21-58-76-90
(115.1)

Олимпиада ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

г. Уфа

Вариант 3-2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы Горы

по математике 11 класс

Юлмановой Дианы Айваровны
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата
«13» марта 2016 года

Подпись участника

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

21-58-76-90 (115.1)

Чистовик

1	2	3	4	5
+	+	+	∓	−

65 шестьдесят пять

(Вязьмин) (Бричин)

№ 4. ∓

$\cos^3 x + (\sin x + \cos x)\sin x \cdot \cos x + \sin^3 x < \sqrt{-\sin 2x}$

x либо во II, либо в IV четвертях.

(*) $\sin 2x \le 0$

$\cos^3 x + \sin^3 x = (\cos x + \sin x)(\underbrace{\cos^2 x - \cos x \cdot \sin x + \sin^2 x}_{1}) = (\cos x + \sin x) \cdot (1 - \sin x \cdot \cos x)$.

$(\cos x + \sin x)(1 - \sin x \cdot \cos x) + (\sin x + \cos x)\sin x \cdot \cos x < \sqrt{-\sin 2x}$

$(\sin x + \cos x)(1 \cancel{- \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x}) < \sqrt{-\sin 2x}$

$\sin x + \cos x < \sqrt{-\sin 2x}$

$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \sqrt{-\sin 2x}$ (1')

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0 & (1) \\ \sin 2x \le 0 & (2) \end{cases} \quad (1') \\ \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \ge 0 & (3) \\ (\cos x + \sin x)^2 < -\sin 2x & (4) \end{cases} \quad (2') \end{array}\right.$$

(1): $\pi + 2\pi n < x + \frac{\pi}{4} < 2\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$

(2): $\sin x \cdot \cos x \le 0$

II и IV четверти.

(1') $\left[\begin{array}{l} \frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x \le \pi + 2\pi n \\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \le x < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$ (1')

(3) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k \le x \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

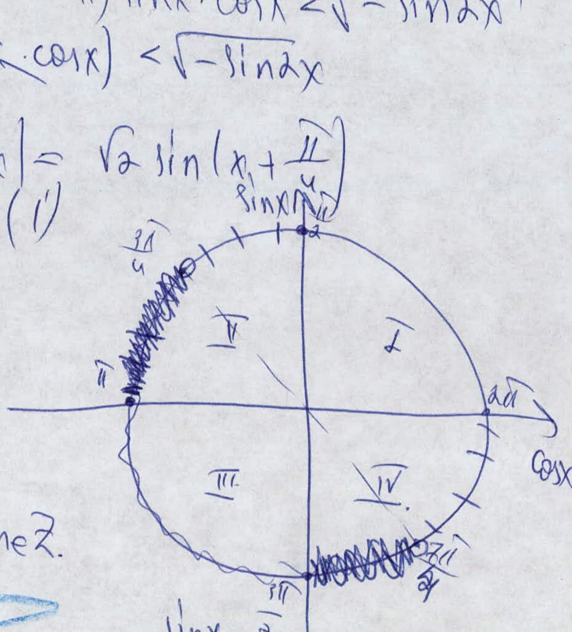
(4): $1 + \sin 2x < -\sin 2x$

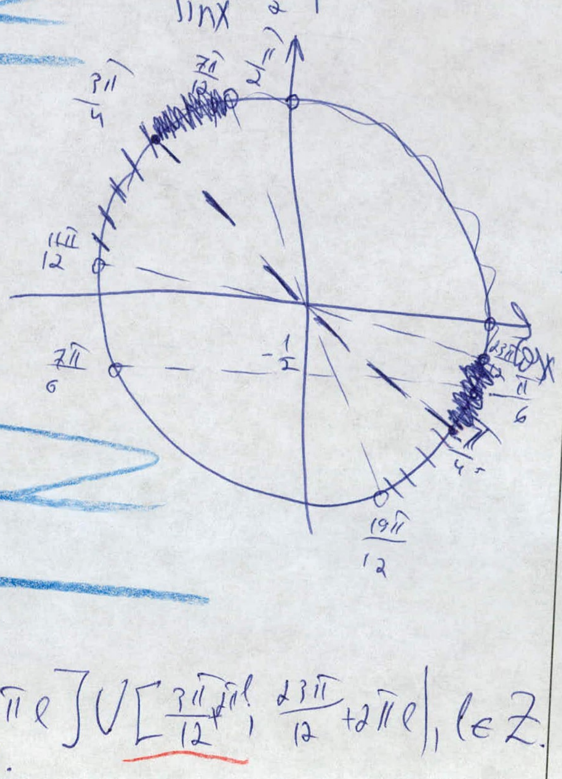
$\sin 2x < -\frac{1}{2}$

$\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < 2x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$

$\frac{7\pi}{12} + \pi k < x < \frac{11\pi}{12} + \pi k$

$\left[\begin{array}{l} \frac{7\pi}{12} + 2\pi k < x \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ \frac{\pi}{4} + 2\pi k \le x < \frac{23\pi}{12} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$





Ответ: $x \in \left(\frac{7\pi}{12} + 2\pi l; \pi + 2\pi l\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2} + 2\pi l; \frac{23\pi}{12} + 2\pi l\right)$, $l \in \mathbb{Z}$.

$$\left(\frac{2y^2+19y+1}{(y+1)^2}\right)' = \frac{(2y^2+19y+1)'\cdot(y+1)^2-(2y^2+19y+1)\cdot((y+1)^2)'}{(y+1)^4}$$

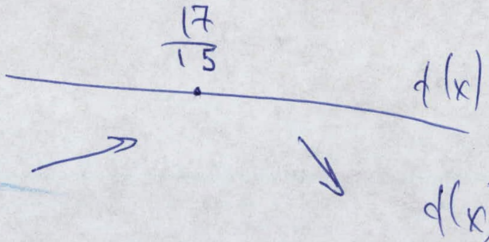
$$= \frac{(4y+19)(y+1)^2-(2y^2+19y+1)\cdot 2(y+1)}{(y+1)^4} = \frac{(4y+19)(y+1)-4y^2-38y-2}{(y+1)^3}$$

$$\frac{\cancel{4y^2}+23y+19-\cancel{4y^2}-38y-2}{(y+1)^3} = \frac{-15y+17}{(y+1)^3}$$

$-15y+17=0$

$y=\frac{17}{15}$

Ответ: $\frac{17}{15}$



№5. $-$

$b \le 9^{\frac{6x+3}{4x^2+4x+10}} < a$

$9^{d(x)} > 0$. Поэтому $b \le 0$

$4x^2+4x+10>0$, т.к. $D=16-4\cdot4\cdot10<0$.

Гр.: $\frac{6x+3}{4x^2+4x+10}=1$

$6x+3=4x^2+4x+10$

$4x^2-2x+7=0>0$

Гр. $D=4-4\cdot4\cdot7<0$

$\frac{6x+3}{4x^2+4x+10}>1$

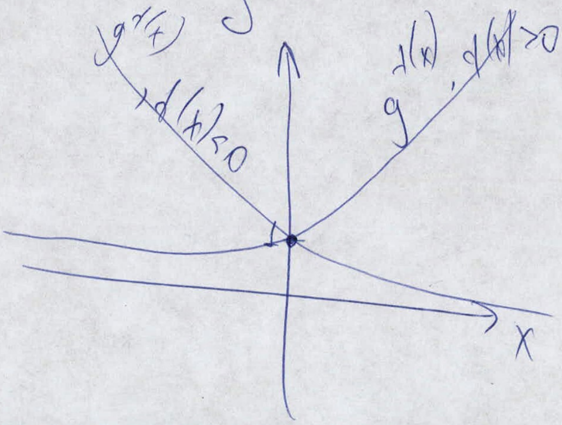
$\frac{6x+3-4x^2-4x-10}{4x^2+4x+10}>0$

$-4x^2+2x-7>0$

$4x^2-2x+7<0$

$D=4-4\cdot4\cdot7<0$

Значит $4x^2-2x+7>0$.



То есть $\frac{6x+3}{4x^2+4x+10}<1$, при $x\in R$.

Тогда $9^1 > 9^{\frac{6x+3}{4x^2+4x+10}}$, так как $1>\frac{6x+3}{4x^2+4x+10}$, $9^{d(x)}$ возраст. при $d(x)>0$.

Тогда $a \ge 1$. Не все реш.

Ответ: $a\ge1$, $b\le0$.

стр. 4.

$3^6 = 729$

$\frac{b_1 \cdot 242}{2} = 242$

$b_1 = 2$

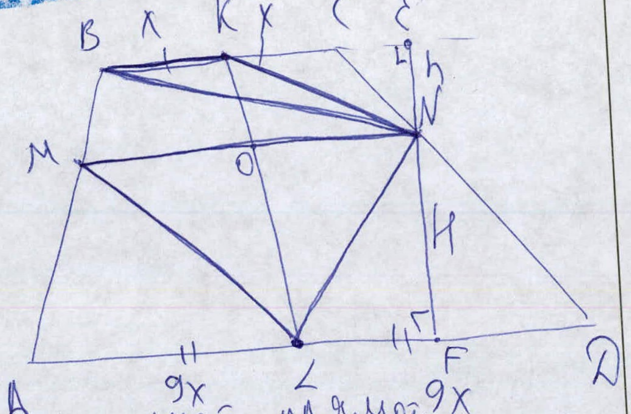
$S_6 = b_1 \frac{q^6 - 1}{q - 1}$

$S_6 = 2\,\frac{3^6 - 1}{3 - 1}$

$S_6 = 728$

Ответ: $S_6 = 728$.

Решение верно



N3. +

$S_{BKN} = \frac{1}{2} x \cdot h$

$S_{MNL} = \frac{1}{2} H \cdot MN$

По обобщенной теореме Фалеса: $\frac{AM}{MB} = \frac{H}{h}$

Пусть $\frac{AM}{MB} = \frac{H}{h} = y$

Нам нужно найти y.

$h, H \in$ одной прямой EF, так как $h \perp BE$, а $BE \parallel AD$ значит $h \parallel AD$ и из т. N можно провести только одну прямую, перпендикулярную AD.

$H = hy$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(2x + 18x) \cdot (h + H)$

$S_{ABCD} = 10x\,h(y+1)$ значит $hx = \frac{S_{ABCD}}{10(y+1)}$

$S_{MBCN} = \frac{1}{2}(2x + MN) \cdot h$

$S_{AMND} = \frac{1}{2}(MN + 18x) \cdot H = \frac{1}{2}(18x + MN)yh$

$S_{ABCD} = S_{MBCN} + S_{AMND}$

$10x\,h(y+1) = \frac{1}{2}h(2x + MN + 18xy + MNy)$

$20xy + 20x = 2x + 18xy + MN(1+y)$

$MN = \frac{2xy + 18x}{1+y}$

$S = S_{BKN} + S_{MNL} = \frac{1}{2}h(x + yMN)$

$S = \frac{1}{2}h\left(x + \frac{x(2y^2 + 18y)}{1+y}\right)$.

$S = \frac{1}{2}hx\left(\frac{2y^2 + 19y + 1}{1+y}\right)$

$S = \frac{S_{ABCD}(2y^2 + 19y + 1)}{20(y+1)^2}$

S_{ABCD} не зависит от y. Чтобы S было максимальным, $\frac{2y^2 + 19y + 1}{(y+1)^2}$ должно быть максимальным

стр. 3.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№1. +
$8x^2+y^3=2016$ $x, y \in N$
$8x^2 \vdots 8$ значит $y^3 \vdots 8$
$2016 \vdots 8$ Пусть $y=2k$, где $k \in N$.
$8x^2+8k^3=2016$
$x^2+k^3=252$
Так как $x, k \in N$, то рассмотрим возможные значения k такие, что $k^3<252$
Кубы до 252: $1^3=1$; $2^3=8$; $3^3=27$; $4^3=64$; $5^3=125$;
$6^3=216$, $7^3=343$ - не уд., т.к. >252
$k=1$: $x^2+1=252$
$x^2=251$ - не квадрат числа $\in N$.
$k=2$: $x^2+8=252$
$x^2=244$ - не квадрат числа $\in N$.
$k=3$: $x^2+27=252$ $x^2=225$ $x=15$ - уд.
$k=4$: $64+x^2=252$ $x^2=188$ - не квадрат числа $\in N$.
$k=5$: $125+x^2=252$ $x^2=127$ - не квадрат числа $\in N$.
$k=6$: $216+x^2=252$ $x^2=36$ $x=6$ - уд.
$y=2k$
Ответ: $(15;6)$; $(6;12)$ Решено верно

№2. +
$S=b_1\frac{q^n-1}{q-1}$ - сумма первых n членов геометрической последовательности.
$S_5=b_1\frac{q^5-1}{q-1}=242$.
$S_{10}=b_1\frac{q^{10}-1}{q-1}$
$S_{5-10}=S_{10}-S_5=b_1\frac{q^{10}-1}{q-1}-b_1\frac{q^5-1}{q-1}$
$S_{5-10}=58806$
$S_{5-10}=b_1\frac{q^5-1}{q-1}(q^5+1-1)$
$b_1\frac{q^5-1}{q-1}(q^5)=58806$
$242\cdot q^5=58806$
$q^5=243$
$q=3$
$b_1\cdot\frac{3^5-1}{3-1}=242$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$E(d)$.

$9^{\frac{x+\frac{1}{2}}{4x^2+4x+10}}$

$d(x)>0$ ↑

$d(x)<0$ ↓

$4x^2+4x+10$

$D=16-4\cdot4\cdot10$

$D(d): x\in R$

$E(d)$ – ?

$\left(\frac{6x+3}{4x^2+4x+10}\right)' = \frac{6\cdot(4x^2+4x+10)-(6x+3)(8x+4)}{(4x^2+4x+10)^2} =$

$24x^2+24x+60$

$9^{-1}=\frac{1}{9}$

$9^{-2}=\frac{1}{81}$

$9^{\frac{1}{2}}=3$

$9^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}}$

$d(x)>0$

$\cancel{d(x)}=y=\frac{6x+3}{4x^2+4x+10}$

$9^0=1$.

$9^1=9$

$x=-\frac{1}{2}$

$\frac{6x+3}{}=4x^2+4x+10$

$4x^2-2x+7=0$

$D<0$

$6x+3=$

$6x+3=8x^2+8x+20$

$8x^2+2x+17=0$

$D=4-4\cdot8\cdot17<0$

$\frac{6x+3}{}<0$

$d(x)<0$ $x<-\frac{1}{2}$

$6x+3=-4x^2-4x-10$

$4x^2+10x+13$

$D=100-4\cdot4\cdot13$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! П...

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Шифр

$q(x) < 0$ $\quad q(x)$ убыв. черновик.

$x < -\frac{1}{2}$

$q(-1)$ $\quad 6x+3 = -4x^2 - 4x - 10$

$4x^2 + 10x + 13 = 0 \quad > 0.$

$D = 100 - 4 \cdot 4 \cdot 10 < 0$

т.е. $q(x) > q(-1)$

~~ххх~~ стр№5.

вкладыша запрещено!

черновик

№2. $S = b_1 \frac{q^n-1}{q-1}$

$S_5 = b_1 \frac{q^5-1}{q-1} = 242$

$S_{10} = b_1 \frac{q^{10}-1}{q-1}$

$S_{5-10} = S_{10} - S_5 = b_1 \frac{q^{10}-1}{q-1} - b_1 \frac{q^5-1}{q-1} = 58806$

$S_6 - ?$

$S_{5-10} = b_1 \frac{(q^5-1)(q^5+1)}{q-1} - b_1 \frac{q^5-1}{q-1} = b_1 \frac{q^5-1}{q-1}(q^5+1-1) = 58806$

$242 \cdot q^5 = 58806$. $243 = 9 \cdot 27 = 3^2 \cdot 3^3 = 3^5$

$q^5 = 243$ $243 \cdot 3 = 729$

$q = 3$.

$b_1 \frac{3^5-1}{3-1} = 242$

$b_1 \cdot \frac{242}{2} = 242$

$b_1 = 2$ $S_6 = b_1 \frac{q^6-1}{q-1}$

$S_6 = 2 \frac{3^6-1}{2} = 728$.

Отв: $S_6 = 728$.

№1. $8x^2 + y^3 = 2016$. $x, y \in N$.

$2016 = 2^2 \cdot 504 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 7$

$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$.

$8x^2 \vdots 8$, $2016 \vdots 8$ $\Rightarrow y^3 \vdots 8 \Rightarrow y \vdots 2$

$y = 2k$

$x =$

$8x^2 + 8k^3 = 2016$

$x^2 + k^3 = 252$. кубы до 252: 1, 8, 27, 64, 125, 216

$k_0 = 3$, $x_0 = 15$

Т.к. $x, k \in N$, то рассмотрим возможные значения k такие, что $k^3 < 252$.

$k = 1$. $x^2 + 1 = 252$

$k = 2$ $x^2 + 8 = 252$ $x^2 = 244$ $244 = 4 \cdot 61$ – не кв.

$k = 3$: $x^2 + 27 = 252$ $x^2 = 225$ $x = 15$ – ч.

$k = 4$: $64 + x^2 = 252$ $x^2 = 188$ – не кв.

$k = 5$ $125 + x^2 = 252$ $x^2 = 127$ – не кв.

$k = 6$ $216 + x^2 = 252$ $x^2 = 36$ $x = 6$ – ч.

Отв: (15; 6); (6; 12)

$5^3 = 125$ $6^3 = 36 \cdot 6 = 216$ $7^3 = 49 \cdot 7 = 343$

№5. $b \le 9^{\frac{6x+3}{4x^2+4x+10}}$

$9^{d(x)}$ $\quad \frac{3(2x+1)}{}$

$$\frac{(2y^2+19y+1)'\cdot(y+1)^2 - (2y^2+19y+1)((y+1)^2)'}{(y+1)^4} =$$

$$= \frac{(4y+19)(y+1)^2 - (2y^2+19y+1)\cdot 2(y+1)}{(y+1)^4} = \quad (y+1)((y+1)\cdot(4y+19) -$$

$$= \frac{(y+1)(4y+19) - 4y^2 - 38y - 2}{(y+1)^3} = \frac{\cancel{4y^2} + 19y + 4y + 19 - \cancel{4y^2} - 38y - 2}{(y+1)^3}$$

$19 - 38 + 4 = -19 + 4 = -15$

$-15y + 17 = 0$

$y = \frac{17}{15}$

$9^{\frac{1}{2}} > 9^{\frac{1}{3}}$

$9^{-\frac{1}{2}} < 9^{-\frac{1}{3}}$

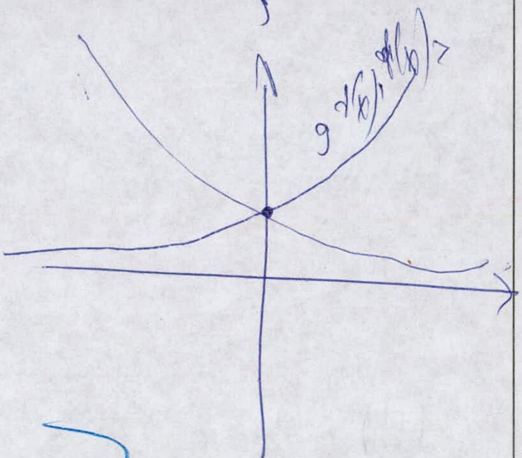
$\frac{17}{15}$

$y = 1$

$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

№5.

~~b~~ $\quad 0 \le 9^{\frac{6x+3}{4x^2+4x+10}} <$



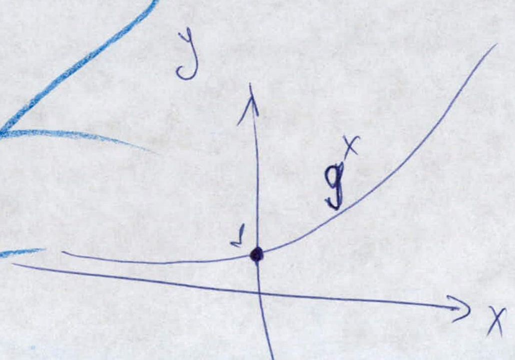
$d''(x)$

$d(x)\uparrow$ ~~при~~ $\frac{6x+3}{4x^2+4x+10} > 1$

$d(x)\downarrow$ ~~при~~ $\frac{6x+3}{4x^2+4x+10} < 1$

(*) $4x^2 + 4x + 10 \ne 0$

$9^1,\ 9^2$



$x\cdot\frac{1}{y} = x'\cdot\frac{1}{y} + x\cdot\left(\frac{1}{y}\right)'$

$(2y^2+19y+1)\cdot(y+1)^{-2} =$

$= \frac{4y+19}{(y+1)^2} + \frac{(2y^2+19y+1)\cdot(-2(y+1)}{}$

$y = 2. \quad \frac{-30+17}{8}$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

(*) $\sin 2x < 0$

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$4\cos^3 x - 3\cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x + \frac{\sin 2x}{2}\cdot(\sin x + \cos x) < \sqrt{-\sin 2x}$

$4(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x\cdot\sin x + \sin^2 x) - 3(\cos x - \sin x) + \frac{\sin 2x}{2}(\sin x + \cos x) =$

$= (\cos x - \sin x)(4 + 4\cos x\cdot\sin x) - 3(\cos x - \sin x) + \frac{\sin 2x}{2}(\sin x + \cos x) =$

$= (\cos x - \sin x)(4\cos x\cdot\sin x + 1) + \frac{\sin 2x}{2}(\sin x + \cos x) =$

$= 4\cos^2 x\cdot\sin x + \cos x - 4\sin^2 x\cdot\cos x - \sin x + \sin^2 x\cdot\cos x + \sin x\cdot$

$\cdot\cos^2 x = 5\cos^2 x\cdot\sin x - 3\sin^2 x\cdot\cos x + \cos x - \sin x = \cos x\cdot\sin x$

$= \cos x\cdot\sin x(5\cos x - 3\sin x) + \cos x - \sin x = \cos x\cdot\sin x($

$\cos^3 x + \sin^3 x = (\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \cos x\cdot\sin x + \sin^2 x) = (\cos x + \sin x)\cdot$

$\cdot(1 - \cos x\cdot\sin x)$

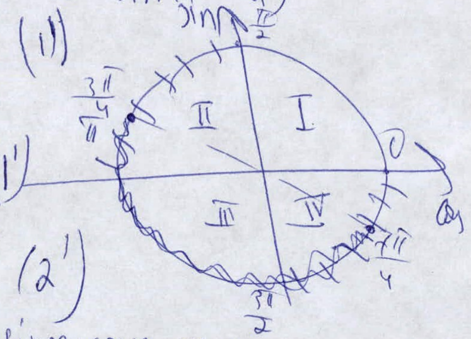
$(\cos x + \sin x)(1 - \cancel{\cos x\cdot\sin x} + \cancel{\sin x\cdot\cos x}) = \cos x + \sin x$

$\cos x + \sin x < \sqrt{-\sin 2x}$

$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x + \sin x < 0\\ \sin 2x \le 0\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x + \sin x \ge 0\\ (\cos x + \sin x)^2 < -\sin 2x\end{cases}\end{array}\right.$$

(1')



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0\\ \sin 2x \le 0\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \ge 0\\ 1 + \sin 2x < -\sin 2x\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0 & (1)\\ \sin 2x \le 0 & (2)\end{cases}\\ \begin{cases}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \ge 0 & (3)\\ 2\sin 2x < -1 & (4)\end{cases}\end{array}\right.$$

(1') (2')

(1) $\pi + 2\pi n < x + \frac{\pi}{4} < 2\pi + 2\pi n$

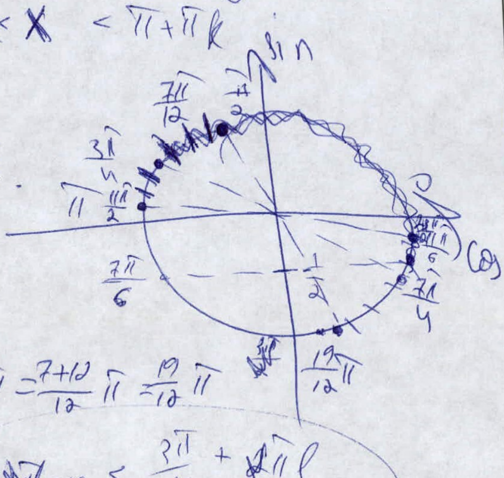
$2\sin x\cdot\cos x \le 0$

$\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \pi + \pi k$

(x') $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < 2\pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi n$

$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$

(1') $\frac{3\pi}{4} + \pi m < x < \frac{7\pi}{4} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.



(2')

(3') $2\pi n < x + \frac{\pi}{4} < \pi + 2\pi n$

$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$

$\frac{7\pi}{12} + \pi = \frac{7+12}{12}\pi = \frac{19}{12}\pi$

(4) $\sin 2x < -\frac{1}{2}$

$\frac{7\pi}{6} + 2\pi l < 2x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi l$

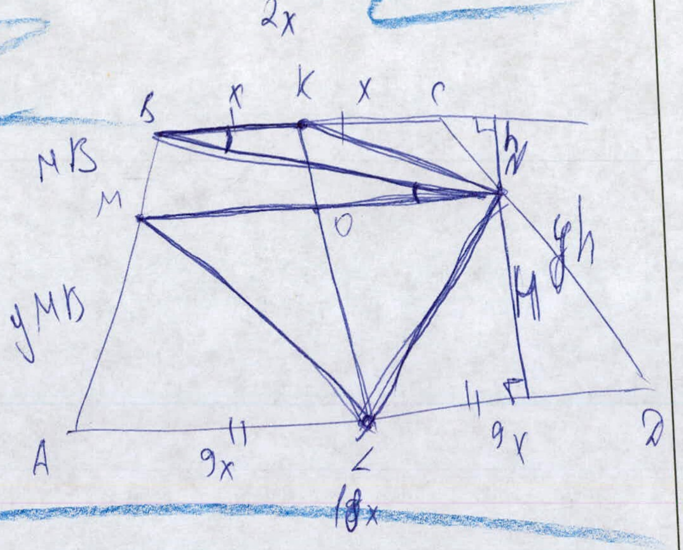
$\frac{7\pi}{12} + \pi l < x < \frac{11\pi}{12} + \pi l$

$\frac{7\pi}{12} + \pi l < x < \frac{3\pi}{4} + \pi l$

Отв: $\left[\begin{array}{l}\frac{3\pi}{4} + \pi m < x < \frac{7\pi}{4} + \pi m\\ \frac{7\pi}{12} + \pi l < x < \frac{3\pi}{4} + \pi l\end{array}\right.$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$BC = x$
$AD = 9x$
$MN \parallel BC$
$S_{BKN} + S_{MNL}$ – max. при каком $AM : MB$



$S_{BKN} = \frac{1}{2} x \cdot h$

$S_{MNL} = \frac{1}{2} H \cdot MN$

$\frac{AM}{MB} = \frac{H}{h} - ? = y$

$H + h = H'$

$KL = \frac{2x + 18x}{2} = 10x$

$OL = y \, OK$

$yOK + OK = 10x$

$OK(y+1) = 10x$

$OK = \frac{10x}{y+1}$

$S = S_{BKN} + S_{MNL} = \frac{1}{2} x \cdot h + \frac{1}{2} MN \cdot yh = \frac{1}{2} h (x + y \cdot MN)$

~~$S_{AKCD} = \frac{1}{2}(2x + MN) \cdot H$~~ $\quad S_{ABCD} = 10x \cdot (h + H) = 10x \, h(y+1)$

$S_{MBCN} = \frac{1}{2}(2x + MN) h$

$S_{AMND} = \frac{1}{2}(18x + MN) \cdot yh$

$10x(h + yh) = \frac{1}{2} h (2x + MN + 18xy + MNy)$

$20x\cancel{h}(1+y) = \cancel{h}(2x + MN(1+y) + 18xy) \qquad hx = \frac{S_{ABCD}}{10(y+1)}$

$20x + 20xy = 2x + MN(1+y) + 18xy$

$\frac{2xy + 18x}{1+y} = MN$

$S = \frac{1}{2} h \left(x + \frac{yx(2y+18)}{1+y}\right) = \frac{1}{2} hx \left(1 + \frac{2y^2 + 18y}{1+y}\right) = \frac{1}{2} hx \left(\frac{2y^2 + 19y + 1}{1+y}\right)$

~~$S' = \left(\frac{1}{2} hx \left(\frac{2y^2 + 19y + 1}{1+y}\right)\right)' = \frac{(2y^2 + 19y + 1)}{2(1+y)} = 0$~~

~~$2y^2 + 19y + 1 = 0$~~

~~$D = 19^2 - 4 \cdot 2 = 353$~~

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 19 \\ 19 \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} 171 \\ 19 \end{array} \\ \hline 361 \\ - \quad 8 \\ \hline 353 \end{array}$$

$S = \frac{(2y^2 + 19y + 1) \, S_{ABCD}}{2(1+y) \cdot 10(y+1)} = \frac{2y^2 + 19y + 1}{20(y+1)^2} S_{ABCD}$.

S_{ABCD} не зав. от y $\quad$ S max при max $\frac{2y^2 + 19y + 1}{(y+1)^2}$

$\left(\frac{2y^2 + 19y + 1}{(y+1)^2}\right)' = \frac{(2y^2 + 19y + 1)' \cdot (y+1)^2 - (2y^2 + 19y + 1) \cdot ((y+1)^2)'}{(y+1)^4}$