_1 = \frac{5}{2} p_1 h_2 - \frac{5}{2} p_2 h_1$ $\quad (1{,}0424 = 1{,}16$

$5 p_2 h_1 + 2 p_1 h_1 = 7 p_1 h_2$.

$h_2 = \frac{5 p_2 h_1 + 2 p_1 h_1}{7 p_1} = \frac{\frac{75}{71} \cdot 5 \cdot h_1 + 2 h_1}{7} =$

$= h_1 \cdot \frac{375 + 142}{7 \cdot 71} = h_1 \cdot \frac{517}{7 \cdot 71} = h_1 \cdot \frac{517}{497} \approx h_1 (1 + \frac{1}{25}) = 30{,}16$ см

26-52-48-08 (127.1)

Задание 3.

Вопрос: когда они статичны, ведь только электростатические силы потенциальны

Несложно вывести формулу для напряжённости поля кольца:

$$dE_z = \frac{k\,dQ}{\sqrt{a^2+x^2}^2}\cdot\cos\alpha = \frac{k\,dQ}{\sqrt{a^2+x^2}^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{k x\,dQ}{\sqrt{a^2+x^2}^3};$$

Q, a, x, q, z

$$E_z = \oint dE_z = \frac{kxQ}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$F = E_z\cdot q = \frac{kxqQ}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

Найдём F_{max}) $kqQ\cdot\frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$

возьмём производную по ~~x~~

$$\frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}} - \frac{x\cdot\frac{3}{2}\sqrt{a^2+x^2}\cdot 2x}{(a^2+x^2)^{2\cdot 3/2}} = 0$$

$$1 = \frac{x\cdot 3x\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}^{3/2}}$$

$$a^2+x^2 = 3x^2;$$

$$x^2 = \frac{a^2}{2};\quad x = \frac{a}{\sqrt2}$$

$$F_{max} = kqQ\cdot\frac{\frac{a}{\sqrt2}}{(a^2\cdot\frac{3}{2})^{3/2}} = \frac{\frac{a}{\sqrt2}kqQ}{a\cdot\frac{\sqrt3}{\sqrt2}\cdot a^2\cdot\frac{3}{2}} = kqQ\cdot\frac{2}{a^2\cdot 3\sqrt3}$$

чтобы бусинка оторвалась $N=0$;

$$mg \geq kq|Q|\cdot\frac{2}{a^2\cdot 3\sqrt3}\qquad |Q| \leq \frac{mg}{kq\cdot\frac{2}{a^2\cdot3\sqrt3}} = \frac{mg\cdot4\pi\varepsilon_0}{q\cdot2}\cdot a^2\cdot3\sqrt3$$

↑ не отрыв бусинки

$$|Q| \leq \frac{6\sqrt3\, mga^2\pi\varepsilon_0}{q}$$

(+)

при $h = a$:

$$F = kqQ \cdot \frac{a}{(2a^2)^{3/2}} = \frac{a \cdot kQq}{2\sqrt{2} \cdot a^3}$$

$F = mg$;

$$\frac{\cancel{k} \cdot Q' \cdot q}{2\sqrt{2}a^2} = mg; \quad Q' = \frac{8\sqrt{2}\, mg \cdot a^2 \cdot \pi \varepsilon_0}{q}$$

$Q' > |Q|$ => бусинка отрыв.

воспользуемся выражением для потенциала на оси кольца

$$d\varphi = \frac{k\,dQ}{\sqrt{a^2+x^2}}; \quad \varphi_\varepsilon = \frac{kQ}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

Запишем ЗСЭ; скорость кольца очень медленная.

$$\frac{qk \cdot Q'}{\sqrt{2a^2}} = \frac{qk \cdot Q'}{\sqrt{h_{max}^2 + a^2}} + h_{max} mg$$

$$\frac{q \cdot Q'}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}a} - \frac{1}{\sqrt{h_{max}^2 + a^2}}\right) = h_{max} mg$$

$$\cancel{mg} \cdot 2\sqrt{2}\, a^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}a} - \frac{1}{\sqrt{h_{max}^2 + a^2}}\right) = h_{max} \cancel{mg}$$

$$\varepsilon = \frac{h_{max}}{a};$$

$$2a - \frac{2\sqrt{2}\,a}{\sqrt{\left(\frac{h_{max}}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{a}\right)^2}} = h_{max}$$

$$2 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon^2+1}} = \varepsilon$$

$$\cancel{\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 5 - \frac{4}{\varepsilon} - \frac{4}{\varepsilon^2} = 0}$$

$$\cancel{\left(\varepsilon + \frac{2}{\varepsilon}\right)^2} -$$

$$a(\varepsilon^2 + b\varepsilon + c)(\varepsilon^2 + a\varepsilon + d) = f(\varepsilon)$$

$a + b = -4$;

$c \cdot d = -4$

$bd + ca = -4$

$c + d + ab = 5$

$$4 + \varepsilon^2 - 4\varepsilon = \frac{8}{\varepsilon^2+1}$$

$$4\varepsilon^2 + 4 + \varepsilon^4 + \varepsilon^2 - 4\varepsilon^3 - 4\varepsilon$$

$$\varepsilon^4 - 4\varepsilon^3 + 5\varepsilon^2 - 4\varepsilon - 4 = 0$$

$$\cancel{(q^2 - 2q)^2 + q(q-2)^2 = 0}$$

$$\cancel{q^2 - 2q - 2(q+2)}$$

$$\cancel{(\varepsilon^2 - 2\varepsilon)^2 + (\varepsilon - 2)^2 = 8}$$

291
24
1164
582
6984

$\varepsilon \approx 2{,}91$

$h_{max} = 69{,}84$ (м)

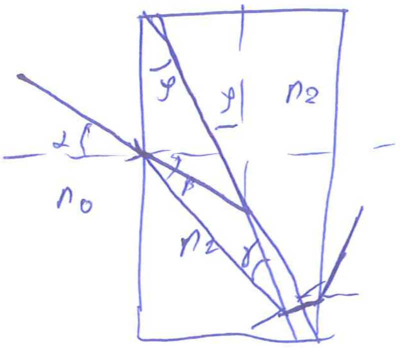
подобрал

$h_{max} \approx 70$ см

Задание 4;

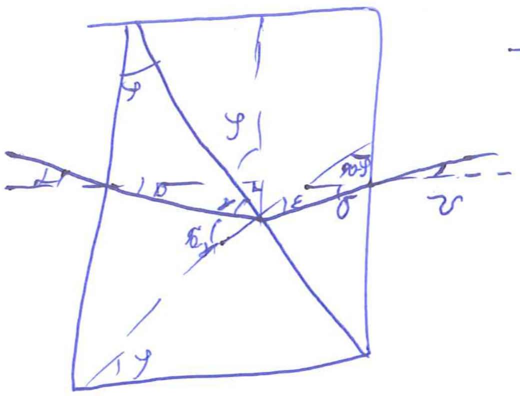
Вопрос 8: $n_1 \sin\angle 1 = n_2 \sin\angle 2$;

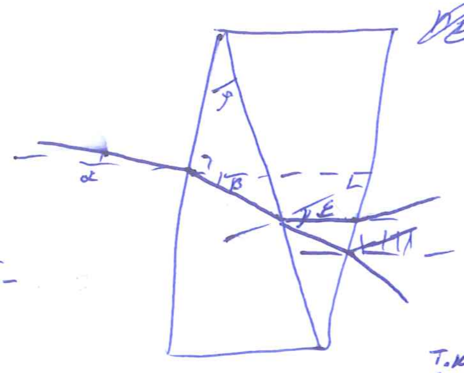
Задача:



$n_0 \cdot \sin\alpha = n_2 \cdot \sin(\beta)$

$\gamma = 90 - \beta - \varphi$





$n_2 \sin(90-\gamma) = n_2 \sin\varepsilon$

$n_2 \sin(\beta+\varphi) = n_2 \sin\varepsilon$

$\sigma = (180 - \varepsilon - (90-\varphi)) - 90^\circ = \varphi - \varepsilon$

$n_2 \overset{\sin}{(}\varphi - \varepsilon) = n_0 \cdot \sin(\upsilon)$

$\beta + \sigma + \gamma + \varepsilon = 90^\circ$

$\varphi = \sigma + \varepsilon$

Т.к. луч отклоняется в разные стороны (от перп.) то ошибка $\alpha \approx \sin\alpha$ не накапливается. и нет смысла исп. сложную триг.

заменим малые углы на $\sin(\alpha) \approx \alpha$.

$n_0 \alpha = n_1 \beta$

$n_1 \cdot (\beta + \varphi) = n_2 \varepsilon$

$n_2 \cdot (\varphi - \varepsilon) = n_0 \cdot \upsilon$

$n_0 \alpha + n_1 \varphi = n_2 \varepsilon$

$n_2 \varphi - n_0 \alpha - n_1 \varphi = n_0 \upsilon$

$(n_2 - n_1)\varphi = n_0(\upsilon + \alpha)$

в задаче не указана окр. среда => это вакуум

если окр.ср. - вакуум

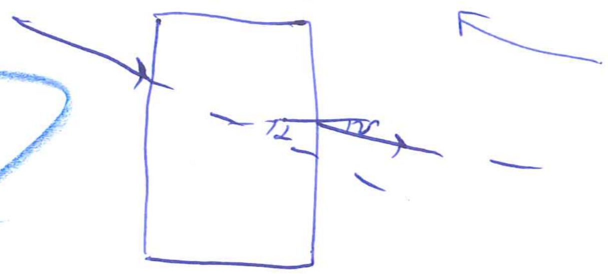
$n_0 = 1$;

Т.О. $\upsilon + \alpha = \Delta n \cdot \varphi$

$\upsilon = \Delta n \varphi - \alpha$

$\upsilon < 0$ => нужно было выбирать другое напр.

Т.О. мы имеем.



Т.О. $\delta = \alpha + \upsilon = \Delta n \varphi =$

$= 1{,}5^\circ$