Прод "Пошкар-ола"

24-80-31-21
(197.1)

Олимпиада ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7-1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"

по математике

Евдокимовой Ксении Витальевны

фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата

«27» марта 2016 года

Подпись участника

Евд

Ясинский / Ф / ЛИСТ-ВКЛАДЫШ Гис. Богачёв

Чистовик

65 (шестьдесят пять)

1	2	3	4	5	6	Σ

№ 1

$$\left(\frac{3}{2x-y}-\frac{2}{2x+y}-\frac{1}{2x-5y}\right):\frac{y^2}{4x^2-y^2}=$$

$$=\frac{3(2x+y)(2x-5y)-2(2x-y)(2x-5y)-(2x-y)(2x+y)}{(4x^2-y^2)(2x-5y)}\cdot\frac{(4x^2-y^2)}{y^2}=$$

$$=\frac{3(4x^2-8xy-5y^2)-2(4x^2+5y^2-12xy)-4x^2+y^2}{(2x-5y)\,y^2}=$$

$$=\frac{12x^2-24xy-15y^2-8x^2-10y^2+24xy-4x^2+y^2}{(2x-5y)y^2}=$$

$$=\frac{-24y^2}{(2x-5y)y^2}=\frac{-24}{2x-5y}=\frac{24}{5y-2x}$$

при $x=\frac{4}{3}$; $y=\frac{7}{3}$:

$$\frac{24}{\frac{7\cdot5}{3}-\frac{2\cdot4}{3}}=\frac{24\cdot3}{35-8}=\frac{24\cdot3}{27}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$$

Ответ: $2\frac{2}{3}$ верно

№ 3

	v	t	A
мастер	2,5x	$\frac{288}{(N+2,5)x}$	
ученик	x	$\frac{288}{(N+2,5)x}$	
мастер + ученики (без одного)	$xN+2,5x$	$\frac{288}{(N+2,5)x}$	288

верно

=> каждый ученик окрасил $\frac{288\cdot x}{(N+2,5\cdot x}=\frac{288}{N+2,5}$ (кв.м)

Если бы работали все ученики без мастера, то ~~Если~~ каждый из них окрасил бы $\frac{288}{N+1}$ (кв.м), т.к. скорости учеников равны.

=> $\frac{288}{N+1}-6=\frac{288}{N+2,5}$

Чистовик

№5

$\cos(8\pi x) + 2\cos(4\pi x) - \cos(2\pi x) + 2\sin(\pi x) + 3 = 0$

$2\cos^2(4\pi x) - 1 + 4\cos^2(2\pi x) - 2 + 1 - 2\cos^2(\pi x) + 2\sin(\pi x) + 3 = 0$

$2\cos^2(4\pi x) + 4\cos^2(2\pi x) - 2\cos^2(\pi x) + 2\sin(\pi x) = -1$

$[0;2]$ $[0;4]$ $[-2;0]$ $[-2;2] = -1$

$\Rightarrow$ $2\sin(\pi x) = -1$ (т.к. функция периодическая с периодом $T = 2\pi$ (для cos))

$\sin(\pi x) = -\frac{1}{2}$

$\begin{cases} \pi x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot n \\ \pi x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot n \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{1}{6} + 2n \\ x = \frac{-5}{6} + 2n \end{cases}$, $n \in \mathbb{Z}$

$x_1 = \frac{7}{6}$; [illegible] ; [illegible] $x_2 = \frac{11}{6}$; $x_3 = \frac{19}{6}$; $x_4 = \frac{23}{6}$; ...

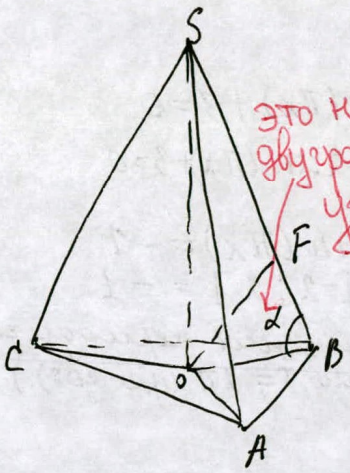
$S_{100} = \frac{2 \cdot \frac{7}{6} + 2 \cdot 49}{2} \cdot 50 + \frac{2 \cdot \frac{11}{6} + 2 \cdot 49}{2} \cdot 50 = 5050$

Ответ: 5050

Ответ верный, но решение содержит необоснованный переход.

Чистовик

№4



Дано: SABC – прав. Δ пирамида

$\angle\alpha = \operatorname{arctg} 3$

центр сферы $\in$ пл. ABC

т. B, т. A, т. C $\in$ сфере

неверно

Найти: в каком отношении делит боковую сторону SB сферы.

Решение: 1) т.к. т. A, т. B, т. C $\in$ сфере и центр сферы $\in$ пл. ABC $\Rightarrow OC = OB = OA = R$

2) $\operatorname{arctg}\alpha = \frac{SO}{OB} = 3$

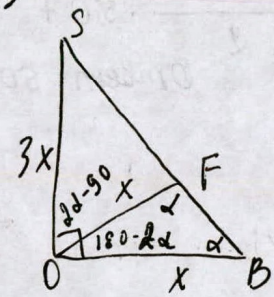
$SO = 3x$ и $OB = x = R$

3) т. F $\in SB \in$ сфере, $OF = R = x$

4) $\measuredangle$ ΔSOB – прямоуг.:

по т. Пифагора:

$SB = 10\sqrt{x}$



5) $\measuredangle$ ΔOFB

$\angle FOB = \beta = 180° - 2\alpha$

по т. cos: $FB^2 = 2x^2 - 2x^2\cos\beta$

6) $\measuredangle$ ΔSOF

$\angle SOF = 90° - \beta = 2\alpha - 90°$

по т. cos: $SF^2 = 10x^2 - 3x^2\cos(90° - \beta)$

7) $\frac{SF}{FB} = \frac{10x^2 - 3x^2\cos(90° - \beta)}{2x^2 - 2x^2\cos\beta} = \frac{10 + 3\sin\beta}{2 - 2\cos\beta} =$

$= \frac{10 + 3\sin(180° - 2\operatorname{arctg}3)}{2 - 2\cos(180° - 2\operatorname{arctg}3)} = \frac{10 + 3\sin(2\operatorname{arctg}3)}{2 + 2\cos(2\operatorname{arctg}3)}$

Ответ: $\frac{SF}{FB} = \frac{10 + 3\sin(2\operatorname{arctg}3)}{2 + 2\cos(2\operatorname{arctg}3)}$

Чистовик

№3 (продолжение)

$$\frac{288-6N-6}{N+1} = \frac{288}{N+2,5}$$

$$288(N+1) = (288-6N-6)(N+2,5)$$

$$288N+288 = 288N-6N^2-6N+720-15N-15$$

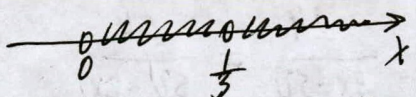
$$6N^2+21N-417=0 \quad |:3$$

$$2N^2+7N-139=0 \qquad D=1161 \Rightarrow \text{нет решения в целых числах.}$$

№2

$$\log_{3x}(x+1)-(x+1)^{(\log_{\cos^2 9}\sqrt{x+1})^{-1}} < \sin^2 9$$

ОДЗ: $\begin{cases} x>-1 \\ x>0 \\ x\neq\frac{1}{3} \end{cases}$



$$\log_{3x}(x+1)-(x+1)^{\log_{x+1}\cos^2 9} < \sin^2 9$$

$$\log_{3x}(x+1)-\cos^2 9 < 1-\cos^2 9$$

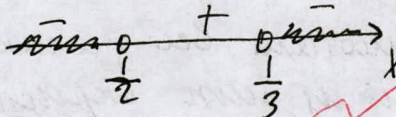
$$\log_{3x}(x+1) < 1$$

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln 3x}-1<0$$

$$\frac{\ln(x+1)-\ln 3x}{\ln 3x-\ln 1}<0$$

Метод замены множителей:

$$\frac{1-2x}{3x-1}<0$$



ошибка упущения числа

Ответ: с учетом ОДЗ $x\in(0;\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{3};+\infty)$

$x\in(0,\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$

Ответ с ошибкой, но решение верное

Черновик

№ 1

$$\frac{3(2x+y)(2x-5y)-2(2x-y)(2x-5y)-(2x-y)(2x+y)}{(2x-5y)(4x^2-y^2)}=$$

$$=\frac{3(4x^2-3xy-5y^2)-2(4x^2-6xy+5y^2)-4x^2+y^2}{(2x-5y)(4x^2-y^2)}=$$

$$=\frac{(12x^2-8x^2-4x^2)-(9xy+12xy)-(15y^2+10y^2+y^2)}{(2x-5y)(4x^2-y^2)}=$$

$$=\frac{4y(3x-4y)}{(2x-5y)(4x^2-y^2)}\cdot\frac{y^2}{y}=\frac{3x-4y}{y(2x-5y)}=\frac{4-\frac{28}{3}}{\frac{7}{3}\left(\frac{8}{3}-\frac{35}{3}\right)}=\frac{+16}{7\cdot 27}$$

$\frac{288}{24}=12$ $\quad 6\cdot 23=138$ $\quad 6+6+3=15$ $\quad \frac{288}{18}=16$ $\quad 10\cdot 17=170$ $\quad \frac{288}{36}=8$ $\quad \frac{283}{35}$

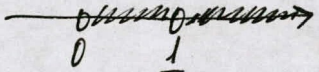
$\frac{3\cdot 8\cdot 3}{3\cdot 3\cdot 3}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$ $\quad \frac{288}{16}=18$ $\quad 288-30=258$ $\quad 84+42=126$ $\quad 288-126=162$

$\frac{288}{16}=18$ $\quad 15\cdot 12=180$ $\quad 35$ $\quad 258$

№ 2

$$\log_{3x}(x+1)-(x+1)<\left(\log_{\cos 9}\sqrt{x+1}\right)^{-1}\sin^2 9$$

ОДЗ: $x\neq\frac{1}{3}$, $x>0$, $x>-1$, $\sqrt{x+1}>0$



$\frac{288}{12}=24$ $\quad 18\cdot 11=198$ $\quad \frac{288}{6}=48$ $\quad 48\cdot 5=240$ $\quad 48$ $\quad 96$ $\quad \frac{2880}{65}=\frac{576}{13}=4$

$$\frac{2}{\log_{\cos 9}(x+1)}\left(\frac{1}{\log_{(x+1)}3x}\right)^{-1}$$

$\frac{288}{8}=36$ $\quad 30\cdot 7=210$ $\quad 60+15=75$

$$\frac{1}{2}\log_{\cos 9}3x-(x+1)<$$

$\frac{288}{6}=48$ $\quad 288$ $\quad 42$ $\quad 18$ $\quad \frac{288}{24}=12$ $\quad \frac{288}{12}=24$ $\quad \frac{288}{18}=16$ $\quad 144$ $\quad \frac{288}{9}=32$ $\quad 273:23$ $\quad 263:17=1$ $\quad 32-6=26$ $\quad 288-65=223$ $\quad 78+52=130$ $\quad 130:65=2$

Черновик

№3

$\frac{288}{12} = 24$

$24 - 6 = 18$

~~$18 + 18$~~ ~~$18 \cdot 3{,}5$~~ $18 + 18 \cdot 2{,}5$

~~$\frac{288}{18 \cdot 3{,}5} = N$~~ ~~$\frac{288}{18 + 18 \cdot 2{,}5}$~~

$\frac{288 - 18 \cdot 2{,}5}{18} = N$

$288 - \left(\frac{288}{N+1} - 6\right) \cdot \frac{5}{2}$ $288 - \left(\frac{288 - 6 + 6N}{N+1}\right)\frac{5}{2} =$

$\frac{288}{N+1} - 6$ $= 282 - 6N$

$282 + 6N$

$705 - 288 = 417$

$= 288N + 288 - (141 + 3N)5 = 288N + 15N + 288 - 705 =$

$282 - 273 = 9$

$31 \times 31 = 31 + 93 = 991$

$39 \times 39 = 351 + 117 = 1521$

$= \frac{273N - 417}{282 - 6N} = N$

$282N - 6N^2 = 273N - 417$

$139 \times 8 = 278 + 1112 + 9 = 1121$

$37 \times 139 \times 8 = 1112$

$6N^2 - 273N$ $303 - 282 = 21$

$6N^2 - 9N - 417 = 0$

$2N^2 - 3N - 139 = 0$

$D = 49 + 8 \cdot 139 = 1112 + 49 = 1161$

$288N + 288$

$D = \frac{303N - 417}{282 - 6N} = N$

$282N - 6N^2 = 303N - 417$

$6N^2 + 21N - 417 \mid :3$

$2N^2 + 7N - 139$

Черновик:

N 2

$\log_{3x}(x+1) - (x+1)^{\frac{1}{2}\log_{x+1}\cos 9} < \sin^2 9$

$\log_{3x}(x+1) - \frac{3}{2}\cos 9 < \sin^2 9 < 1-\cos^2 9$

$\log_a$

$a^{\log_a b} = b$

$-2\sin^2 4\pi x - 4\sin^2 2\pi x + 2\sin^2\pi x + 2\sin\pi x = 5$

$1-2\sin^2 4\pi x + 2 - 4\sin^2 2\pi x + 2\sin^2\pi x - 1 + 3 + 2\sin\pi x = 0$

$[-2;0]$ $[-4;0]$ $[0;2]$

$[-2;2] = 5$

$\cos^2 9 - \frac{3}{2}\cos 9 - 1 + \log_{3x}(x+1) < 0$

-1 -2 -1

$\log_{3x}(x+1) - \sqrt{\cos 9} < 1 - \cos^2 9$

$\cos^2 9 - \sqrt{\cos 9} - 1 + \log_{3x}(x+1) < 0$

$720 - 303 = 417$

$\log_{3x}(x+1) < 1$

$\frac{\ln(x+1) - \ln 3x}{\ln 3x - \ln 1} < 0$

$303 - 720 = 3$

$144 \times 5 = 720$

$309 - 288 = 21$

$\left(\frac{288}{N} - 6\right)(N+1) + \frac{1-2x}{3x-1} < 0$ 7

$+2{,}5\left(\frac{288}{N} - 6\right) = \frac{288}{}$

$2 - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$

$2 - \frac{1}{6} = \frac{12-1}{} = \frac{11}{6}$

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ x

$\frac{24-5}{6} = \frac{19}{6}$

N 3

	v	t	S
N учеников			
1 ученик	x		
мастер	2,5x		
вместе	(N+2,5)x	$\frac{288}{(N+2{,}5)x}$	288

2N-1

$\frac{288}{N+2{,}5} + 6 = \frac{288}{N+1}$

$(288 + 15 + 6N)(N+1) = 288\left(N + \frac{5}{2}\right)$

$303 + 6N^2 + 309N = 288N + 720$

$6N^2 + 21N - 417 = 0$

$2N^2 + 7N - 139 = 0$

$288N = 288 \cdot 3{,}5N +$

49

$139 \cdot 8 = 1112$

$1112 + 49 = 1161$

288 | 2
144 | 2

$\frac{288}{12} = 24$

$18 \times 11 = 198$

$288 - 198$

$\frac{288}{N+1} = \frac{288}{N} + \frac{288 \cdot 2{,}5}{N}$

$\frac{288}{N+1} = \frac{288 \cdot 3{,}5}{N}$

Черновик.

№3

	v	t	A
вместе	$N \cdot x$	$\frac{288}{N \cdot x}$	288
каждый	x	$\frac{288}{N \cdot x}$	$\frac{288}{N}$
мастер	$2{,}5x$	$\frac{288}{(N-1)x+2{,}5x}$	$\frac{288 \cdot 2{,}5x}{Nx+1{,}5x}$
с мастером	$(N-1)x+2{,}5x$	$\frac{288}{(N-1)x+2{,}5x}$	288

$$\frac{288 \cdot 2{,}5x}{N+1{,}5x} + 6 = \frac{288}{N}$$

$$\frac{288 \cdot 2{,}5x + 6N + 9x}{N+1{,}5x} = \frac{288}{N}$$

$$288 \cdot 2{,}5x \cdot N + 6N^2 + 9xN = 288N + 288 \cdot 1{,}5x$$

$$\frac{288 - M}{(N-1)} = \frac{288}{N} + 6$$

$$\frac{288 - M}{(N-1)} = \frac{288 + 6N}{N}$$

$$\frac{288\,(Nx+1{,}5x) - 288 \cdot 2{,}5x}{(N-1)(Nx+1{,}5x)} = \frac{288+6N}{N}$$

$$(288Nx - 288x)\,N = (288+6N)(N-1)(Nx+1{,}5x)$$

$288N^2x - 288Nx$

$-288Nx$

$(N^2x - Nx)$

$(288+6N)\,(N^2x + 0{,}5Nx - 1{,}5x)$

$+144Nx + 6N^3x + 3N^2x$

24-80-31-21
(197.1)

Черновик

N 3

$v \quad t \quad A$

$N \quad v \quad t \quad A$

$1 \quad v \quad t \quad A$

$NX \quad 288 \quad \frac{288NX}{NX+2,5X}$

$2,5X$

$NX+2,5X$

$v \quad t \quad A$

$(N+1)X \quad \frac{288}{(N+1)X} \quad 288$

$N \; X \quad \frac{288}{NX+2,5X} \quad \frac{288}{N+2,5}$

$\frac{288}{N+2,5} + 6 = \frac{288}{N}$

$(288+6N+15)N = 288N + 720$

$6N^2 + 15N - 720 = 0$

$2N^2 + 5N - 120 = 0$

$D = 25 + 960 = 1215$

$2N^2 + 5N - 240 = 0$

$480 = 6 \cdot 8 \cdot 10 =$

$= 6 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 5 =$

$= 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 5 = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5$

$D = 25$

$720 - 15 = 705$

$705 - 288 = 417$

$139 \cdot 8 = 1112$

$D = 49 + 1112 = 1161$

$3 \cdot 387$

$3 \cdot 3 \cdot 129$

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 43$

$1112 + 49 = 1161$

$\frac{(288-6N)(N+1)}{N} + \frac{2,5 \cdot 288 - 15N}{N} = 288\,N$

$-6N^2 - 6N + 288 + 288N - 15N + 720 = 288N$

$6N^2 + 21N - 1008$

$2N^2 + 7N - 336$

$2N^2 + 7N - 139 = 0$

$D = 49 + 8 \cdot 139 =$

$D = 49$

$288 \cdot 2,5 = 720$

$720 : 3 = 240$

$\frac{288 + 6N + 15}{N+2,5} = \frac{288}{N+1}$

$(303 + 6N)(N+1) = 6N^2 + 303 + 309N = 288N + 720$

$6N^2 + 21N - 417 = 0$

$Xt(2,5+N) = 288$

$X \cdot T(N+1) = 288$

$2,5Xt$

NXt

черновик.

$\cos(8\pi x) + 2\cos(4\pi x) - \cos(2\pi x) + 2\sin(\pi x) + 3 = 0$

$2\cos^2 4\pi x - \cos 1 + 4\cos^2 2\pi x - 1 + 2\cos^2 \pi x + 1 + 2\sin \pi x + 3 = 0$

$6 - 2\sin^2 4\pi x - 4\sin^2 2\pi x - 2\sin^2 \pi x + 2\sin \pi x = 0$

$2\cos^2$

6 $[0; -2]$ $[0; -4]$ $[0; -2]$ $[-2; 2]$

$2\cos^2 4\pi x + 4\cos^2 2\pi x + 2\cos^2 \pi x + 2\sin \pi x = 0$

$2 + \cos^2 4\pi x + 2\cos^2 2\pi x - \cos^2 \pi x + \sin \pi x = 0$

$0; 1$ $0; 2$ $-1; 0$ $-1; 1$ $+2 = 0 = -2$

$\sin \pi x = -1$ $\cos \pi x = \pm 1$

$2\cos^2 4\pi x + 4\cos^2 2\pi x - 2 + 1 - 2\cos^2 \pi x + 2\sin \pi x + 3 = 0$

$2\cos^2 4\pi x + 4\cos^2 2\pi x - 2\cos^2 \pi x + 2\sin \pi x + 2 = 0 \mid :2$

$\cos^2 4\pi x + 2\cos^2 2\pi x - \cos^2 \pi x + \sin \pi x + 1 = 0$

$0; 1$ $0; 2$ $-1; 0$ $-1; 1 = -1$

$\sin \pi x = -1$

$2x$ 8 14 $= 24$ $\pi x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot n$

$x = \frac{3}{2} + 2 \cdot n$

1,5 $x_1 = \frac{3}{2}$ $d = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$

$x_2 = x_1 + d$

$x_n = x_1 + d(n-1)$

$S_n = \frac{3}{2} + 3$

$\frac{2x_1 + d(n+1)}{2} \cdot n$

$\frac{4 + 6 \cdot 2}{2} \cdot 3 = (2+6) \cdot 3 = 24$

$[0; 2]$ $0; 4$ $[-2; 0]$

$-1; 1 = -1$

$-4; 8 = -1$

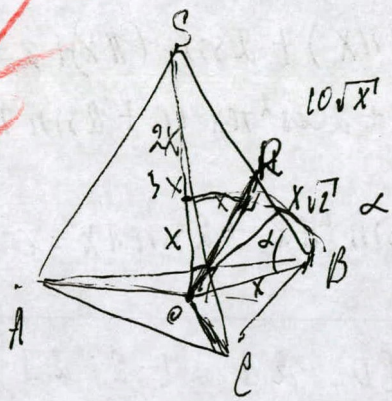
$0; 6$

$-2; 6$ $-2; 2$

$25 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 2 = 101 \cdot 8 = 101 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$

$= (69 + 69 + \frac{2}{2} + \frac{2}{2}) \cdot 2 \cdot 2$

Черновик



$\alpha = \operatorname{arctg} 3$

$tg\,\alpha = 3$

$\frac{SO}{OB} = 3$

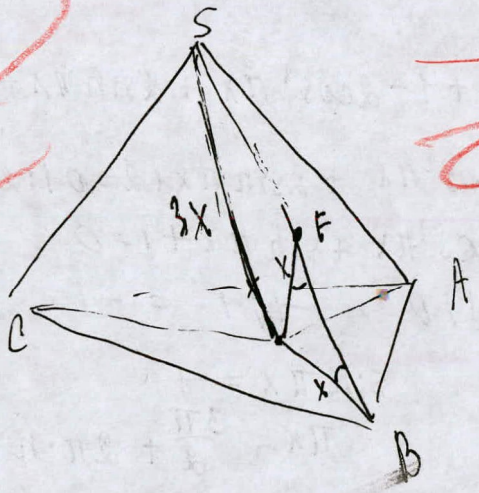
$SO = 3x$

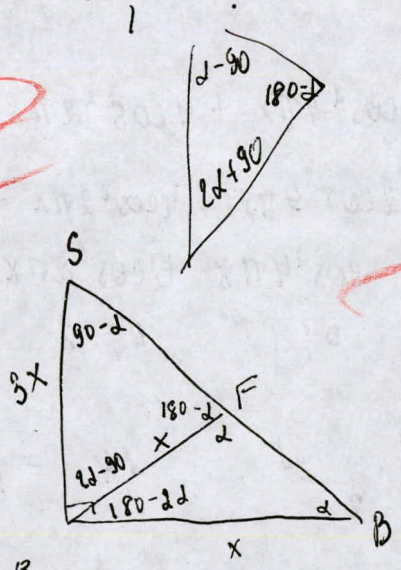
$OB = x$

$SB = \sqrt{10}\,x$

$RB = x\sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{10}\sqrt{x^1} - \sqrt{2}x}{x\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10^1} - \sqrt{2^1}}{\sqrt{2^1}} = \frac{\sqrt{5^1} - 1}{1}$?





T. cos: $FB^2 = 2x^2 - 2x^2 \cos\beta$

$SF^2 = 10x^2 - 3x^2 \cos(90-\beta)$

$\frac{FB}{SF} = \sqrt{\frac{2x^2 - 2x^2\cos\beta}{10x^2 - 3x^2\cos(90-\beta)}} = \frac{2 - 2\cos\beta}{10 + 3\sin\beta}$

$\cos\beta = \cos(\pi - 2\operatorname{arctg} 3)$

$\sin\beta = -\sin(-2\operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi}{2})$

$\cos(\pi + 2\operatorname{arctg} 3) = -\cos(2\operatorname{arctg} 3)$

$10 + 3\cos 2\operatorname{arctg} 3$

$\frac{2 + 2t}{10 + 3t}$

Черновик.

V

X

2,5X

NX

NX+2,5X

t

A

288

$\frac{288}{NX+2,5X} \cdot X = \frac{288}{N+2,5}$

N+1 NX

$\frac{288}{\frac{NX}{N+1}}$ 288

$\frac{288}{N+2,5} = \frac{288-6N}{N}$

$288N = (288-6N)(N+2,5)$

$288N = 288N - 6N^2 - 15N + 720$

$6N^2 + 15N - 720 = 0$

$\frac{288}{N+2,5} = \frac{288}{N+1} - 6$

$\frac{288}{N+2,5} = \frac{288-6N-6}{N+1}$

$288N + 288 = 288N - 6N^2 - 6N - 15N - 15 + 720$

$6N^2 + 21N + 303 = 0$

$2N^2 + 7N + 101 = 0$

$D = 49 + 8 \cdot 139$

$D = 720 - 288 = 432$

$432 + 15 = 447$

$720 - 303 = 417$

$288 + 15 = 303$

$149 \times 8 = 1192$

$1192 + 49 = 1241$

$31 \times 31 = 961$

$39 \times 39 = 1521$

$D = 49$

$6N^2 + 21N - 447$

$2N^2 + 7N - 139$

$2N^2 + 7N - 149$

$x_1 \cdot x_2 = -139 \cdot 2$

$x_1 - x_2 = -7$

$x_1 = x_2 - 7$

$x_2^2 - 7x_2 - 139 \cdot 2 = 0$

17 · 2 ·