Олимпиада ПВГ
2016

32-39-53-04
(114.1)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 3-1

г. Уфа

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы Горы"

по математике

Гавриловой Галины Юрьевны
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

$17^{40} - 17^{44}$

Дата

«13» марта 2016 года

Подпись участника

32-39-53-04 (14.1)

Чистовик

1	2	3	4	5
+	+	−	±	+

75 семьдесят пять

(Вельтон)

Задача №2

$$\begin{cases} b_1+\ldots+b_5=93 \\ b_6+\ldots+b_{10}=2976 \end{cases}$$

$$S_n=\frac{b_1\cdot(1-q^n)}{1-q}$$

$$\begin{cases} \frac{b_1\cdot(1-q^5)}{1-q}=93 \quad (1) \\ \frac{b_6\cdot(1-q^5)}{1-q}=2976 \quad (2) \end{cases}$$

Разделим (2) на (1): $\frac{b_6}{b_1}=32$

$q^5=32$

$q=2$

Из (1) следует, что: $b_1=\frac{93\cdot(1-q)}{1-q^5}=\frac{93\cdot(-1)}{-31}=3$

$$S_7=\frac{b_1\cdot(1-q^7)}{1-q}=\frac{3\cdot(-127)}{-1}=3\cdot127=381$$

Ответ: 381.

Задача №4

$$\sqrt{2\cdot\sin x\cdot\cos x}>\cos^3x-\sin^3x+\sin x\cdot\cos x\cdot(\sin x-\cos x)$$

(*) $2\cdot\sin x\cdot\cos x\geq0$

$$\sqrt{2\cdot\sin x\cdot\cos x}>(\cos x-\sin x)(1+\cos x\cdot\sin x)-\sin x\cdot\cos x\cdot(\cos x-\sin x)$$

$$\sqrt{2\cdot\sin x\cdot\cos x}>(\cos x-\sin x)(1+\cos x\cdot\sin x-\sin x\cdot\cos x)$$

$$\sqrt{2\cdot\sin x\cdot\cos x}>\cos x-\sin x$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x-\sin x<0 \\ 2\cdot\sin x\cdot\cos x\geq0 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} 2\cdot\sin x\cdot\cos x>\cos^2x-2\sin x\cdot\cos x+\sin^2x \\ \cos x-\sin>0 \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

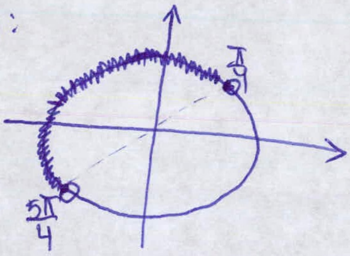
Решим систему (1):

$\begin{cases} \sin x - \cos x > 0 \\ \sin x \cdot \cos x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin(x-\frac{\pi}{4}) > 0 \quad (3) \\ \sin x \cdot \cos x \geq 0 \quad (4) \end{cases}$

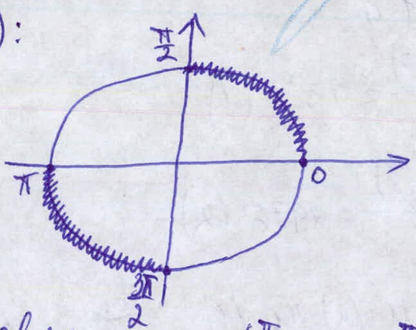
(3): $\begin{cases} x-\frac{\pi}{4} > 2\pi n \\ x-\frac{\pi}{4} < \pi + 2\pi n \end{cases}$ $\begin{cases} x > \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \; n \in Z \end{cases}$

(4): $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x \leq 0 \\ \cos x \leq 0 \end{cases} \end{array} \right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 2\pi n \\ x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq \pi + 2\pi n \\ x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \; n \in Z \end{cases} \end{array} \right.$ $\Rightarrow \begin{cases} x \geq \pi n \\ x \leq \frac{\pi}{2} + \pi n, \; n \in Z \end{cases}$

(3):



(4):



Значит, решением системы (1) является: $x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right] \cup$

$\cup \left[\pi + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in Z.$

Решим систему (2):

верно решено

$\begin{cases} 4 \cdot \sin x \cdot \cos x > 1 \\ \cos x - \sin x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x \cdot \cos x > \frac{1}{4} \quad (5) \\ \sin x - \cos x < 0 \quad (6) \end{cases}$

(6): Аналогично решению (3):

$x \in \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in Z$

(5): $\sin x \cdot \cos x > \frac{1}{4}$

Т.к. по (4) $\sin x \cdot \cos x \geq 0$, то можно возвести в квадрат:

$\sin^2 x \cdot \cos^2 x > \frac{1}{16}$

$\sin^2 x (1 - \sin^2 x) > \frac{1}{16}$

$\begin{cases} \sin^2 x = t \\ t > 0 \end{cases}$: $t(1-t) > \frac{1}{16}$

$t^2 - t + \frac{1}{16} < 0$

$D = 1 - \frac{1}{16} \cdot 4 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$t_{1,2} = \frac{1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}$

Чистовик:

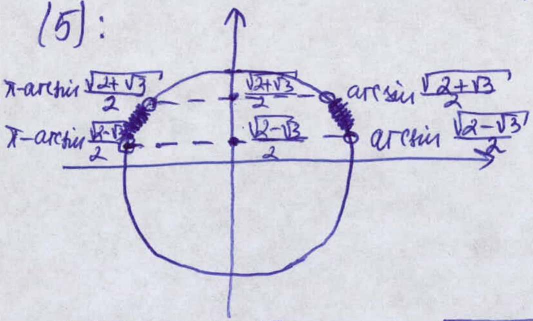
$t \in \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}; \frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)$

$\begin{cases} \sin^2 x > \frac{2-\sqrt{3}}{4} \\ \sin^2 x < \frac{2+\sqrt{3}}{4} \end{cases}$ $\frac{\pi}{12}$ $\begin{cases} |\sin x| > \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ |\sin x| < \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$

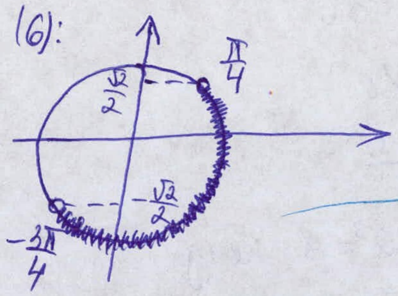
$x \in \left(\arcsin\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + 2\pi n; \arcsin\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + 2\pi n\right) \cup$

$\cup \left(\pi - \arcsin\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + 2\pi n; \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + 2\pi n\right), n \in Z.$

(5):



(6):



$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Значит, решением системы (1) является:

$x \in \left(\arcsin\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in Z.$

неверно (не все реш.)

Ответ: $x \in \left(\arcsin\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right] \cup$

$\cup \left[\pi + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in Z.$

Потеряны решения

Задача №5 $\quad +$

$b < 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} \leq a$

$f(x) = \frac{2x-1}{4x^2-4x+5}$

$f'(x) = \frac{2\cdot(4x^2-4x+5) - (2x-1)(8x-4)}{(4x^2-4x+5)^2} = \frac{2\cdot(4x^2-4x+5-(2x-1)(4x-2))}{(4x^2-4x+5)^2} =$

$= \frac{2\cdot(4x^2-4x+5-8x^2+8x-2)}{(4x^2-4x+5)^2} = \frac{-2\cdot(4x^2-4x-3)}{(4x^2-4x+5)^2} = \frac{-2(x+\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})}{(4x^2-4x+5)^2}$

$D<0.$

$f(-\frac{1}{2}) = \frac{-2\cdot\frac{1}{2}-1}{4\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{2}+5} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$

$f(\frac{3}{2}) = \frac{2\cdot\frac{3}{2}-1}{4\cdot\frac{9}{4}-4\cdot\frac{3}{2}+5} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow 16^{-\frac{1}{4}} \leq 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} \leq 16^{\frac{1}{4}}$

$\frac{1}{2} \leq 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} \leq 2$

Значит, $b < \frac{1}{2}$ и $a \geq 2$.

Ответ: $b < \frac{1}{2}$ и $a \geq 2$.

Черновик.

Задача №1.

$x^3+2y^2=2016$

$\begin{cases} x=2a \\ y=2b \end{cases}$: $8a^3+8b^2=2016$

$a^3+b^2=252$

I $\begin{cases} a=2c \\ b=2d \end{cases}$: $8c^3+4d^2=252$

$2c^3+d^2=63$

$d=2k-1$: $2c^3+4k^2-4k+1=63$

$2c^3+4k^2-4k=62$

$c^3+2k^2-2k=31$

$c=2m-1$:

$8m^3-$

Т.к. $2016 \vdots 2$ и $(2y^2 \vdots 2) \Rightarrow x^3 \vdots 2 \Rightarrow x \vdots 2$ и $y \vdots 2$.

Т.к. $2016 \vdots 9$, то $x^3 \vdots 3 \Rightarrow x \vdots 3$ и $y \vdots 3$.

$\Rightarrow x \vdots 6$ и $y \vdots 6$. $(x=6a,\ y=6b)$

$6^3 \cdot a^3 + 6^2 \cdot 2 \cdot b^2 = 2016$

$6a^3+2b^2=\frac{2016}{36}$

$$\begin{array}{r|l} 2016 & 36 \\ \hline -180 & 56 \\ 216 & \\ -216 & \\ 0 & \end{array}$$

$6a^3+2b^2=56$

$3a^3+b^2=28$ $\qquad a^3=\frac{28-b^2}{3}$ $\qquad$ ~~1, 4, 9, 16, 25~~

$b=1$: $a^3=\frac{27}{3}=9$ – не уд.

$b=2$: $a^3=\frac{28-4}{3}=8 \Rightarrow a=2 \Rightarrow x=12,\ y=12$.

$b=3$: $a^3=\frac{28-9}{3}=\frac{17}{3}$ – не уд.

$b=4$: $a^3=\frac{28-16}{3}=\frac{12}{3}=4$ – не уд.

$b=5$: $a^3=\frac{28-25}{3}=1$ – уд.

$a=1 \Rightarrow x=6,\ y=30$.

$b=6$: $a^3<0$ – не уд.

Задача №1 +

$x^3+2y^2=2016$, $x, y \in N$

Т.к. $2016 \vdots 2$ и $(2y^2 \vdots 2)$, то $(x^3) \vdots 2$. Значит, $x \vdots 2$ и $y \vdots 2$.

Т.к. $2016 \vdots 9$, то $x \vdots 3$ и $y \vdots 3$.

Значит, $x \vdots 6$ и $y \vdots 6$.

Пусть $x=6a$ и $y=6b$, где $a, b \in N$.

$6^3 \cdot a^3 + 6^2 \cdot b^2 = 2016$

$6a^3+2b^2=56$

$3a^3+b^2=28$

$a^3=\frac{28-b^2}{3}$

$b=1$: $a^3=9$ - не уд.

$b=2$: $a^3=8$

$a=2 \Rightarrow x=12$ и $y=12$

$b=3$: $a^3=\frac{17}{3}$ - не уд.

$b=4$: $a^3=4$ - не уд.

$b=5$: $a^3=1$

$a=1 \Rightarrow x=6$, $y=20$. Неверно

Если $b \geq 6$, то $a^3<0$ - не уд.

Ответ: $(6;20)$, $(12;12)$.

См черновик

32-39-53-04 (114.1)

Черновик

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

№2 $\begin{cases} b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=93 \\ b_6+b_7+b_8+b_9+b_{10}=2976 \end{cases}$ $(b_1+\ldots+b_7)-?$

$S_n=\frac{b_1\cdot(1-q^n)}{1-q}$

$\left.\begin{array}{l} S_{1-5}=\frac{b_1\cdot(1-q^5)}{1-q} \\ S_{6-10}=\frac{b_6\cdot(1-q^5)}{1-q} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b_1\cdot(1-q^5)}{1-q}=93 & (1) \\ \frac{b_6\cdot(1-q^5)}{1-q}=2976 & (2) \end{cases}$

$\frac{(2)}{(1)}: \quad \frac{b_6}{b_1}=\frac{2976}{93}$

$2976 : 93 = 32$ (-279, 186, -186, 0)

$q^5=32 \Rightarrow q=2$

$(1) \Rightarrow b_1=\frac{93\cdot(1-q)}{1-q^5}=\frac{93\cdot(-1)}{-31}=\frac{93}{31}=3$

$S_{1-7}=\frac{b_1\cdot(1-q^7)}{1-q}=\frac{3\cdot(1-128)}{1-2}=3\cdot127=381$

Ответ: 381.

№4 $\sqrt{2\cdot\sin x\cdot\cos x}>\cos^3x-\sin^3x+\sin x\cdot\cos x(\sin x-\cos x)$

(*) $2\cdot\sin x\cdot\cos x\geq0$

$\sqrt{2\cdot\sin x\cdot\cos x}>(\cos x-\sin x)(\cos^2x+\cos x\cdot\sin x+\sin^2x)-\sin x\cdot\cos x(\cos x-\sin x)$

$\sqrt{2\cdot\sin x\cdot\cos x}>(\cos x-\sin x)(1+\cancel{\cos x\cdot\sin x}-\cancel{\sin x\cdot\cos x})$

$\sqrt{2\cdot\sin x\cdot\cos x}>\cos x-\sin x$

$f(x)<\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)\geq0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)\geq0 \\ f^2(x)<g(x) \end{cases} \end{array}\right.$

$\begin{cases} 2\sin x\cdot\cos x\geq0 \\ 2\cdot\sin x\cdot\cos x>\cos^2x-2\sin x\cdot\cos x+\sin^2x \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x\cdot\cos x\geq0 \\ 4\cdot\sin x\cdot\cos x>1 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x\cdot\cos x\geq0 \\ \sin x\cdot\cos x>\frac{1}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow \sin x\cdot\cos x>\frac{1}{4}$

$\sin x\cdot\sqrt{1-\sin^2x}>\frac{1}{4}$

$\sin^2x\cdot(1-\sin^2x)>\frac{1}{16}$

$\begin{cases} \sin^2x=t: \\ t\geq0 \end{cases}$ $t^2-t+\frac{1}{16}<0$

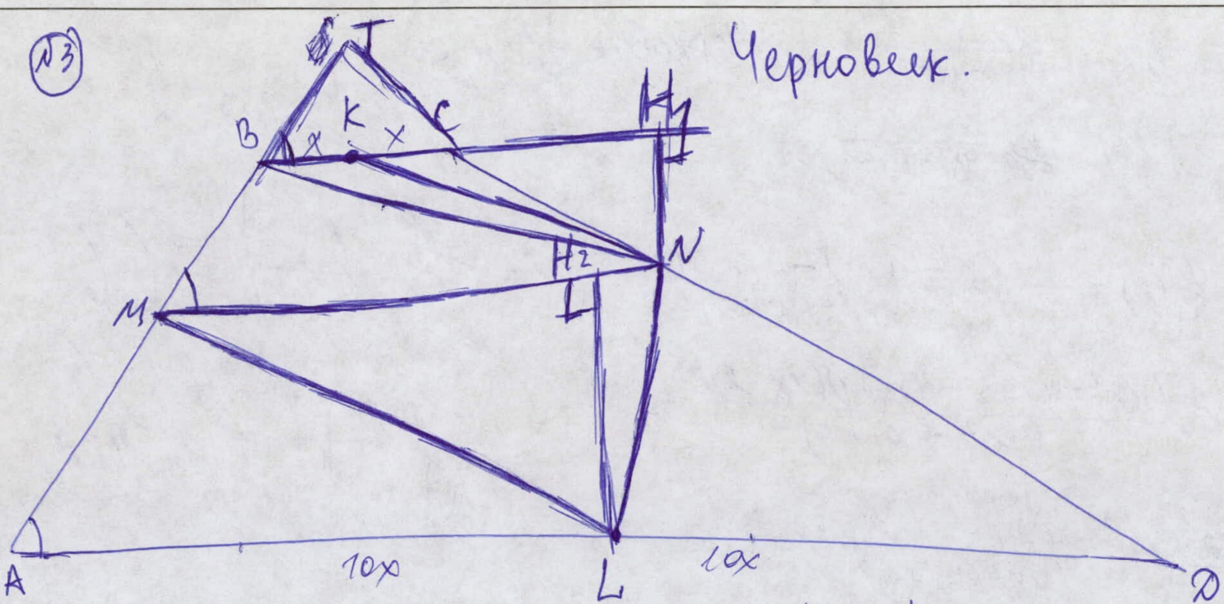
$D=1-\frac{1}{16}\cdot4=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{1\pm\frac{\sqrt3}{2}}{2}$

$t_1=\frac{2+\sqrt3}{4}$ $t_2=\frac{2-\sqrt3}{4}$ $t_1, t_2\in[-1;1]$

$t\in\left(\frac{2-\sqrt3}{4};\frac{2+\sqrt3}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} \sin^2x>\frac{2-\sqrt3}{4} \\ \sin^2x<\frac{2+\sqrt3}{4} \end{cases}$

№3

Черновик.



$$\frac{BT}{MT} = \frac{BC}{MN} \Rightarrow \frac{BT}{\cancel{BT+MB}} = \frac{2x}{MN} \Rightarrow x = \frac{BT \cdot MN}{\cancel{MT(BT+CD)} \cdot 2} \quad (1)$$

$$\frac{MT}{AT} = \frac{MN}{AL} \Rightarrow \frac{MT}{AT} = \frac{MN}{20x} \Rightarrow x = \frac{AT \cdot MN}{MT \cdot 20} \quad (2)$$

$$(1) = (2): \quad \frac{BT \cdot \cancel{MN}}{\cancel{MT} \cdot 2} = \frac{AT \cdot \cancel{MN}}{\cancel{MT} \cdot 20} \Rightarrow \frac{BT}{AT} = \frac{2}{20}$$

$$\frac{BT}{AT} = \frac{1}{10} \Rightarrow AT = 10BT$$

$$\cancel{CD = \frac{10BT \cdot MN}{MT \cdot 20}} \Rightarrow \frac{TC}{CD} = \frac{1}{10}.$$

$$S = \frac{1}{2}(NH_1 \cdot BC + LH_2 \cdot MN) = \frac{1}{2} \cdot (k \cdot NH_1 \cdot MN + NH_1 \cdot BC) =$$

$$2k\,MN < 20x$$

$$= \frac{1}{2} \cdot NH_1(BC + k \cdot MN)$$

№5 $b < 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} \leq a$ Черновик

$16^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}$

$f(x) = \frac{2x-1}{4x^2-4x+5}$

$f'(x) = \frac{2\cdot(4x^2-4x+5)-(2x-1)(8x-4)}{(4x^2-4x+5)^2} =$

$= \frac{2\cdot(4x^2-4x+5-(2x-1)(4x-2))}{(4x^2-4x+5)^2} =$

$= \frac{2\cdot(4x^2-4x+5-8x^2+8x-2)}{(4x^2-4x+5)^2} =$

$= \frac{2\cdot(-4x^2+4x+3)}{(4x^2-4x+5)^2} = \frac{-2\cdot(4x^2-4x-3)}{(4x^2-4x+5)^2} =$ $D_2 < 0$

$D_1 = 16+3\cdot16 = 4\cdot16 = 8^2$

$x_{1,2} = \frac{4\pm8}{8} = \frac{1\pm2}{2}$

$x_1 = -\frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{3}{2}$

$= \frac{-2\cdot(x+\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})}{(4x^2-4x+5)^2}$

$f(-\frac{1}{2}) = \frac{-2\cdot\frac{1}{2}-1}{4\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{2}+5} = \frac{-2}{1+2+5} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$

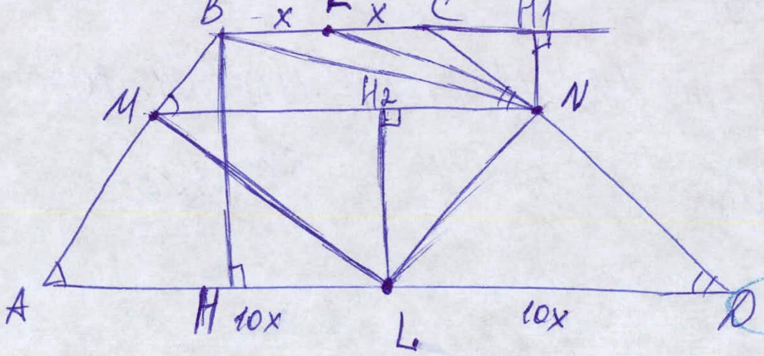
$\Rightarrow 16^{-\frac{1}{4}} \leq 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} \leq 16^{\frac{1}{4}}$

$f(\frac{3}{2}) = \frac{2\cdot\frac{3}{2}-1}{4\cdot\frac{9}{4}-4\cdot\frac{3}{2}+5} = \frac{2}{9-6+5} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} \leq 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} \leq 2$

Ответ: при $b < \frac{1}{2}$ и $a \geq 2$.

№3



$S_{BKN} = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot NH_1$

$S_{MNL} = \frac{1}{2}\cdot LH_2\cdot MN$

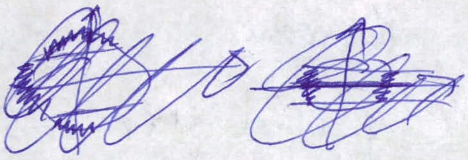
$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\cdot(BC\cdot NH_1 + LH_2\cdot MN)$

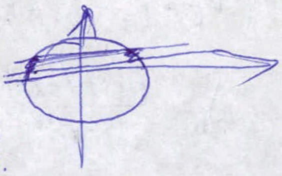
$\frac{AM}{LH_2} = \frac{MB}{NH_1} \Rightarrow AM\cdot NH_1 = MB\cdot LH_2$

$\frac{LH_2}{NH_1} = \frac{AM}{MB} \Rightarrow LH_2 = k\cdot NH_1$, где $k = \frac{AM}{MB}$.

$S = \frac{1}{2}\cdot(2x\cdot NH_1 + k\cdot NH_1\cdot MN) = \frac{1}{2}\cdot NH_1(2x + k\cdot MN)$

$$\begin{cases}|\sin x| > \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}} \\ |\sin x| < \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}}\end{cases} \quad \begin{cases}|\sin x| > \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ |\sin x| < \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\end{cases}$$





$$x \in \left(\arcsin\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + 2\pi n;\ \arcsin\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + 2\pi n\right) \cup$$
$$\cup \left(\pi - \arcsin\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + 2\pi n;\ \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + 2\pi n\right).$$

№1 $x^3 + 2y^2 = 2016$

Заметим, что x - чётное число, т.к. $2016 \vdots 2$ и $(2y^2) \vdots 2$.

$x = 2a$; $a \in N$. $8a^3 + 2y^2 = 2016$

$4a^3 + y^2 = 1008$

Заметим, что $y \vdots 2$, т.к. $1008 \vdots 4$ и $(4a^3) \vdots 4$.

$y = 2b$: $4a^3 + 4b^2 = 1008$

$a^3 + b^2 = \frac{504}{2}$

$a^3 + b^2 = 252$

I сл. $a = 2c - 1$, $b = 2d - 1$: $(2c-1)^3 + (2d-1)^2 = 252$

$8c^3 - 12c^2 + 6c - 1 + 4d^2 - 4d + 1 = 252$

$8c^3 - 12c^2 + 6c + 4d^2 - 4d = 252$

$4c^3 - 6c^2 + 3c + 2d^2 - 2d = 126$

~~$c = 2e - 1$: $4(2e-1)^3 - 6(2e-1)^2 + 3(2e-1) + 2d^2 - 2d = 126$~~

$4(8e^3 - 12e^2 + 6e - 1) - 6(4e^2 - 4e + 1) + 6e - 3 + 2d^2 - 2d = 126$

$32e^3 - 48e^2 + 24e - 4 - 24e^2 + 24e - 6 + 6e - 3 + 2d^2 - 2d = 126$

$32e^3 - 70e^2 + 48e + 2d^2 - 2d = 126 + 10 + 3$

$32e^3 - 70e^2 + 48e + 2d^2 - 2d = 139$

$\Rightarrow c = 2e$: $4 \cdot 8e^3 - 6 \cdot 4e^2 + 3 \cdot 2e + 2d^2 - 2d = 126$

$32e^3 - 24e^2 + 6e + 2d^2 - 2d = 126$

$16e^3 - 12e^2 + 3e + d^2 - d = 63$

$x^3 = 2016 - 2y^2$

$\Rightarrow x \vdots 2$ и $y \vdots 2$: $8a^3 = \overset{252}{2016} - 8b^2$

$a^3 + b^2 = 252$

I сл. $a = 2c$, $b = 2d$: $8c^3 + 4d^2 = 252$

$2c^3 + d^2 = 63$

$\Rightarrow d = 2k - 1$: $2c^3 + 4k^2 - 4k = 62$

$c^3 + 2k^2 - 2k = 31$

$\Rightarrow c = 2m - 1$: $8m^3 - 12m^2 + 6m + 2k^2 - 2k = 32$

$4m^3 - 6m^2 + 3m + k^2 - k = 16$