Олимпиада ПВГ
2016

82-64-96-20
(115.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 3-2 г. Уфа.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы Горы

по МАТЕМАТИКЕ

Шайхутдиновой Алисы Артуровны
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата
«13» марта 2016 года

Подпись участника

82-64-96-20
(115.1)

Чистовик.

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

80
восемьдесят

1	2	3	4	5
+	+	+	±	∓

+

① $8x^2+y^3=2016$, $x, y \in N \Rightarrow x \geq 1$, $y \geq 1$.
$2016 = 8 \cdot 252 \Rightarrow 2016 \vdots 8$, а т.к. $8x^2 \vdots 8$, то $y^3 \vdots 8 \Rightarrow y \vdots 2 \Rightarrow y = 2n$, где $n \in N$.

$8x^2 + 8n^3 = 2016$

$x^2 + n^3 = 252 \Rightarrow 1 \leq x \leq 15$, $1 \leq n \leq 6$, т.к. $15^2 = 225$, а $16^2 = 256$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$.

$n=1 \Rightarrow x^2 = 251$ – не уд.
$n=2 \Rightarrow x^2 = 252-8 = 244$ – не уд.
$n=3 \Rightarrow x^2 = 252-27 = 225 = 15^2 \Rightarrow x = 15$ – уд.
$n=4 \Rightarrow x^2 = 252-64 = 188$ – не уд.
$n=5 \Rightarrow x^2 = 252-125 = 127$ – не уд.
$n=6 \Rightarrow x^2 = 252-216 = 36 = 6^2$ – уд.

Следовательно, подходят y, равные $2 \cdot 6 = 12$ и $2 \cdot 3 = 6$.

Ответ: $(15;6)$; $(6;12)$

Черновик

① $8x^2+y^3=2016$, $x, y \in N$. $\Rightarrow x, y \geq 1$

~~[illegible]~~, $2016 \vdots 8 \Rightarrow y^3 \vdots 8 \Rightarrow y \vdots 2$.

$2016 \vdots 3$.

$x^2: 0 \to 0$

$1 \to 1$

$2 \to 1 \Rightarrow y^3 \overset{3}{\equiv} 2$

$y^3 \overset{3}{\equiv} 0$

$x^3: 0 \to 0$

$1 \to 1$

$2 \to 2$. $\Rightarrow y \overset{3}{\equiv} 2$

$y \overset{3}{\equiv} 0$.

$y^3 = (2n)^3$

$8x^2 + (2n)^3 = 2016$.

$x^2 + n^3 = 252$.

$$\begin{array}{r|l} 2016 & 8 \\ \underline{16} & 252 \\ 41 & \\ \underline{40} & \\ 16 & \\ \underline{16} & \\ 0 & \end{array}$$

$2016 = 252 \cdot 8$

$n=1$: $x^2 = 251$ - неуд

$n=2$: $x^2 = 244$ - неуд

$n=3$: $x^2 = 225$

$\boxed{x=15}$ - уд.

$n=4$: $x^2 = 188$ - неуд

$n=5$: $x^2 =$

$49 \times 7 = 343$

$36 \times 6 = 216$.

$\boxed{1 \leq n \leq 6}$

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49,

1 2 3 4 5 6 7 ...

$16^2 = 256$

$\boxed{1 \leq x \leq 15}$

$1 \to 1$

$2 \to 4$

$3 \to 9$

$4 \to 6$

$5 \to 5$

$6 \to 6$

$7 \to 9$

$8 \to 4$

$9 \to 1$.

$\{1; 4; 5; 6; 9\}$

$1 \to 1$

$2 \to 8$

$3 \to 7$

$4 \to 4$

$5 \to 5$

$6 \to 6$

$7 \to 3$

$8 \to 2$

$9 \to 9$.

$252 - 8 = 244$. $252 - 27 = 225$ ~~$252 - 16 = 236$~~ $252 - 64 = 188$ $252 - 125 = 127$ $252 - 216 = 36$

② черновик.

1 2 3 4 5 | 6 7 8 9 10

$S = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$

$S_{51} = \frac{b_1(q^5-1)}{q-1} = 242$

$S_{52} = S_{10} - S_{51} = \frac{b_1(q^{10}-1)}{q-1} - \frac{b_1(q^5-1)}{q-1} = 58806$

$= 242$

$S_{10} = \frac{b_1(q^{10}-1)}{q-1} = 59048$ (1)

$S_5 = \frac{b_1(q^5-1)}{q-1} = 242.$ (2)

$$\begin{array}{r} \times 242 \\ 9 \\ \hline 2178 \end{array}$$

$S_6 = \frac{b_1(q^6-1)}{q-1} = x \cdot \frac{(q^3-1)(q^3+1)}{q-1}.$

$$\begin{array}{r} \times 242 \\ 4 \\ \hline 968 \\ +242 \\ \hline 1210 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +58806 \\ 242 \\ \hline 59048 \end{array}$$

$\frac{(1)}{(2)}$ $\frac{q^{10}-1}{q^5-1} = \frac{59048}{242}$

$$\begin{array}{r|l} -59048 & 242 \\ 484 & \overline{244} \\ \hline -1064 & \\ 968 & \\ \hline 968 & \\ -968 & \\ \hline 0. & \end{array}$$

$q^5 + 1 = 244$

$q^5 = 243$

$q = 3.$

$q^6 - 1 = 728.$

$$\begin{array}{r} \times 243 \\ 3 \\ \hline 729 \end{array}$$

$q^5 - 1 = 242.$

$\frac{b_1 \cdot 242}{2} = 242 \to b_1 = 2.$

~~$S = \frac{16cHho - 16H^2c + 2cho^2 - 2cHho + cHho}{}$~~

$S = \frac{15cHho - 16H^2c + 2cho^2}{2ho}$

$S' =$

Шифр

Чистовик

(*)

② $S_5 = 242 = \frac{b_1(q^5-1)}{q-1}$ (1)

+

$S_{10}' = S_{10} - S_5 = \frac{b_1(q^{10}-1)}{q-1} - \frac{b_1(q^5-1)}{q-1} = 58806$ (2)

(1) и (2) следуют из условия.

(1) в (2): $S_{10} = \frac{b_1(q^{10}-1)}{q-1} = 58806 + 242 = 59048$. (3)

$\frac{(3)}{(1)}: \frac{S_{10}}{S_5} = \frac{\frac{\cancel{b_1}(q^{10}-1)}{\cancel{q-1}}}{\frac{\cancel{b_1}(q^5-1)}{\cancel{q-1}}} = \frac{(q^5-1)(q^5+1)}{q^5-1} =$

$= q^5 + 1 = \frac{59048}{242} = 244$

$q^5 = 243 \Rightarrow q = 3$ – в (1):

$242 = \frac{b_1 \cdot 242}{2} \Rightarrow b_1 = 2$

$S_6 = \frac{b_1 \cdot (q^6-1)}{q-1} = \frac{2 \cdot 728}{2} = 728.$

Ответ: 728.

(*) Т.к. сумма первых пяти членов прогрессии не равна сумме следующих пяти членов, то $q \neq 1$.

стр. 2

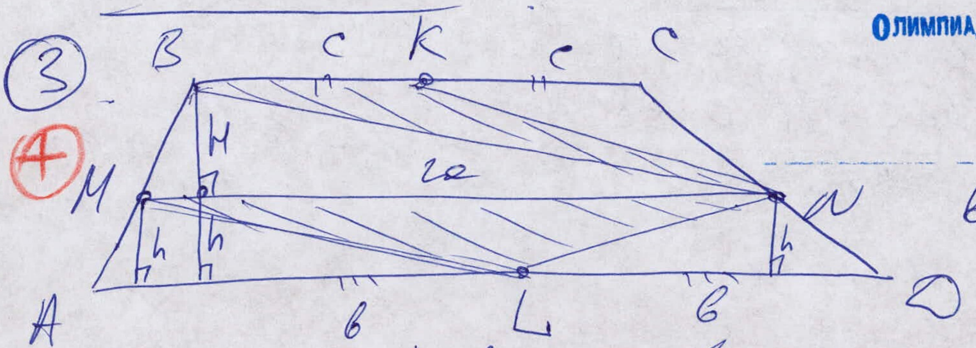
82-64-96-20
(115.1)

Черновик

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

③

④



$b = 9c$ (2) - из условия

$AD = 2b$
$BC = 2c$
$MN = 2a$

h_0 - высота трапеции
$h_0 = H + h$ (1)
Из условия: $MN \parallel CD \Rightarrow$
$\Rightarrow$ по теореме Фалеса:

$\frac{AM}{BM} = \frac{h}{H}$ - искомая величина. (3)

$S_{BKN} = \frac{1}{2} S_{BNC}$, т.к. основания у Δ-ков ΔBKN и ΔKCN одинаковы, а высота к ним (из т. N) - общая.

$$S_{BKN} = S_{MBCN} - S_{MBN} - S_{KNC} = \frac{1}{2} \cdot H \cdot (2c + 2a) - \frac{1}{2} \cdot H \cdot 2a - \frac{1}{2} \cdot H \cdot c = \frac{1}{2} H \cdot c = \frac{cH}{2} \quad (4)$$

$$S_{MNL} = S_{AMND} - S_{AML} - S_{LND} = \frac{1}{2} h (2a + 2b) - \frac{1}{2} \cdot hb - \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = ah \quad (5).$$

$$S_{ABCD} = \cancel{\tfrac{1}{2}} S_{MBCN} + S_{AMND} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (h + H) \cdot (2b + 2c) = \frac{1}{2} h (2a + 2b) + \frac{1}{2} H (2a + 2c)$$
$$\cancel{bh} + bH + ch + \cancel{cH} = ah + \cancel{bh} + aH + \cancel{cH}.$$
$$a(H + h) = bH + ch$$
$$a = \frac{bH + ch}{H + h} = \frac{9cH + ch}{h + H} = \frac{c(9H + h)}{h + H} \quad (6)$$

$S = S_{BKN} + S_{MNL}$ (7)

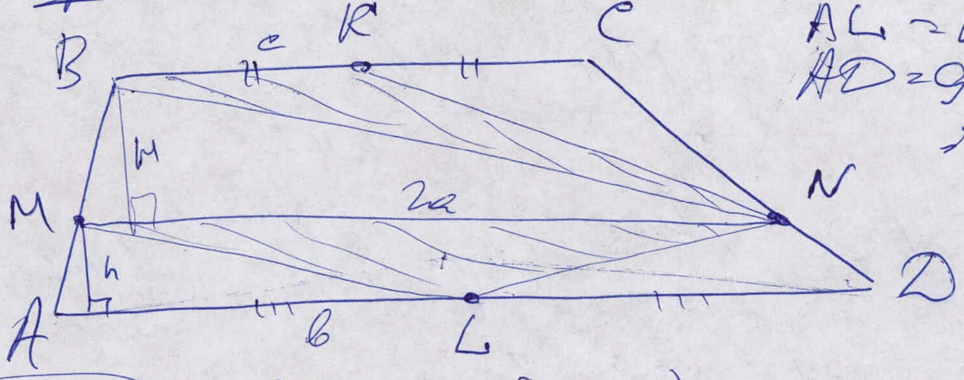
((6) в (5) и (4)) в (7):

$$S = \frac{cH}{2} + ah = \frac{cH}{2} + \frac{ch(9H + h)}{h + H} \overset{h_0/}{=} \frac{cH}{2} + \frac{\overset{2/}{c(h_0 - H)(8H + h_0)}}{h_0}$$

$$h = h_0 - H \xrightarrow{\quad} S = \frac{16cHh_0 - 16H^2c + 2ch_0^2 - 2cHh_0 + cHh_0}{2h_0}$$

Черновик

③.

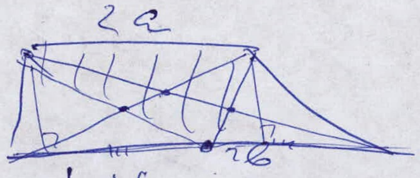


BK = KC
AL = LD
AD = 9BC ⇒
⇒ 2b = 9·2c
b = 9c

$\frac{AM}{MB}$ — ?

$(S_{BKN} + S_{MNL}) \to \max$

$S_{BKN} = \frac{1}{2} S_{BNC}$.



$S_\triangle = \frac{1}{2} h(2a+2b) - \frac{1}{2} h\cdot 2b = ah$.

$S_{BKN} = \frac{1}{2}\cdot(2c+2a)H - \cancel{\frac{1}{2}\cdot H\cdot 2a} - \frac{1}{2}\cdot H\cdot\frac{1}{2}\cdot 2c = \frac{cH}{2}$.

$S_{BKN} = \frac{cH}{2}$

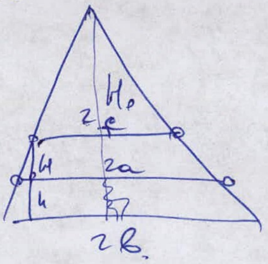
$S_{MNL} = ah$.

AM : MB = h : H.

$h_0 = h + H$.

$H = h_0 - h$.

$h = h_0 - H$



~~[illegible] + ah~~

$= \frac{1}{2}\cdot H\cdot(2a+2c) + \frac{1}{2}h(2a+2b) = \frac{1}{2}\cdot(2c+2b)\cdot(H+h)$

$H(a+c) + h(a+b) = H(b+c) + h(b+c)$

$aH + \cancel{cH} + ah + \cancel{bh} = bH + \cancel{cH} + \cancel{bh} + ch$.

$a(H+h) = bH + ch$.

$a = \frac{bH+ch}{H+h} = \frac{c(9H+h)}{H+h}$.

$S = \frac{ch(9H+h)}{H+h} + \frac{cH}{2} = \frac{c(h_0-H)(9H+h_0-H)}{h_0} + \frac{cH}{2} = \frac{c(h_0-H)(8H+h_0)}{h_0} + \frac{cH}{2}$.

Черновик.

$$S = \frac{15cHh_0 - 16H^2c + 2ch_0^2}{2h_0}$$

$(a+b)^3 =$

$= (a+b)(a^2+2ab+b^2) =$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 +$

$+ a^2b + 2ab^2 + b^3 =$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

$$S = \frac{15}{2}cH - 8\frac{H^2c}{h_0} + ch_0$$

$\frac{H}{h_0} = x \Rightarrow H = h_0 \cdot x.$

$$S = \frac{15}{2}c \cdot h_0x - 8h_0x^2c + ch_0.$$

$$S' = \frac{15}{2}ch_0 - 16h_0xc = 0.$$

$$16x = \frac{15}{2} \Rightarrow x = \frac{15}{32}.$$

---

④ $\cos^3x + (\sin x + \cos x) \cdot \sin x \cdot \cos x +$

$+ \sin^3x < \sqrt{-\sin 2x}.$

$\sin 2x \leq 0.$

$\cos^3x + \sin^2 \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos^2x + \sin^3x =$

$= (\sin x + \cos x)^3 - 2(\sin x + \cos x) \cdot \sin x \cdot \cos x.$

$2\sqrt{2}\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\sin 2x \cdot \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) < \sqrt{\sin 2x}.$

$2\sqrt{2}\cos^3x\left(\frac{\pi}{4}-x\right) -$

$\sin 2x \cdot \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\right).$

$(\sin x + \cos x)(\sin^2x - \sin x\cos x + \cos^2x) +$

$+ (\sin x + \cos x) \cdot \sin x \cdot \cos x =$

$= (\sin x + \cos x)$

$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) < \sqrt{-\sin 2x}.$

шифр

Чистовик

③. Продолжение.

$$S = \frac{15cHh_0 - 16H^2c + 2ch_0^2}{2h_0} = \frac{15}{2}cH - 8\frac{H^2c}{h_0} + ch_0$$

$$\frac{H}{h_0} = x \Rightarrow H = h_0 \cdot x.$$

$$S(x) = \frac{15}{2} \cdot c \cdot h_0 \cdot x - 8 \cdot h_0 \cdot x^2 \cdot c + ch_0.$$

$S'(x) = 0$ − тогда S максимальна (ветви параболы смотрят вниз ⇒ это максимум)

$$S'(x) = \frac{15}{2}ch_0 - 16ch_0x = 0.$$

$$16x = \frac{15}{2} \Rightarrow x = \frac{15}{32} \Rightarrow \frac{H}{h_0} = \frac{15}{32} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{h}{h_0} = \frac{32-15}{32} = \frac{17}{32} \Rightarrow AM:MB = h:H = 17:15.$$

Ответ: 17 : 15.

④ $A = \cos^3x + (\sin x + \cos x)\cdot \sin x \cdot \cos x + \sin^3 x < \sqrt{-\sin 2x}.$

(*) $\sin 2x \le 0.$

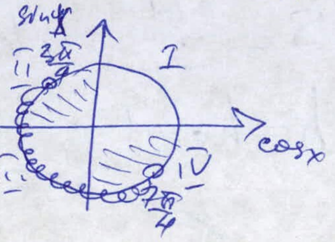
$A = (\cos x + \sin x)(\sin^2 x \cancel{+} - \sin x\cos x + \cos^2 x) + (\sin x + \cos x)\cdot \sin x \cdot \cos x = (\sin x + \cos x)$

$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \sqrt{-\sin 2x}.$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0 \\ \sin 2x \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \cancel{\sin 2x \le 0} \\ (\sin x + \cos x)^2 < -\sin 2x. \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$\sin 2x \le 0 \Rightarrow \sin x \cdot \cos x \le 0 \Rightarrow x$ лежит во II-й или IV-й четверти

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right)$ $n \in Z$



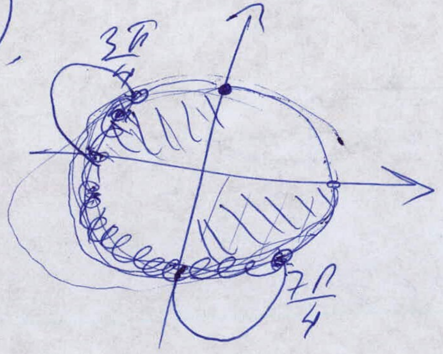
стр. 4. Продолжение далее...

черновик

~~$2\sin^2(x+\frac{\pi}{4})$~~ $a<\sqrt{b}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{4})<0\\ \sin 2x \leq 0.\end{cases}\\ \begin{cases}\sin 2x\leq 0\\ 2\sin^2(x+\frac{\pi}{4})<-\sin 2x.\end{cases}\end{array}\right.$$

1).



$2\sin x\cdot\cos x\leq 0.$

$x\in(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \pi+2\pi n]\cup$

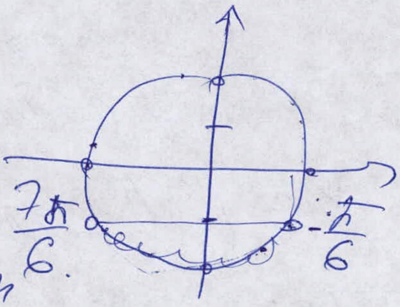
$\cup[\frac{3\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{4}+2\pi n)$

2). $(\sin x+\cos x)^2<-\sin 2x.$

$\sin^2x+2\sin x\cdot\cos x+\cos^2x<-2\sin x\cdot\cos x.$

$1+2\sin 2x<0.$

$\sin 2x<-\frac{1}{2}.$



$\frac{7\pi}{6}+2\pi n<2x<\frac{11\pi}{6}+2\pi n$

$\frac{7\pi}{12}+\pi n<x<\frac{11\pi}{12}+\pi n.$

$\frac{14\pi}{6}=2\pi+$

$\frac{7\pi}{12}+\pi=\frac{19\pi}{12}=$

~~$\frac{5\pi}{6}+$~~ $\frac{11\pi}{12}+\pi.$

черновик. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6x+3}{4x^2+4x+10} =$

⑤. $x \in R$.

$b \le 9^{\frac{6x+3}{2(2x^2+2x+5)}} < a$.

$x=0: \; b \le 9^{\frac{3}{10}} < a$.

$x=1: \; b \le 9^{\frac{9}{18}=\frac{1}{2}} < a$ $\quad -\frac{5}{6}; \frac{-2}{10}$

$\frac{6x+3}{4x^2+4x+10} \quad b \le \frac{1}{2} < a$

$-1: \; \frac{-3}{2} = -1{,}5. \quad 5^{-1{,}5}$

$-2: \; \frac{-9}{-14} = \frac{9}{14}$

[illegible] $\quad -3: \frac{-15}{-38} = \frac{15}{38}$

$f(x) = \frac{6x+3}{4x^2+4x+10}$.

$f'(x) = \frac{6(4x^2+4x+10)-(8x+4)(6x+3)}{} > 0$.

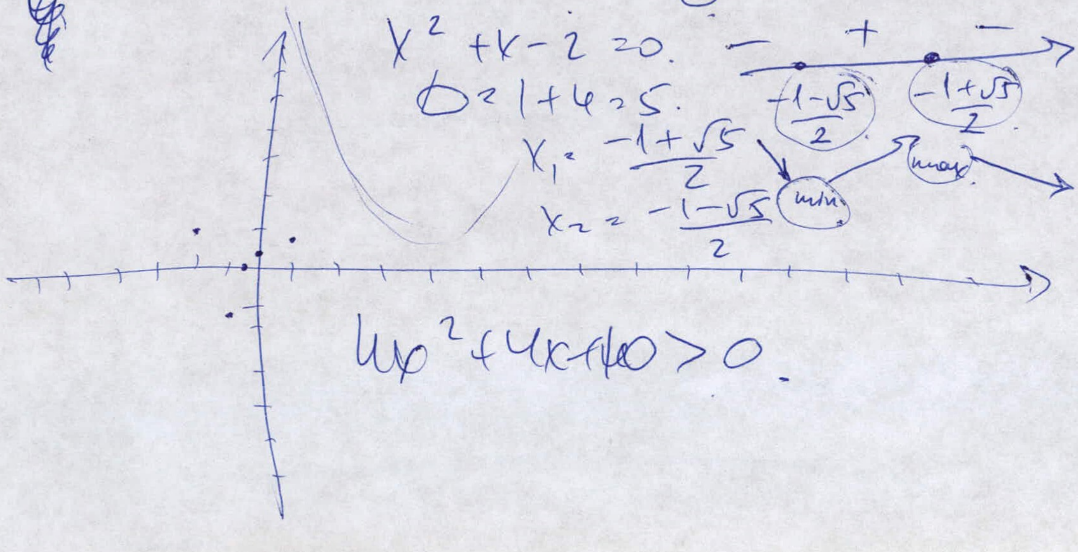
$-\frac{1}{2}$

$24x^2 + 24x + 60 -$

$- 48x^2 - 48x - 12 > 0$.

$-24x^2 - 24x + 48 > 0$.

$-x^2 - x + 2 > 0$



$x^2 + x - 2 = 0$.

$D = 1 + 4 = 5$.

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

$4x^2 + 4x + 10 > 0$.

Чистовик.

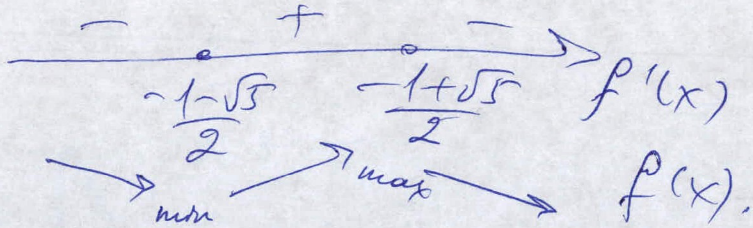
$-24x^2-24x+48>0$.

$-x^2-x+2>0$

$x^2+x-2=0 \Rightarrow D=5.$

не верно подсчет

$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$



Значит, при $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ $f(x)$ достигает минимума, при $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ — максимума.

Ответ:

$b\leq 9^{\frac{6x+3}{4x^2+4x+10}}$, где $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$,

$a\geq 9^{\frac{6x+3}{4x^2+4x+10}}$, где $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

(т.к. $9>1$, то $f_1(x)=9^{\frac{6x+3}{4x^2+4x+10}}$ — возрастающая).

Шифр

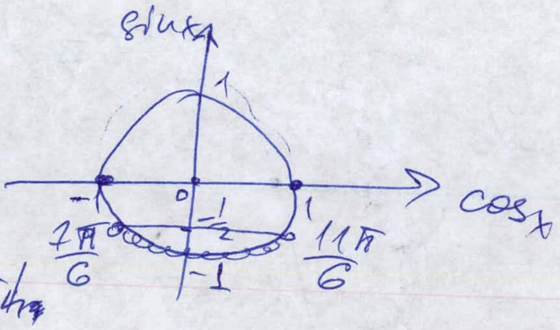
Чистовик

④. Продолжение.

$$\begin{cases}(\sin x+\cos x)^2<-\sin 2x\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geq 0\end{cases}$$

$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1+\sin 2x<-\sin 2x.$

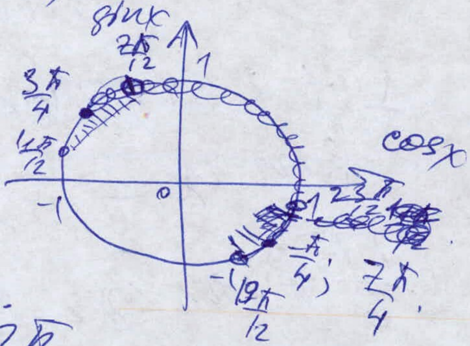
$$\begin{cases}\sin 2x<-\frac{1}{2}\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geq 0\end{cases}$$



$$\begin{cases}\frac{7\pi}{6}+2\pi n<2x<\frac{11\pi}{6}+2\pi n\\ 2\pi m\leq x+\frac{\pi}{4}\leq 2\pi m+\pi;\ n,m\in Z.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{7\pi}{12}+\pi n<x<\frac{11\pi}{12}+\pi n\\ -\frac{\pi}{4}+2\pi m\leq x\leq\frac{3\pi}{4}+2\pi m;\ n,m\in Z.\end{cases}$$

~~$x\in\left(\frac{7\pi}{12}+2\pi m;\frac{3\pi}{4}+2\pi m\right]$ $m\in Z$~~



$x\in\left(\frac{7\pi}{12}+2\pi m;\frac{3\pi}{4}+2\pi m\right]$ $m\in Z.$

Ответ: $x\in\left(\frac{7\pi}{12}+2\pi m;\frac{3\pi}{4}+2\pi m\right]\cup$
$\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\pi+2\pi n\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2}+2\pi n;\boxed{\frac{7\pi}{4}}+2\pi n\right),$
$m,n\in Z.$

верная совок. пром-в сняты неверно

не верно решена

⑤ $b\leq 9^{\frac{6x+3}{4x^2+4x+10}}<a,\ x\in R.$

Рассмотрим $f(x)=\frac{6x+3}{4x^2+4x+10}.$

$4x^2+4x+10>0$, т.к. $D=16-160<0.$

$$f'(x)=\frac{6(4x^2+4x+10)-(8x+4)(6x+3)}{(4x^2+4x+10)}>0$$

$24x^2+24x+60-48x^2-48x-12>0$

стр. 5.