0 642383 850003

64-23-83-85
(117.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 06

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы горы
наменование олимпиады

по физике
профиль олимпиады

Горячинова Юрия Леонидовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«05» апреля 2024 года

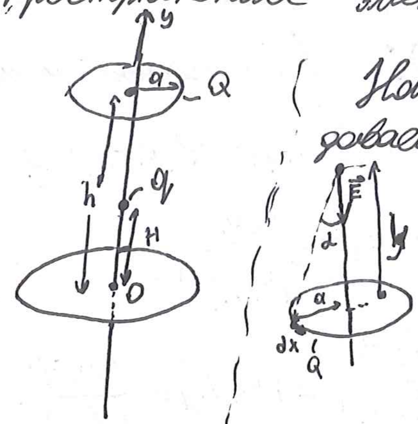
Подпись участника

64-23-83-85 (117.1)

черновик

№3.

Взаимодействие электрических зарядов можно считать потенциальным, если электрическое поле, создаваемое зарядами можно считать установившимся. Иными словами, скорость перемещения зарядов должна быть намного меньше скорости распространения электрического поля.



Найдём напряжённость, создаваемую кольцом вдоль стержня:

E в силу симметрии направлена вдоль стержня =>

$$\Rightarrow E = \frac{\sum k\, dx \cdot \frac{|Q|}{2\pi a}}{\sqrt{a^2+y^2}^{\,2}} \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow E(y) = \frac{k|Q|y}{\sqrt{a^2+y^2}^{\,3}}$$

$$\varphi(y) = \frac{\sum k\,dx \cdot \frac{|Q|}{2\pi a}}{\sqrt{a^2+y^2}} = \frac{k|Q|}{\sqrt{a^2+y^2}} \text{ — при } \varphi_\infty = 0$$

В нашей задаче $E(h,H) = \dfrac{k|Q|(h-H)}{\sqrt{a^2+(h-H)^2}^{\,3}}$

1) Для первого пункта $H=0$:

$E(h) = \dfrac{k|Q|h}{\sqrt{a^2+h^2}^{\,3}}$ — найдём, при каком h $E(h)$ — макс:

$$\frac{dE}{dh} = k|Q|\,\frac{\sqrt{a^2+h^2}^{\,3} - h\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot 2h\cdot\sqrt{a^2+h^2}}{\sqrt{a^2+h^2}^{\,6}} = 0$$

$$a^2+h^2-3h^2=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Downarrow$$

$h = \frac{1}{\sqrt{2}}a$ — при $h = \frac{1}{\sqrt{2}}a$ — E максимальное, значит если при $h=\frac{1}{\sqrt{2}}a$ бусинка не сдвинется, то она вовсе не придёт в движение (заряды по знаку у кольца и бусинки разные => кольцо будет тянуть бусинку вверх)

$$mg > \frac{k|Q|\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}a\cdot q}{\sqrt{a^2+\frac{1}{2}a^2}^{\,3}} = \frac{k|Q|\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}^{\,3}\cdot q}{a^2\, 3\sqrt{3}} = \frac{k|Q|\cdot 2\cdot q}{a^2\, 3\sqrt{3}}$$

$|Q| < \dfrac{3\sqrt{3}\, mga^2}{2kq}$ — бусинка не придёт в движение

$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$\Downarrow$

$|Q| < \dfrac{6\sqrt{3}\,\pi mga^2\varepsilon_0}{q}$

~~чистовик~~

2) $E(h, 0) = \frac{k|Q|\cdot a}{\sqrt{2a^2}^3} = \frac{\sqrt{2}k|Q|}{4a^2}$ ~~$= mg$ (по усл.)~~

$\Downarrow$

$\rightarrow E(q)\cdot q = mg$ (по усл.)

$\frac{\sqrt{2}k|Q|\cdot q}{4a^2} = mg \rightarrow |Q| = \frac{2\sqrt{2}mga^2}{kq}$

Пренебрежем изменением положения кольца ~~за~~ в сравнении со временем движения бусинки. Тогда запишем ЗСЭ: (в конечный момент h_1 и $v=0$)

$mg\cdot 0 + \varphi(a)\cdot q = mg\cdot h_1 + \varphi(a-h_1)\cdot q$

$\cancel{0\cdot mg} + \frac{k|Q|q}{\sqrt{a^2+a^2}} = mgh_1 + \frac{k|Q|q}{\sqrt{a^2+(a-h_1)^2}}$

$\frac{k|Q|q}{a\sqrt{2}} = mgh_1 + \frac{k|Q|q}{\sqrt{a^2+(a-h_1)^2}} = mgh_1 + \cancel{\frac{kQq}{a\sqrt{1+(\frac{h_1}{a})^2}}}$

~~$\frac{k|Q|q}{a\sqrt{2}} - mgh_1 = \frac{kQq}{\sqrt{a^2+(a-h_1)^2}} \Big| ()^2 \rightarrow \frac{(kQq)^2}{2a^2} - \sqrt{2}\frac{kQqmgh_1}{a} + (mg)^2h_1^2 = \frac{(kQq)^2}{a^2+h_1^2}$~~

$\frac{k|Q|q}{a\sqrt{2}} = mgh_1 + \frac{k|Q|q}{\sqrt{2a^2-2ah_1+h_1^2}}$

$k|Q|q\left(\frac{1}{a\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2a^2-2ah_1+h_1^2}}\right) = mgh_1$

$2\sqrt{2}\cancel{mg}a^2\left(\frac{1}{a\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2a^2-2ah_1+h_1^2}}\right) = \cancel{mg}h_1$

$2a - \frac{2a^2\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2-2ah_1+h_1^2}} = h_1 \Big| \cdot\frac{1}{a}$

$2 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2-2\frac{h_1}{a}+(\frac{h_1}{a})^2}} = \frac{h_1}{a}$ $\frac{h_1}{a} = x$

$\Leftrightarrow 2 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2-2x+x^2}} = x$

$4-4x+x^2 = \frac{8}{(2-2x+x^2)}$

$(x^2-4x+4)(x^2-2x+2) = 8$

$x^4-4x^3+4x^2-2x^3+8x^2-8x+2x^2-8x+8=8$

$x^4-6x^3+14x^2-16x=0$

$x^3-6x^2+14x-16=0$

~~x~~

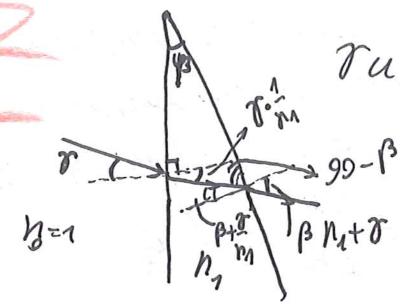
64-23-83-85 (117.1)

Чистовик

№4. При прохождении лучом границы раздела сред, луч, нормаль к поверхности в точке преломления и преломлённый луч лежат в одной плоскости и выполняется следующее соотношение:

$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$ (n_1 и n_2 – показатели преломления, α_1, α_2 – углы падающего и преломлённого луча)

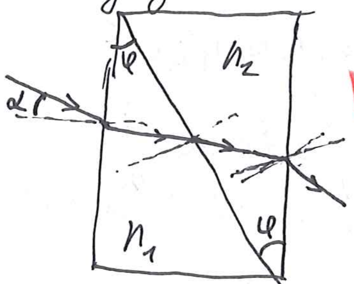
Рассмотрим прохождения луча через „клин“: (φ – острый угол будем считать малым)



γ и β – малые $\Rightarrow \sin(\beta+\gamma) \approx \beta+\gamma$ и аналогичные соотн.

Угол между входящим и выходящим лучом $\delta\gamma = \beta(n_1-1)$

В нашей задаче:



1. На границе между клиньями можно поместить малую воздушную прослойку и ничего не изменится. $\Delta\alpha_1$ – отклонение после 1, $\Delta\alpha_2$ – отклонение после 2.

Тогда δ будет равно $|\Delta\alpha_1 - \Delta\alpha_2|$, (разность $\Delta\alpha_1$ и $\Delta\alpha_2$ потому что направления клиньев не совпадают). $\Delta\alpha_1 = \varphi(n_1-1)$ $\Delta\alpha_2 = \varphi(n_2-1)$

$$\delta = \varphi|n_1-n_2| = \frac{1}{2}\varphi \qquad \delta = 1{,}5^\circ$$

Ответ: 1,5°

[чистовик]

№2. Для адиабаты справедливо. $PV^{\gamma} = const$, где γ – показатель адиабаты есть $\frac{C-C_p}{C-C_V}$.

Как мы видим γ может принимать любые ~~по~~ действительные значения, т.к. C может быть меньше нуля. –

~~Т.к. все превра изменения происходят медленно и аккуратно, наш процесс можно считать адиабатическим (успевает усто~~

Т.к. стенки сосуда теплоизолирующие можно считать процесс адиабатическим.

Газ двухатомный $\Rightarrow i = 5 \Rightarrow C_V = \frac{5}{2}R \quad C_p = \frac{7}{2}R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{0 - \frac{7}{2}R}{0 - \frac{5}{2}R} = \frac{7}{5}$$

$$P_1V_1^{\frac{7}{5}} = P_2V_2^{\frac{7}{5}} \; +$$

$\Downarrow$

ΔP – давление, создаваемое грузиком $\left(\frac{mg}{S}\right)$

$$\begin{cases} P_0(h_0S)^{\frac{7}{5}} = (P_0+\Delta P)(h_1S)^{\frac{7}{5}}, \\ \cancel{(P_0+\Delta P)(h_0S)^{\frac{7}{5}} = P_0(h_2S)^{\frac{7}{5}}} \end{cases}$$

$$\frac{P_0\left(h_0^{\frac{7}{5}} - h_1^{\frac{7}{5}}\right)}{h_1^{\frac{7}{5}}} = \Delta P = \frac{mg}{S} \Rightarrow mg = P_0S\left(\left(\frac{h_0}{h_1}\right)^{\frac{7}{5}} - 1\right)$$

$$U = \frac{i}{2}PV \; + \qquad \text{при } P = const \; (P_1 = P_2): \; \Delta U = \frac{i}{2}P\Delta V$$

ЗСЭ: $\frac{5}{2}P_0(h_2 - h_0)S = mg(h_0 - h_1)$ (изменение потенциальной энергии грузо пошло на увеличение U) –

$$\frac{5}{2}P_0(h_2 - h_0)S = P_0S\left(\left(\frac{h_0}{h_1}\right)^{\frac{7}{5}} - 1\right)(h_0 - h_1)$$

$$h_2 = \frac{2}{5}(h_0 - h_1)\left(\left(\frac{h_1}{h_0}\right)^{\frac{5}{7}} - 1\right) + h_0 =$$

$$\left(\frac{h_1}{h_0}\right)^{\frac{5}{7}} = \left(1 + \frac{h_1 - h_0}{h_0}\right)^{\frac{5}{7}} \approx 1 + \frac{h_1 - h_0}{h_0}\cdot\frac{5}{7} + \frac{\frac{5}{7}\left(\frac{5}{7} - 1\right)}{2}\cdot\left(\frac{h_1 - h_0}{h_0}\right)^2 =$$

$$= 1 - \frac{5(h_0 - h_1)}{7h_0} - \frac{5}{49}\cdot\frac{(h_0 - h_1)^2}{h_0^2} = 1 - \frac{5(h_0 - h_1)}{h_0}\left(\frac{1}{7} + \frac{h_0 - h_1}{49h_0}\right) =$$

$$= 1 - \frac{5(h_0 - h_1)}{7h_0}$$

$$h_2 = \frac{2}{5}(h_0 - h_1)\cdot\frac{5}{7}\frac{h_0 - h_1}{h_0} + h_0$$

$$h_2 = \left(\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{7\cdot 30}\right)\text{см} + 30\,\text{см} = \frac{1}{105}\text{см} + 30\text{см} \approx 30{,}01\,\text{см}$$

Ответ: 30,01 см

64-23-83-85 (117.1)

чистовик

№1. Закон Гука: $\Delta l = E\frac{l}{S}F$

~~Отношение~~ $\frac{l}{S}$ ~~у обоих кусков лески одинаковы~~

т.к. ~~равные массы и плотности~~: ρ, l_1

Пусть длина большего участка $3l$, а площадь S, тогда:

$$m_1 = m_2$$

$$\rho\cdot 3l\cdot S = \rho l\cdot S_2 \qquad S_2 = 3S$$

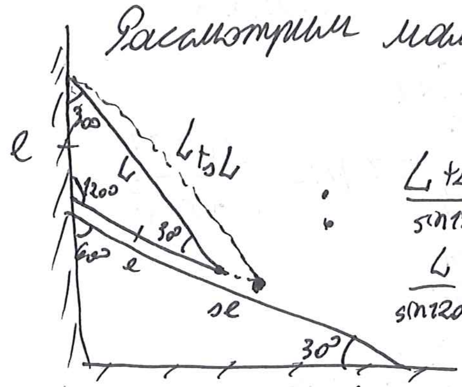
$$\Delta l_0 = \Delta l_1 + \Delta l_2 \qquad \Delta l_1 = E\frac{3l}{S}F \qquad \Delta l_2 = E\frac{l}{3S}F$$

$$\Downarrow \qquad \Delta l_1 = 9\Delta l_2$$

$$\begin{cases}\Delta l_2 = \frac{1}{10}\Delta l_0,\\ \Delta l_1 = \frac{9}{10}\Delta l_0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta l_2 = 0{,}1\text{ мм},\\ \Delta l_2 = 0{,}9\text{ мм}.\end{cases}$$

Рассмотрим малое удлинение лески:

$$L = 2l\cos30 = \sqrt{3}\,l$$



$$\left.\begin{aligned}\frac{L+\Delta L}{\sin120^\circ} &= \frac{l+\Delta l}{\sin30^\circ}\\ \frac{L}{\sin120^\circ} &= \frac{l}{\sin30^\circ}\end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{2\Delta L}{\sqrt{3}} = 2\Delta l$$

$$\Delta l = \frac{\sqrt{3}}{3}\Delta L$$

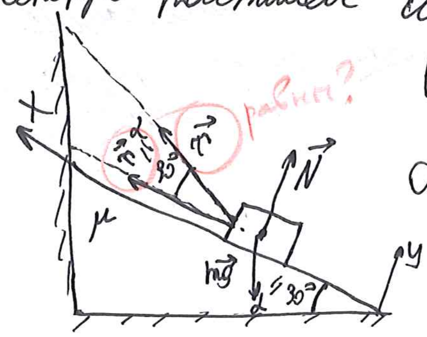
$$\begin{cases}\Delta L = E\frac{L}{S}\cdot F_1,\\ \Delta l = E\cdot\frac{l}{S}\cdot F_2;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta L = E\frac{\sqrt{3}l}{S}F_1,\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\Delta L = E\frac{l}{S}F_2.\end{cases}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{3}\frac{F_1}{F_2} \longrightarrow F_1 = F_2$$

−

Получаем, что натяжение обоих участков нити равны.

Теперь распишем силы:



$$\operatorname{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}6 > 0{,}4 = \mu$$

~~$OY: N = mg$~~

OY: $mg\cos\alpha = N + T\sin\alpha \rightarrow N = mg\cos\alpha - T\sin\alpha$

$N > 0 \Rightarrow mg\cos\alpha > T\sin\alpha$

$T_1 \neq T_2$

OX: $T(1+\cos\alpha) = mg\sin\alpha + F_{тр}$

$$T < mg\operatorname{ctg}\alpha$$

$$T = \frac{mg\sin\alpha + F_{тр}}{1+\cos\alpha} \qquad T < mg\sqrt{3}$$

$(F_{тр} \in [-\mu N; \mu N])$

$T = \frac{mg\sin\alpha + F_{тр}}{(1+\cos\alpha)}$; $\left\{ T_{max} = \frac{mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha - \mu T\sin\alpha}{} \right.$

$N = mg\cos\alpha - T\sin\alpha$

Чистовик

Рассмотрим граничные значения $F_{тр}$, тем самым найдя границы T:

При $F_{тр} = -\mu N$:

$(1+\cos\alpha)T_1 = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha + T_1\mu\sin\alpha$

$T_1 = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{1+\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$

$T_1 = \frac{mg\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1+\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}} = mg\frac{(5-2\sqrt{3})}{10+5\sqrt{3}-2} = mg\frac{5-2\sqrt{3}}{8+5\sqrt{3}}$

При $F_{тр} = \mu N$:

$(1+\cos\alpha)T_2 = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha - T_2\mu\sin\alpha$

$T_2 = mg\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{1+\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$

$T_2 = mg\frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}} = mg\frac{5+2\sqrt{3}}{12+5\sqrt{3}}$

$\left| \begin{array}{l} T_1 \approx mg\frac{5-2\cdot 1{,}7}{8+5\cdot 1{,}7} = mg\frac{1{,}6}{16{,}5} \approx \frac{mg}{10} \\ T_2 \approx mg\frac{5+2\cdot 1{,}7}{12+5\cdot 1{,}7} = mg\frac{8{,}4}{20{,}5} \approx \frac{2}{5}mg < mg\sqrt{3} \end{array} \right.$ (проверка условия $N=0$)

$T \in [T_1; T_2]$ $\quad T \in \left[mg\frac{5-2\sqrt{3}}{8+5\sqrt{3}}; mg\frac{5+2\sqrt{3}}{12+5\sqrt{3}}\right]$

$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(5+2\sqrt{3})(8+5\sqrt{3})}{(5-2\sqrt{3})(12+5\sqrt{3})} = \frac{70+41\sqrt{3}}{30+\sqrt{3}} \approx 4$

Чтобы натяжение было максимальным, нужно поместить брусок как можно ниже, чтобы леска противодействовала силе тяжести и силе трения.

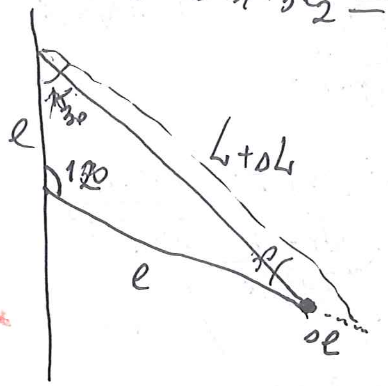
черновик

$m_1 = m_2 = m$
$l_1 = 3l_2 = 3l$
$\rho_1 = \rho_2 = \rho$
$\Rightarrow 3S_1 = S_2 = 3S$

$\varepsilon = E \cdot \delta$

$\frac{\Delta l}{l} = E \cdot \frac{F}{S}$ $\Delta l = E \frac{l}{S} \cdot F$

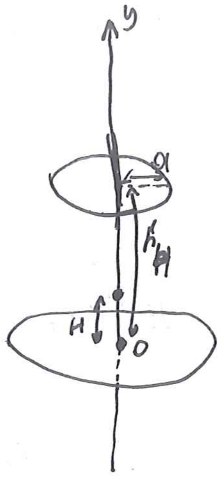
$\Delta l_0 = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{3El}{3S}$



$\sin\frac{30}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$

$\frac{\Delta L}{\sin 30} = \frac{\Delta l}{\sin 75}$

$2\Delta l$ $\frac{\Delta L}{\sqrt{3}} = 2\Delta l$



$$\varphi(h,H)=\frac{k\,\cancel{q}\,|Q|}{\sqrt{a^2+(h-H)^2}}$$ Черновик

~~При~~ $H=0$:

$$E(h,H)=\frac{\sum k\cdot dx\cdot\frac{Q}{2\pi a}}{\sqrt{a^2+(h-H)^2}^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{(h-H)}\,k\,(h-H)}{\sqrt{(H-h)^2+a^2}}=$$

$$=\frac{kQ\,(h-H)}{\sqrt{a^2+(h-H)^2}^3}$$

При $H=0$: $E(h)=\frac{kQh}{\sqrt{a^2+h^2}^3}$

$$\cancel{\frac{dE}{dh}=kQ\left(\frac{\sqrt{a^2+h^2}^3-\left(-\frac{3}{2}\right)h\cdot 2h\,\sqrt{a^2+h^2}^5}{(a^2+h^2)^3}\right)=0}$$

$$\sqrt{a^2+h^2}^3+\frac{3}{2}h^2=$$

$$\frac{dE}{dh}=kQ\left(\frac{\sqrt{a^2+h^2}^3-h\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot 2h\cdot\sqrt{a^2+h^2}}{\sqrt{a^2+h^2}^3}\right)=0$$

$$\sqrt{a^2+h^2}^2$$

$$a^2+h^2-3h^2=0$$

$$h=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$E_{max}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)=\frac{kQ\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{a^2+\frac{1}{2}a^2}^3}=\frac{kQ\,\frac{\sqrt{2}}{2}}{a^2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}^3}=\frac{kQ\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}}{a^2\cdot 3\sqrt{3}}=\frac{2kQ\sqrt{3}}{9a^2}=$$

$$=mg\to Q\ldots$$