44-72-55-24
(183.2)

Олимпиада ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 174

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы

по математике

Фесюк Марины Александровны
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

выход 12:31 – 12:34

Дата
«22» марта 2016 года

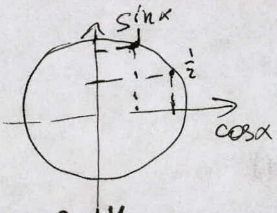
Подпись участника

Черновик.

80 (восемьдесят)

№1.

$\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2} \vee \frac{40}{29}$



$\left(\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\right)^2 \vee \left(\frac{40}{29}\right)^2$

$1+2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} \vee \frac{1600}{841}$

$\sin 1 \vee \frac{759}{841}$

$\frac{3,14}{2}=1,57$

$\frac{\pi}{3}>1$

$\sin 1<\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \frac{759}{841}$

$\frac{3}{4} \vee$

$29 \times 29 = 261 + 58 = 841$

$1600 - 841 = 759$

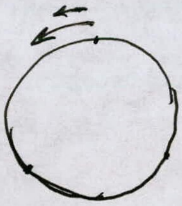
$759 \times 2 = 1518 \,|\, 841$

$\frac{1518}{841} <$

$841 \times 1,8 = 6728 + 841 = 1513,8$

$\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{759}{841}$

№2.



1 круг / 3 мин

1 круг / t мин (t ~~≥ 3~~)

1 обгон / X мин ($X\in\mathbb{Z}$, $X\geq 9$)

1 круг = S

$t=?$

$\left(\frac{S}{3}-\frac{S}{t}\right)X=S \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{t}\right)X=1 \Leftrightarrow (t-3)X=3t \Leftrightarrow t(\cancel{x-3})$

$\Leftrightarrow X=\cancel{\frac{t-3}{3t}}\ \frac{3t}{t-3}\geq 9$

$\frac{1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{t}}=$

$\cancel{(t-3)\,\vdots\, 3 \Rightarrow t \,\vdots\, 3 \Rightarrow t\geq 6}$

$\cancel{(t-3)\,\vdots\, t \Rightarrow 3 \,\vdots\, t \Rightarrow t\leq 3}$

$\cancel{\begin{cases}(n+1)S=\frac{S}{3}X\\ nS=\frac{S}{t}X\end{cases} \Leftrightarrow 1=\frac{X}{3}-\frac{X}{t} \Leftrightarrow X=\frac{1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{t}}=\frac{3t}{t-3}}$

$tX-3t=3X$

$t=\frac{3X}{X-3}\geq 6$

$\cancel{\frac{X}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}}$

если $X \,\vdots\, 3 \Rightarrow t \,\vdots\, 3 \Rightarrow \cancel{t\geq 6}\ X \,\vdots\, 3 \Rightarrow$ $t\geq 6$, $X\geq 9$

$\cancel{t=\frac{3\cdot\frac{3t}{t-3}}{\frac{3t}{t-3}-3}=\frac{9t}{3t-3t+9}=t}$

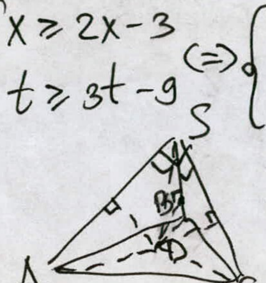
$\cancel{X=\frac{3\cdot 6}{6-3}=6<7}$

$\begin{cases}X\geq 2X-3\\ t\geq 3t-9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}X\leq 3\\ 2t\leq 9\end{cases}$

$\frac{3t}{t-3}\geq 9 \Leftrightarrow 3t\geq 9t-27 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 27\geq 6t \Leftrightarrow 9\geq 2t \Leftrightarrow t\leq 4,5 \Rightarrow$

$\Rightarrow t=4 \Rightarrow X=\frac{3\cdot 4}{4-3}=12\geq 9$



см.

Черновик.

№3.

$$\begin{cases}\sqrt{(x+4)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+2)^2}\geq 2\sqrt[4]{}\\ |x|+2|y|=2\end{cases}$$

$2|y|=2-|x|$ $\quad |y|=\frac{2-|x|}{2}=1-\frac{|x|}{2}$

$\cancel{x^2+y^2+8x+16}$

$\cancel{x^2+4y^2+4xy=4}$

$((x+4)^2+y^2)(x^2+(y+2)^2)=$

$=(x^2+8x+16+y^2)(x^2+y^2+4y+4)=$

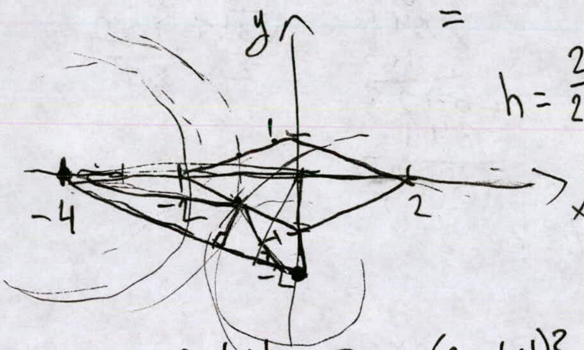
$=x^4+8x^3+16x^2+2x^2y^2+8xy^2+16y^2+y^4+4x^2y+$

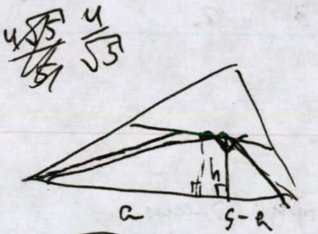
$+32xy+64y+4y^3+4x^2+32x+64+4y^2=$

$=$

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$

$h=\frac{2\cdot 4}{2\sqrt5}=\frac{4}{\sqrt5}$





$\sqrt{a^2+h^2}+\sqrt{(s-a)^2+h^2}=$

1) $|y|=\frac{2-|x|}{2}\Rightarrow y^2=\frac{(2-|x|)^2}{4}=\frac{2+x^2-4|x|}{4}$

$s^2=2^2+4^2=4+16=20$

$(x+4)^2+\frac{2+x^2-4|x|}{4}=$

$|x|=2-2|y|$ $\quad x^2=4(1-|y|)^2=4(1+y^2-2|y|)=4y^2-8|y|+4$

$4y^2-8|y|+4+y^2+4y+4=5y^2-4y+8$

$(h^2+a^2+h^2+(s-a)^2)'=(a^2+(s-a)^2)'=(a^2+(\sqrt{20}-a)^2)'=$

$=2a-2(\sqrt{20}-a)=4a-2\sqrt{20}=0\Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{20}}{2}=\sqrt5$

$\min(f(x,y))=\sqrt{5+\frac{16}{5}}+\sqrt{(\sqrt{20}-\sqrt5)^2+\frac{16}{5}}=\sqrt{\frac{41}{5}}\cdot 2=\sqrt{\frac{82}{5}}=$

$25+16=41$ $\quad 82\cdot 5=410$ $\quad =\boxed{\frac{\sqrt{410}}{5}}$

$[\log_2 x]$ $\quad \log_2[x]=b$ $\quad [x]=2^b$

№4.

$[\log_3(\log_2 x)]^2-12\log_3(\log_2 x)$

$2^a=x$

$2^{[\log_2 x]}$ $\quad [\log_2 5]=2$

$\log_2[x]=2,\ldots$

См.

Чистовик.

№1.

1) $\left(\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\right)^2 = 1+\sin 1$

2) $\sin 1 < \sin\frac{\pi}{3}$ (т.к. $1<\frac{\pi}{3}$, а 1 и $\frac{\pi}{3}$ лежат в I четверти)

$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{759}{841} = \left(\frac{40}{29}\right)^2-1$ (т.к. $\sqrt{3}<1,8<\frac{1518}{841}$, $1,8\cdot 841 = 1513,8$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 1 < \left(\frac{40}{29}\right)^2-1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{40}{29}\right)^2 \Rightarrow \sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2} < \frac{40}{29}$ (т.к. $\frac{40}{29}>0$, $\sin\frac{1}{2}>0$, $\cos\frac{1}{2}>0$)

Ответ: $\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}$.

Ответ верный. Решение правильное.

№2.

Пусть t мин – время прохождения круга медленным водителем, а x мин – время обгона, S – длина одного круга, тогда верно уравнение:

$\left(\frac{S}{3}-\frac{S}{t}\right)x = S$

т.к. за время обгона быстрый водитель проезжает на 1 круг больше, чем медленный

$\left(\frac{S}{3}-\frac{S}{t}\right)x = S \Leftrightarrow x = \frac{1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{t}} = \frac{3t}{t-3} \Leftrightarrow t(x-3)=3x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \frac{3x}{x-3}$

Поскольку по условию $t\geq 8$ и $t\in\mathbb{Z}$, значит, $t\geq 9$, тогда $\frac{3x}{x-3}\geq 9 \Leftrightarrow x\geq 3x-9 \Leftrightarrow x\leq 4,5$

По условию $x>3$ (т.к. x – время медленного, а время быстрого – 3 мин) и $x\in\mathbb{Z}$, значит, $x\geq 4$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow x=4$ (т.к. $x\in\mathbb{Z}$) $\Rightarrow t=\frac{3\cdot 4}{4-3}=12$ ($12\in\mathbb{Z}$, $12>8$).

Значит, медленный проезжает круг за 4 мин.

Ответ: 4 мин.

Ответ верный. Решение правильное.

Чистовик.

№3.

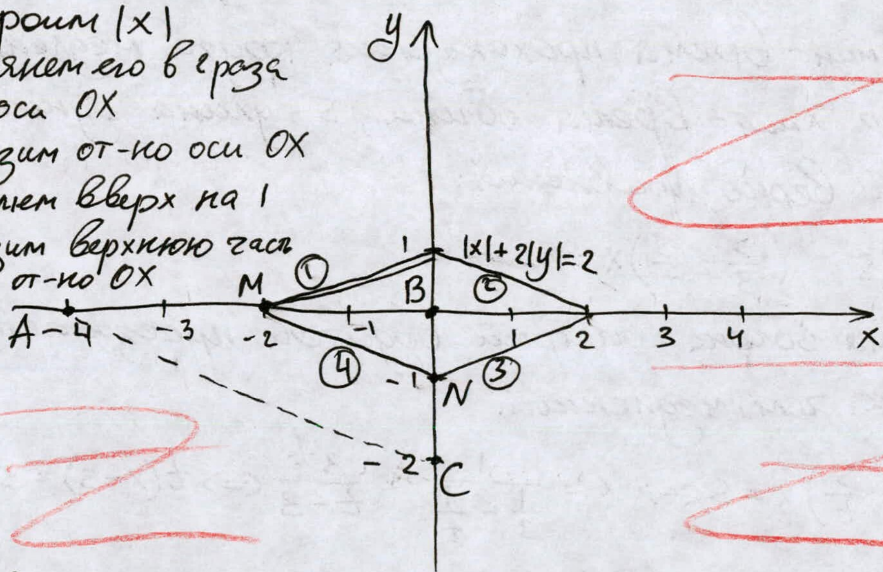
$\sqrt{(x+4)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y+2)^2} = f(x,y)$

1) Заметим, что $\sqrt{(x+4)^2+y^2} = a$ – ур-ие окр-ти с центром в $(-4;0)$ и $R=a$; $\sqrt{x^2+(y+2)^2} = b$ – ур-ие окр-ти с центром в $(0;-2)$ и $R=b$. Тогда получаем, что $f(x,y)=a+b$, то есть равняется сумме радиусов этих окружностей.

2) $|x|+2|y|=2$ – построим график:

$|y| = \frac{2-|x|}{2} = 1-\frac{1}{2}|x|$

- построим $|x|$
- растянем его в 2 раза по оси OX
- отразим от-но оси OX
- поднимем вверх на 1
- отразим верхнюю часть вниз от-но OX

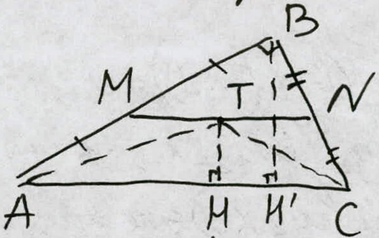


Занумеруем части построенного графика как показано на рисунке. Заметим, что $a+b$ будет ~~ми~~ принимать минимальное значение только в части 4, т.к. именно в ней находятся оба центра окружностей. Заметим также, что 4 часть графика $|y|=1-\frac{1}{2}|x|$ параллельна прямой, содержащей центры окружностей. Тогда рассмотрим $\triangle ABC$ | $A(-4;0)$, $B(0;0)$, $C(0;-2)$ и его среднюю линию MN | $M(-2;0)$, $N(0;-1)$.

~~Условие задачи выполнено (то есть минимум $f(x,y)$ достигается)~~ ~~ровно~~ при тех и только тех a,

Чистовик.

~~удовлетворяющих условию~~:



Выберем $T \in [MN]$, её координаты будут являться x и y в $f(x,y)$, тогда $AT = a$, $CT = b$.

$TH = \frac{BH'}{2}$ (т.к. MN - сред. лин.) $\Rightarrow TH = \frac{AB \cdot BC}{2AC}$ (т.к. $\triangle ABC$ - пр.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow TH = \frac{4 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{4^2+2^2}} = \frac{4}{\sqrt{16+4}} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$AT^2 + TC^2 \underset{\text{по теор. Пиф.}}{=} AH^2 + TH^2 + TH^2 + HC^2 = AH^2 + (AC - AH)^2 + 2TH^2$

Пусть $AH = k$, тогда выражение примет вид:

$AT^2 + TC^2 = k^2 + (\sqrt{16+4} - k)^2 + 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = k^2 + (\sqrt{20} - a)^2 + \frac{8}{5}$

Условие задачи выполнено (то есть достигается минимум $f(x,y)$) ~~тогда~~ при тех и только тех k, при которых достигается минимум ~~функции~~ выражения $k^2 + (\sqrt{20} - k)^2 + \frac{8}{5}$.

$\left(k^2 + (\sqrt{20} - k)^2 + \frac{8}{5}\right)' = 2k + 2(k - \sqrt{20}) = 4k - 4\sqrt{5}$

производная возрастает, значит, минимум функции будет при $4k - 4\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow k = \sqrt{5}$

Тогда $f(x,y)$ принимает минимальное значение при ~~а=~~ $a = \sqrt{k^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}$, $b = \sqrt{(\sqrt{20} - k)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}$, значит,

$f_{min}(x,y) = \sqrt{5 + \frac{4}{5}} + \sqrt{5 + \frac{4}{5}} = \frac{\sqrt{29} \cdot 2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{580}}{5}$

Ответ: $\frac{\sqrt{580}}{5}$.

Ответ верный. Решение правильное.

№4.

$[\log_3(\log_2 x)]^2 - 12\log_3([\log_2 x]) + 20\log_3(\log_2([x])) = 0$

~~1) разберём случай, когда $[\log_3(\log_2 x)] = \log_3[\log_2 x] = \log_3(\log_2[x]) = t$, тогда ур-ие примет вид:~~
~~$t^2 - 12t + 20t = t^2 + 8t$~~

~~1) заметим, что $[\log_3(\log_2 x)]^2 \geq 0$, $12\log_3([\log_2 x]) \geq 0$,~~
~~$20\log_3(\log_2([x])) \geq 0$, т.к. $[\log_2 x] \geq 1$ (т.к. это целое число,~~

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик.

~~1) проведём (MNK) | $DM \perp AS$, $DN \perp BS$, $DK \perp CS$~~

~~2) $\min(V_{ABCS}) = 5 \min(V_{MNKS})$~~

~~3) $V_{MNKS} = \frac{1}{2} a \ldots MK = \sqrt{a^2-(2\sqrt{5})^2+a^2-5^2}$~~

1) $MK = \sqrt{SD^2 - MD^2 + SD^2 - KD^2} = \sqrt{2a^2 - (2\sqrt{5})^2 - 5^2} =$
$= \sqrt{2a^2-20-25} = \sqrt{2a^2-45}$, где $a = SD$

2) $NK = \sqrt{2a^2-13-25} = \sqrt{2a^2-38}$, где $a = SD$ (аналогично п.1)

3) $MN = \sqrt{2a^2-20-13} = \sqrt{2a^2-33}$, где $a = SD$ (аналогично п.1)

Это утверждение не обосновано.

4) ~~Чтобы~~ V_{ABCS} принимает минимальное значение тогда (ABC) ∥ (MNK), тогда $V_{ABCS} = S_{MNK} \cdot \frac{SH^3}{SD}$ (при этом SH и SD - высоты, опущенные из S на соответствующие плоскости (MNK) и (ABC))

$SH = \frac{DK \cdot SK}{SD} = \frac{5\sqrt{a^2-25}}{a} \Rightarrow V_{ABCS} = \min\left(\frac{5\sqrt{a^2-25}}{a^2} \cdot S_{MNK}\right)$

площадь находится из п.1, п.2 и п.3, а минимизируем через производную

Решение не доведено до конца.
Ответа нет.

~~большее 0 (след. из опр. лог, иначе мы не сможем взять логарифм от этого числа); т.к. при $x \in [1;2$~~

№4. Чистовик.

$$[\log_3(\log_2 x)]^2 - 12\log_3([\log_2 x]) + 20\log_3(\log_2[x]) = 0$$

1) ~~ОДЗ~~: $x \geq 2$, иначе $\log_2[x] \leq 0 \Leftrightarrow \log_3(\log_2[x])$ - не сущ.

$x \geq 2$, иначе $[\log_2 x] \leq 0 \Leftrightarrow \log_3([\log_2 x])$ - не сущ.

$x \geq 1$, иначе $\log_2 x \leq 0 \Leftrightarrow \log_3(\log_2 x)$ - не сущ.

2) заметим, что при $x \geq 2$: $12\log_3([\log_2 x]) \geq 0$,

т.к. $[\log_2 x] \geq 1 \Rightarrow \log_3([\log_2 x]) \geq 0$;

$20\log_3(\log_2[x]) \geq 0$, т.к. $\log_2[x] \geq 1 \Rightarrow \log_3(\log_2[x]) \geq 0$

3) при этом $[\log_3(\log_2 x)] \leq \log_3([\log_2 x]) \leq \log_3(\log_2[x])$: ← это неравенство не обосновано

тогда $0 = [\log_3(\log_2 x)]^2 - 12\log_3([\log_2 x]) + 20\log_3(\log_2[x]) \geq$

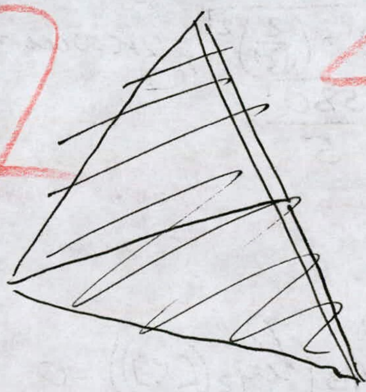
$\geq [\log_3(\log_2 x)]^2 - 12\log_3(\log_2[x]) + 20\log_3(\log_2[x]) =$

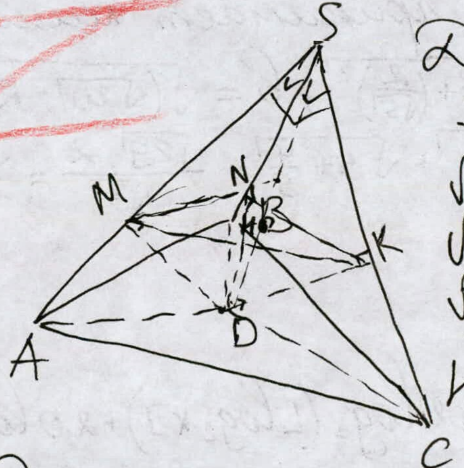
$= \underbrace{[\log_3(\log_2 x)]^2}_{\geq 0 \text{ (квадрат)}} + 8\underbrace{\log_3(\log_2[x])}_{\geq 0 \text{ (из п. 2)}} \Rightarrow [\log_3(\log_2 x)] =$

$= \log_3([\log_2 x]) = \log_3(\log_2[x]) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x \in [2;8) \\ x \in [2;4) \\ x \in [2;3) \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x \in [2;3)}$

Ответ: $[2;3)$. Ответ верный.

N5.





Дано: $D \in (ABC)$; $SABC$ - пирамида; $\rho(D;SA) = 2\sqrt{5}$; $\rho(D;SB) = \sqrt{13}$; $\rho(D;SC) = 5$; $SA \perp SC$; $SA \perp SB$; $SB \perp SC$.

Найти $\min(V_{ABCS})$.

Решение.

1) ~~заметим, что ГМТ, ра удалённых от рёбер пирамиды на данное расстояние, является прямой т.к. для одного ребр~~ Пусть $(MNK) \mid DM \perp AS$, $DN \perp BS$, $DK \perp CS$.