20-57-99-68
(183.1)

Олимпиада ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 174

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы"

по математике

Попыркиной Марии Романовны

фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата

«22» марта 2016 года

Подпись участника

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

20-57-99-68 (183.1)

ЧЕРНОВИК

65 (шестьдесят пять)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2018

$\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2} < \frac{40}{29}$

$1+2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} < \frac{1600}{841}$

$\sin 1 < \frac{759}{841}$

$\sin 1 < \sin\frac{\pi}{3} < \frac{759}{841}$

$\frac{\sqrt3}{2} < \frac{759}{841}$

$\frac{3}{4} < \frac{759^2}{841^2}$

$29^2 = 841$

$1600 - 841$

759

$\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ $\sin\uparrow$

$\frac{40}{29} < \sqrt2$

$\frac{1600}{841} < 2$

$1 < \frac{\pi}{3}$

$\sin 1 < \sin\frac{\pi}{3}$

$\frac{\sqrt3}{2}$

$1-\frac{759^2}{841^2} = \frac{841^2-759^2}{841^2} = \frac{82\cdot1600}{841^2}$

$82 \cdot 16 = 1312$

$= 131200$

$759 \cdot 759 = 576081$

$841 \cdot 841 = 707281$

$576081 \,|\, 707281$ $0,8$

5760810

5658248

$707281 \cdot 8 = 5658248$

$\frac{(x-3)a}{ax} = \frac{bx}{b(x+t)}$

$(x-3)(x+t) = x^2$

$x^2 + xt - 3x - 3t = x^2$

$xt - 3x - 3t = 0$

обгон — за вр. x

$a, b > 0$

$a < b$

$a^2 < b^2$

$\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

$\frac{1}{9} < \frac{1}{4}$

$x(t-3) = 3t$

$x = \frac{3t}{t-3}$

$t(x-3) = 3x$

$t = \frac{3x}{x-3}$

$\frac{3t}{t-3}$

3 мин. t мин.

a м/мин b м/мин

$3a = tb$

$3a = bt$ целое

$ax = bx + 3a$

$ax = bx + bt$

$(x-3)a = bx$

$ax = b(x+t)$

$3a$ ax bx

$ax = bx + 3a$

	1	2	1	2
v	a	b	a	b
t	3	t	x	x
S	$3a$	bt	ax	bx

$\in \mathbb{Z}$

1 круг   1 круг разница

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

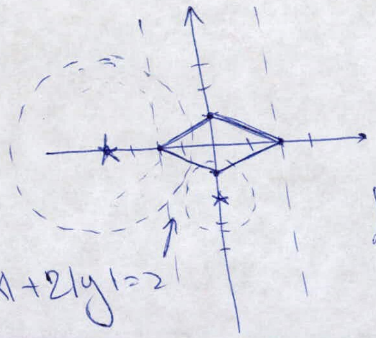
Шифр

ЧЕРНОВИК

$|y| = \frac{2-|x|}{2} = 1 - \frac{|x|}{2}$ $|x| \le 2$

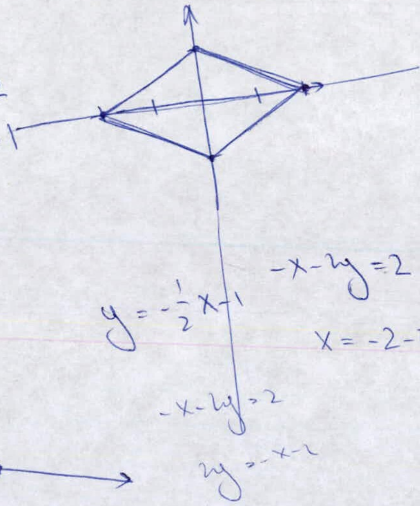
$|y| = 1 - \frac{0}{2} = 1$

$x = 1$



$|x| + 2|y| = 2$

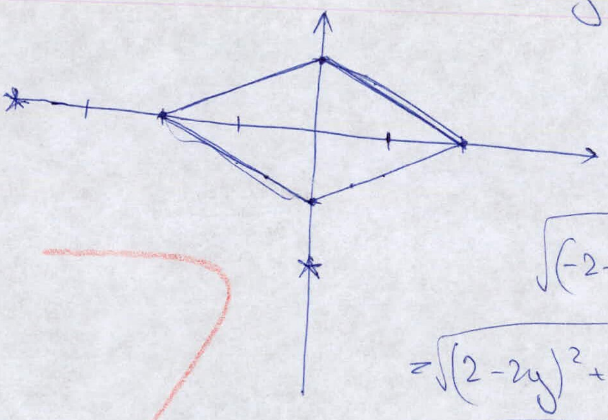
$\begin{cases} |x| \le 2 \\ |y| \le 1 \end{cases}$



$-x-2y=2$

$y = -\frac{1}{2}x - 1$

$x = -2-2y$



$-x-2y=2$

$2y = -x-2$

y

$\sqrt{(-2-2y+4)^2+y^2} + \sqrt{(-2-2y)^2+(y+2)^2} =$

$= \sqrt{(2-2y)^2+y^2} + \sqrt{(2y+2)^2+(y+2)^2}$

$\cancel{2\sqrt{4y^2-8y+4}} +$

$= \sqrt{4y^2-8y+4+y^2} + \sqrt{4y^2+8y+4+y^2+4y+4}$

ВОТ КОСЯК

$A(y) = \sqrt{5y^2-8y+4} + \sqrt{5y^2+10y+8}$

$A'(y) = \frac{10y-8}{2\sqrt{\ }} + \frac{10y+10}{2\sqrt{\ }} = \frac{5y-4}{\sqrt{5y^2-8y+4}} + \frac{5y+5}{\sqrt{5y^2+10y+8}} = 0$

$\frac{5y+5}{\sqrt{5y^2+10y+8}} = \frac{4-5y}{\sqrt{5y^2-8y+4}}$ >0 >0

$\frac{25y^2+50y+25}{5y^2+10y+8} = \frac{25y^2-40y+16}{5y^2-8y+4}$

$125y^4 - 200y^3 + 25y^2 + 250y^3 - 400y^2 + 200y + 125y^2 - 200y + 100 =$

$= 125y^4 - 200y^3 + 80y^2 + 250y^3 - 400y^2 + 160y + 200y^2 - 320y + 128$

$150y^2 + 100 = 280y^2 - 160y + 128$

$130y^2 - 160y + 28 = 0$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

20-57-99-68 (183,1)

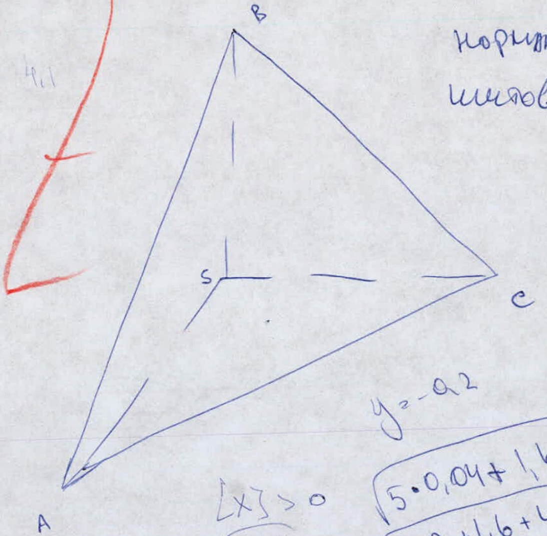
ЧЕРНОВИК

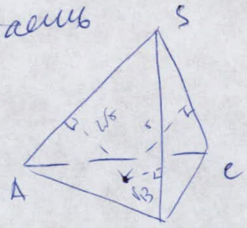
Олимпиада ПВГ 2016

$D = 160^2 - 130 \cdot 28 \cdot 4 = 4^2(40^2 - 130 \cdot 7)$

$$\begin{array}{r} 1600 \\ -910 \\ \hline 690 \end{array}$$

нормально в
шияов. посчитаешь





$y = -0{,}2$

$\sqrt{5 \cdot 0{,}04 + 1{,}6 + 4} + \sqrt{5 \cdot 0{,}04 - 2{,}4 + 8}$

$\sqrt{0{,}2 + 1{,}6 + 4} +$

$+\sqrt{0{,}2 + 8 - 2{,}4}$

$\sqrt{2{,}2} + \sqrt{5{,}8}$ 5,6

$[x] > 0$

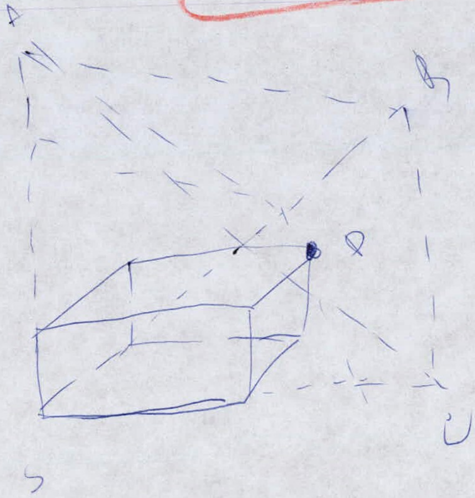
$x > \emptyset$

$[\log_2 x] > 0$

$\log_2 x \geq \emptyset$

$x \geq 2$

$\log_3$ 1,5



2 + a

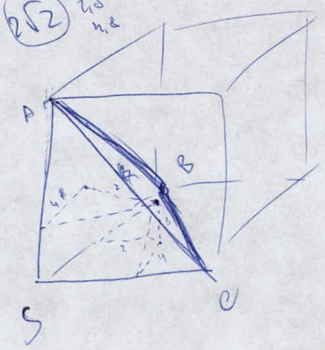
$\log_3(\log_2 x) \geq [\log_3(\log_2 x)$

$(\log_3 \log_2 x - 10)(\log_3 \log_2 - 2)$

$\log_2 x =$

$2 + 2\sqrt{2}$

$\sqrt{4} + \sqrt{8}$



$2 \cdot 3^4 - 24$ мало

$x^2 + (y+2)^2$

$x^2 + (|y|-2)^2$

$y^2 + 4y + 4$

2 3

4

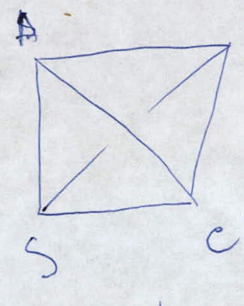
$x : y$ $(-4; 0)$

$-|x| : -|y|$ $(0; -2)$

$\sqrt{x^2 + (y+2)^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2}$

$\sqrt{(-|x|)^2 + (-|y|+2)^2} + \sqrt{(-|x|+4)^2 + y^2}$

$\sqrt{x^2 + (|y|-2)^2} + \sqrt{(|x|-4)^2 + y^2}$



$-2 \leq x \leq 2$

$|x| \leq 2$

$2 \leq x + 4 \leq 6$

$-4 \leq x \leq 4$

$|x| + 4 \leq 4$

$|x| \leq -2$

$0 \leq x + 4 \leq 8$

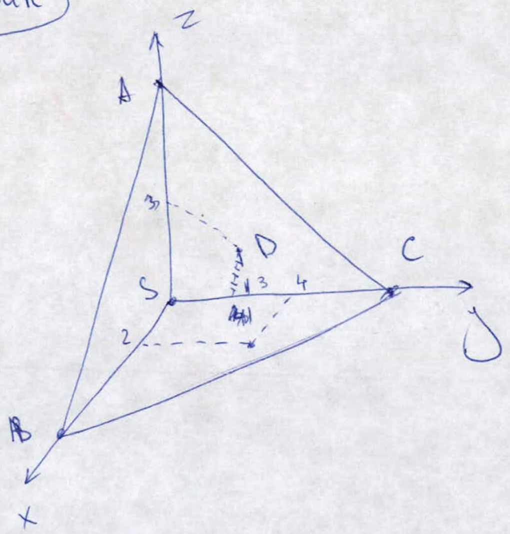
$|x| - 4 \leq 0$

$\frac{-4}{\sqrt{4}} + \frac{6}{\sqrt{8}} =$

$= -\frac{4}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} - 2 < 0$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Чистовик



$S(0;0;0)$

$A(0;0;z_0)$

$B(x_0;0;0)$

$C(0;y_0;0)$

Пусть точка D имеет координаты $D(a;b;c)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{5} \\ \sqrt{a^2+c^2} = \sqrt{13} \\ \sqrt{b^2+c^2} = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2+b^2 = 20, \\ a^2+c^2 = 13, \\ b^2+c^2 = 25 \end{cases}$$

$$a^2+b^2+c^2 = \frac{20+13+25}{2} = 29$$

$c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

$\Rightarrow D(2;4;3)$

$\Rightarrow SD = \sqrt{2^2+4^2+3^2} = \sqrt{29}$ - минимальное $\rho(S;(ABC))$

$SB \geqslant 2,\ SA \geqslant 3,\ SC \geqslant 4$ - т.к. $D \in (ABC)$

Координаты точки D найдены верно,
~~решение не найдено~~
ответа нет

ЧЕРНОВИК

$x=2 \quad \left(\left[\log_3 \underbrace{\log_2 2}_{1}\right]\right)^2 - 12\cdot \log_3\left[\underbrace{\log_2 2}_{1}\right] + 20\cdot \log_3 \log_2 2 =$

$= \quad 0 \qquad 0$

$\log_3 \log_2 x = 2$

$\log_2 x = 9$

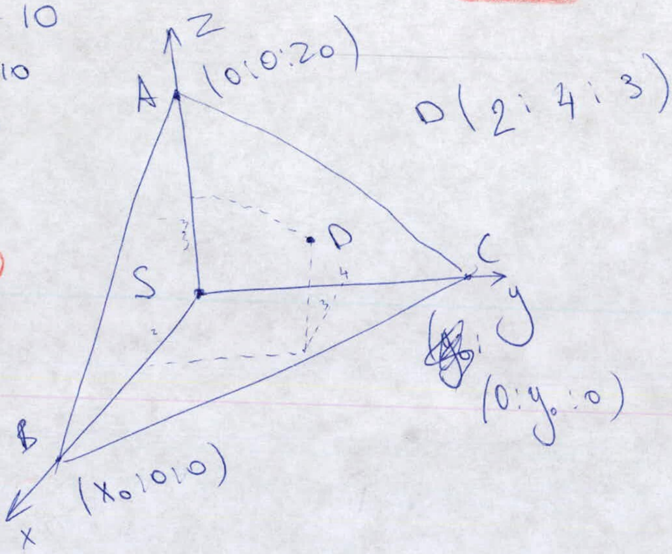
$x = 512 = 2^9$

$x \in [512; 513)$

$\log_3 \log_2 x = 10$

$\log_2 x = 3^{10}$

$x = 2^{3^{10}}$



$Ax+By+Cz+D=0$

$$\begin{cases} Ax_0+D=0 \\ By_0+D=0 \\ Cz_0+D=0 \\ 2A+4B+3C+D=0 \end{cases}$$

$A=-\frac{D}{x_0}$

$B=-\frac{D}{y_0}$

$C=-\frac{D}{z_0}$

$\frac{-D}{x_0}x+\frac{-D}{y_0}y+\frac{-D}{z_0}z+D=0$

$\frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}+\frac{z}{z_0}-1=0$

$\frac{2}{x_0}+\frac{4}{y_0}+\frac{3}{z_0}-1=0$

$z_0 = \frac{3}{1-\frac{2}{x_0}-\frac{4}{y_0}} =$

$= \frac{3}{\frac{x_0y_0-2y_0-4x_0}{x_0y_0}} = \frac{3x_0y_0}{x_0y_0-2y_0-4x_0}$

$V_{min} = \frac{1}{3}\cdot\frac{x_0y_0z_0}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x_0^2y_0^2}{x_0y_0-2y_0-4x_0}$

$\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$z=0$

$\frac{|0+0+C|}{1} = C =$

20-57-99-68 (183.1)

ЧИСТОВИК

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

Задача 1.

$\frac{759^2}{841^2} = \frac{576081}{707281} > 0{,}8 > 0{,}75$, т.е. $\frac{759^2}{841^2} > \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{759^2}{841^2}} > \sqrt{\frac{3}{4}}$ или $\frac{759}{841} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{759}{841} > \sin\frac{\pi}{3}$

Т.к. на $x \in [0; \frac{\pi}{2})$ $y = \sin x$ монотонно возрастает, то

$\sin\frac{\pi}{3} > \sin 1$, т.к. $\frac{\pi}{3} > 1$

$\Rightarrow \frac{759}{841} > \sin 1 \quad \Big| +1$

$\frac{759}{841} + 1 > \sin 1 + 1$

$\frac{1600}{841} > \sin^2\frac{1}{2} + \cos^2\frac{1}{2} + 2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}$

$\left(\frac{40}{29}\right)^2 > \left(\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2}\right)^2$

$\frac{40}{29} > \sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2}$

Ответ: $\left(\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2}\right)$ меньше. ответ верный, решение верное

Задача 2.

Пусть скорости более быстрого и более медленного водителя (a м/мин) и (в м/мин) соответственно, а время одного круга для более медленного (t мин)

$\Rightarrow$ один круг - 3a м для ~~первого~~ быстрого и вt м для медленного водителей $\Rightarrow$ 3a = вt - длина одного круга.

Пусть (x мин) нужно быстрому водителю для одного обгона медленного $\Rightarrow$ за это время быстрый прошёл на 1 круг больше медленного $\Rightarrow$ ~~3a~~ ax = вx + 1 круг

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик

$$5 - \frac{4}{5y^2+12y+8} = 5 - \frac{4}{5y^2-8y+4}$$

$5y^2+12y+8 = 5y^2-8y+4$

$20y = -4$

$y = -\frac{4}{20} = -\frac{1}{5} = -0,2$ - т. экстремума

ошибка

$A'(y)$: $+$, $-$ на $(-1; 0)$; $A(y)$: $\uparrow$ до $-0,2$, $\downarrow$ после

$\Rightarrow y = -0,2$ - т. max

$\Rightarrow$ A минимально либо при $y=-1$, либо при $y=0$

$A(-1) = \sqrt{5+8+4} + \sqrt{5-12+8} = \sqrt{17}+1$

$A(0) = \sqrt{4} + \sqrt{8} = 2+2\sqrt{2}$ - миним.

Ответ: $2+2\sqrt{2}$. ответ неверный, ~~в решении~~ арифм. ошибка

Задача 4.

$\cdot\ x=2$ $\quad [\log_3 \log_2 2]^2 - 12\log_3[\log_2 2] + 20\cdot\log_3\log_2[2] =$

$= [\log_3 1]^2 - 12\log_3[1] + 20\log_3 1 = 0 - 12\cdot 0 + 20\cdot 0 = 0$

~~$x = 2^9$ $\quad [\log_3 \log_2 2^9]^2 - 12\log_3[\log_2 2^9] + 20\log_3\log_2[2^9] =$~~

~~$= [\log_3 9]^2 - 12\log_3[9] + 20\log_3 9 = [2]^2 - 12\cdot 2 +$~~

Заметим, что при $x\in[2;3)$ $[x]=2 \Rightarrow$ последний член равен 0

$[\log_2 x] = 1 \Rightarrow$ средний член равен 0

$[\log_3\log_2 x] = 0 \Rightarrow$ первый член равен 0

$\Rightarrow x\in[2;3)$

Ответ: $x\in[2;3)$ ответ верный, решение не полное

Задача 5.

Поместим пирамиду в систему координат XYZ. Это возможно, т.к. ребра SA, SB и SC перпендикулярны.

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

ЧИСТОВИК

$A = \sqrt{(x+4)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y+2)^2}$ - сумма расстояний от точки с координатами $(x;y)$ до точек $(-4;0)$ и $(0;-2)$

Чтобы A было минимальным, x и y должны быть ≤ 0.

Пусть это не так, и хотя бы одна из координат >0. Тогда рассмотрим точку с координатами $(-|x|;-|y|)$

• Если $y>0$, то расстояние до точки $(0;-2)$ увеличивается относительно точки $(-|x|;-|y|)$

~~Раньше оно было~~ Для точки $(x;y)$ $\sqrt{x^2+(y+2)^2}$. Для точки $(-|x|;-|y|)$ $\sqrt{(-|x|)^2+(-|y|+2)^2}$

$x^2+(y+2)^2 \to x^2+(|y|-2)^2$

$y^2+4y+4 \to y^2-4|y|+4$

Т.к. $y>-|y|$, то расстояние от точки $(-|x|;-|y|)$ до $(0;-2)$ меньше, чем от точки $(x;y)$ => A тоже меньше

• Аналогично для случаев $x>0$ расстояние до $(-4;0)$ больше, чем от $(-|x|;-|y|)$, для $x>0, y>0$ расстояние до $(-4;0)$ и $(0;-2)$ больше.

$\Rightarrow x\leq 0, y\leq 0$.

$|x|+2|y|=2 \Rightarrow -x-2y=2 \Leftrightarrow x=-2-2y$

$A=\sqrt{(-2-2y+4)^2+y^2}+\sqrt{(-2-2y)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(2y-2)^2+y^2}+\sqrt{(2y+2)^2+(y+2)^2} =$

$=\sqrt{4y^2-8y+4+y^2}+\sqrt{4y^2+8y+4+y^2+4y+4} = \sqrt{5y^2-8y+4}+\sqrt{5y^2+12y+8}$

$A'(y) = \dfrac{10y-8}{2\sqrt{5y^2-8y+4}} + \dfrac{10y+12}{2\sqrt{5y^2+12y+8}} = \dfrac{5y-4}{\sqrt{5y^2-8y+4}} + \dfrac{5y+6}{\sqrt{5y^2+12y+8}} = 0$

Т.к. $y<0 \Rightarrow \dfrac{5y-4}{\sqrt{5y^2-8y+4}}<0 \Rightarrow$

$\dfrac{5y+6}{\sqrt{5y^2+12y+8}} = \dfrac{4-5y}{\sqrt{5y^2-8y+4}} > 0 \quad |\uparrow^2$

$\dfrac{25y^2+60y+36}{5y^2+12y+8} = \dfrac{25y^2-40y+16}{5y^2-8y+4}$

$\dfrac{25y^2+60y+40-4}{5y^2+12y+8} = \dfrac{25y^2-40y+20-4}{5y^2-8y+4}$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик

1 круг - 3a или bt =>

$\begin{cases} ax = bx + 3a \\ ax = bx + bt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x-3) = bx \\ ax = b(t+x) \end{cases}$

$\frac{x-3}{x} = \frac{x}{t+x}$

$xt + x^2 - 3t - 3x = x^2$

$xt - 3t - 3x = 0$

$x(t-3) = 3t$

$x = \frac{3t}{t-3}$

Из условия следует, что x - целое и $x > 8$.

t - тоже целое

Т.к. t и x - время => $x > 0$ и $t > 0$ => $t - 3 > 0$

$t > 3$

$x > 8 \Rightarrow \frac{3t}{t-3} > 8$

$3t > 8(t-3)$

$3t > 8t - 24$

$24 > 5t$

$t < \frac{24}{5}$, $t < 4{,}8$

$\Rightarrow 3 < t < 4{,}8$ и t - целое => $t = 4$.

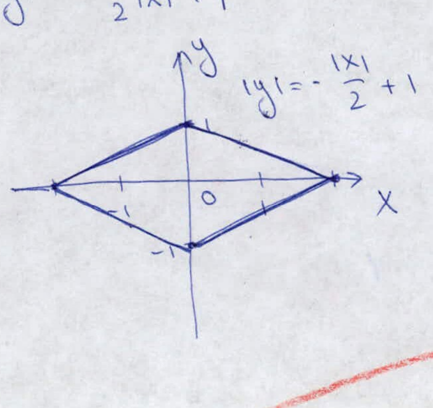
Проверим. $x = \frac{3t}{t-3} = \frac{3 \cdot 4}{4-3} = 12 > 8$ и x - целое

Ответ: 4 минуты. ~~ответ верный, решение верное~~

Задача 3.

$|x| + 2|y| = 2$

$|y| = -\frac{1}{2}|x| + 1$



$\Rightarrow \begin{cases} -1 \le y \le 1 \\ -2 \le x \le 2 \end{cases}$