31-78-60-87
(183.5)

Олимпиада ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Выход 11.43 – 11.45

Вариант 174

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников

по математике

Курбаевой Асель Рауржановны
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата
«22» марта 2016 года

Подпись участника

31-78-60-87
(183.5)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

80 (восемьдесят)

34

Чистовик

(2). Пусть второй проезжал круг за t минут, $t \in \mathbb{Z}$. Тогда быстрый за минуту проезжал $\frac{1}{3}$ круга, медленный — за $\frac{1}{t}$ круга. Пусть в какой-то момент они поравнялись. Далее первый отдаляется от второго со скоростью $\frac{1}{3} - \frac{1}{t} = \frac{t-3}{3t}$. Пусть время между обгонами равно N, $N > 8$, $N \in \mathbb{Z}$. Тогда через N минут разница между расстояниями, которое они прошли с момента, когда они поравнялись первый раз, равно $N \cdot \frac{t-3}{3t}$, и это же равно целому кругу.

$$\frac{t-3}{3t} \cdot N = 1$$
$$\frac{t-3}{3t} = \frac{1}{N}$$
$$N(t-3) = 3t$$
$$N = \frac{3t}{t-3}$$

По условию $N > 8 \Rightarrow \frac{3t}{t-3} > 8$, т.к. $t > 3$, получаем:
$$3t > 8(t-3)$$
$$3t > 8t - 24$$
$$5t < 24$$
$$t < 4{,}8$$

Итак $3 < t < 4{,}8$ и $t \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = 4$. Действительно, в этом случае время между обгонами равно $\frac{3 \cdot 4}{4-3} = 12$, что удовл. условию.

Ответ: 4

верно

(3). Пусть $x > 0$. Заменим x на $-x$. Тогда второе слагаемое не изменится, а первое из $\sqrt{(x+4)^2+y^2}$ превратится в $\sqrt{(4-x)^2+y^2}$.

$(x+4)^2 = x^2+16+8x$, $(4-x)^2 = x^2+16-8x$, при $x > 0$ $(4-x)^2$ будет меньше, значит $\sqrt{(4-x)^2+y^2}$ будет меньше $\sqrt{(4+x)^2+y^2}$. Значит, при замене положительного x на $-x$ выражение становится меньше. Аналогично при замене $y > 0$ на $-y$. Т.к. нам нужно минимальное значение, будем рассматривать только $x \le 0$, $y \le 0$.

$$|x| + 2|y| = 2$$

Раскрываем модули: $x \le 0, y \le 0$
$$-x + 2\cdot(-y) = 2$$
$$x + 2y = -2$$
$$x = -2y - 2$$

Меняем в выражении x на $-2y-2$.
$$\sqrt{(2-2y)^2 + y^2} + \sqrt{4y^2+4+8y+(y+2)^2} =$$
$$= \sqrt{4+4y^2-8y+y^2} + \sqrt{4y^2+4+8y+y^2+4+4y} =$$
$$= \sqrt{5y^2-8y+4} + \sqrt{5y^2+12y+8}.$$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Листик.

~~$\log_3 (\log_2 x) < 0$. При этом $\log_2[x] < \log$~~

Пусть $x \neq 2$. Пусть $2 < x < 3$.

Тогда $1 < \log_2 x < 2 \Rightarrow \log_3(\log_2 x) < 1 \Rightarrow [\log_3(\log_2 x)]^2 = 0$,

$\log_3 [\log_2 x] = 1 \Rightarrow \log_3([\log_2 x]) = 1 \Rightarrow -12\log_3([\log_2 x])=0$

$[x] = 2 \Rightarrow 20\log_3(\log_2[x]) = 20\log_3 1 = 0$

Все слагаемые $0 \Rightarrow 2 < x < 3$ удов. условию

Если $3 \leq x < 8$, то первые два слагаемых равны 0, а третье нет, поэтому эти числа не удовлетворяют условию.

Если $x > 8$, то $[\log_3(\log_2 x)]^2 > 1$, $20\log_3(\log_2[x]) > 20$

Ответ: $2 \leq x < 3$

верно

1. $\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2} = \sin\frac{1}{2} + \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}) =$
$= \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2})$

не доказательства

$\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}) \leq \cos(\frac{3,14}{4} - \frac{1}{2}) = \frac{3,14}{4} \leq \cos\frac{\pi}{12}$

$2\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

$\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}}$

неверное решение

выкладки необоснованы,

$\sqrt{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}} < \frac{40}{29}$

$\sqrt{\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}} \leq \frac{40}{29} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{4}} < \frac{40}{29}$

$\frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{4} \leq \frac{1600}{841}$

Ответ: первое меньше

$\frac{841\sqrt{6} + 1682\sqrt{2}}{3364} \leq \frac{6400}{3364}$

$841\sqrt{6} + 1682\sqrt{2} \leq 6400$

необоснованно

верно

Ответ верный, но решение неверно, т.к. нет ~~нижней~~ оценки левой части чистовик

Производная этого выражения:

$$\frac{5y-4}{\sqrt{5y^2-8y+4}}+\frac{5y+6}{\sqrt{5y^2+12y+8}}$$

Найдём точки экстремума:

$$\frac{4-5y}{\sqrt{5y^2-8y+4}}=\frac{5y+6}{\sqrt{5y^2+12y+8}}$$

$$(4-5y)\sqrt{(5y^2+12y+8)}=(5y+6)\sqrt{(5y^2-8y+4)}$$

$$(16+25y^2-40y)(5y^2+12y+8)=(5y^2-8y+4)(25y^2+36+60y)$$

$$80y^2+192y+128+75y^4+300y^3+200y^2-200y^3-480y^2-320y=$$

$$=75y^4+480y^2+300y^3-200y^3-288y-480y^2+100y^2+144+240y$$

$$80y=-16$$

$$y=-\frac{16}{80}=-\frac{1}{5}.$$

~~При~~ При $y=100$, например, производная положительна, значит, знаки производной:

$$-\quad -\frac{1}{5}\quad +$$

верное решение

Поэтому $y=-\frac{1}{5}$ — точка минимума.

при $y=-\frac{1}{5}$ зн. выражения:

$$\sqrt{5y^2-8y+4}+\sqrt{5y^2+12y+8}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{8}{5}+4}+\sqrt{\frac{1}{5}-\frac{12}{5}+8}=2\sqrt{5{,}8}=2\sqrt{\frac{58}{10}}=\frac{2\sqrt{58}}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{580}}{10}$$

~~Ответ: ...~~

Ответ: $\frac{\sqrt{580}}{5}$

верный ответ

(4) О.Д.З.

$$\begin{cases}\log_2 x>0\\ [\log_2 x]>0\\ \log_2[x]>0\\ [x]>0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ \log_2 x\geq 1\\ [x]>1\\ [x]>0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 2$$

(Чтобы целая часть числа была ~~...~~ больше 0, нужно, чтобы оно было не меньше 1)

~~Пусть $x<8$.~~

~~Тогда ... $\log_3(\log_2 ...)<1 \Rightarrow [\log_3 \log_2 ...]^2=0$~~

~~... Тогда $1\leq[\log_2 x]<2 \Rightarrow$~~

Пусть $x=2$. Тогда $[\log_3(\log_2 2)]^2=0$, $\log_3([\log_2 2])=\log_3 1=0$, $\log_3(\log_2([2])=\log_3 1=0\Rightarrow$ все слагаемые равны $0\Rightarrow$

$\Rightarrow x=2$ — корень уравнения

~~Пусть $x\neq 2$. Если $2<x<4$, то $\log_3([\log_2 x])$~~

$1<\log_2 x<2 \Rightarrow [\log_2 x]=1 \Rightarrow \log_3([\log_2 x]$ ~~...~~ $=1 \Rightarrow \log_3[\log_2 x]=\log_3 1=0\Rightarrow$

$\cancel{75y^4} \cancel{-200y^3} + \overset{20y^2}{\cancel{100y^2}} + 180y^2 - 288y \overset{4 \cdot 64}{} \cancel{+300y^3} \cancel{-480y^2} + 240y =$

$= \cancel{80y^2} + \underset{12}{\cancel{192}}y + 128 + \cancel{75y^4} + \cancel{300y^3} + 200y^2 \cancel{-200y^3} - \cancel{480y^2} - 320y$

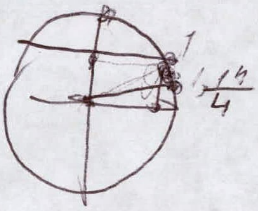
$20y^3$

$80y^2 + 192y + 128 + 75y^4 + 300y^3 + 200y^2 - 200y^3 - 480y^2 - 320y =$

$= 75y^4 - 200y^3 + 100y^2 + 180y^2 - 288y + 144 + 300y^3 - 480y^2 + 240y$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 36 \\ 8 \\ \hline 288 \end{array}$$

$\sqrt{5} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$



Черновик

$\log_3 ([\log_2 x]) \le \frac{21}{12}$

$80y^2+192y+128+300y^3+200y^2-200y^3-480y^2-320y = 180y^2+300y^3-200y^3-288y-\cancel{48}y^2+100y^2+240y+16$

$280y^2+160y = 180y^2+100y^2+240y+16$

$80y = -16$

$[\log_2 x] \le \log_2 [x]$

$\log_2 x - \log_2 [x] < 1$

$x - [x] < 1$

$\log_2 x \ge \log_2 [x]$

$\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$

$\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

$\frac{1}{5} + \frac{8}{5} + 4$

$\frac{40}{29}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}}$ $\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}}$

$\frac{\sqrt{3}+2}{4}$

31-78-60-87
(183.5)

$\log_2([x])$

$\log_2 x - \log_2[x]$

$\sin\frac{1}{2} + \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2})$

$2\sin\frac{\pi}{4}$

$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{5} - \frac{1}{2}$

$\frac{40\sqrt{2}}{29\sqrt{2}}$

$\cos\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

$\frac{20\sqrt{2}}{29}$

$\frac{\sqrt{3}+2}{2}$

$[\log_2 3] \le \log_2(1)$

$\log_3(\log_2 x) > 1$

$\log_3(\log_2 x) > \log_3 3$

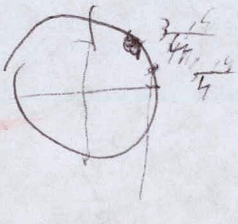
$t^2 - 12t + 20$

$[\log_3 1$

$\log_2 x > \log_2 8$

$\log_2 x < 0$

$\boxed{x > 8}$



$\log_2 x$

$\frac{\sqrt{3}+2}{4}$ $\frac{20\sqrt{2}}{29}$

$\log_3 t < 0$

$[\log_2 x] \le 0$ $[\log_2 x] \le \log_2(1)$ $\frac{40\sqrt{2}}{58}$

$[\log_3(\log_2 x)]^2 - 12\log_3([\log_2 x]) + 20\log_3(\log_2([x]))$ $\frac{80\sqrt{2}}{116}$

$[\log_2 x] > 0$ $(\log_3(\log_2 x)]$ $\frac{29\sqrt{3}+58}{116}$ $\frac{80\sqrt{2}}{116}$

$\log_2 x > 1$

$[x] > 0$

$[\log_2 x]$

$x > 2$

$29\sqrt{3}+58$ $80\sqrt{2}$

$\log_2 x - \log_2[x]$ $29^2 \cdot 3 + 58^2 + 58\sqrt{3}$ 80^2

$\log_2 x > 0$ $\log_2 x - \log_2[x] < 1$

$\log_3[\log_2 x]^2 - 12t$

$x - [x]$

$\log_3 t > \log_3 1$

$1 - 12t$

$[x] > 2$

$\boxed{x > 1}$

$[\log_3(\log_2 x)] - 12\log_3$

$\log_2 x < 1$

$\log_3[\log_2 x]^2 + 8\log_3 2 + 0$

$(\log_2 x] > 0$

$\log_2 x > 1$

$\boxed{x > 2}$

См

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$2\sqrt{58}$

$\sqrt{10}$

$2\sqrt{58}\cdot\sqrt{10}$

290

145

$\sqrt{5y^2-8y+4}+\sqrt{5y^2+12y+45}$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Шифр

ОЛИМПИАДА ПВГ

2016

Черновик.

$1.\ \sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt2}\left(\frac{\sqrt2}{2}\sin\frac12+\frac{\sqrt2}{2}\cos\frac12\right)$

$\sqrt{(x+4)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+2)^2}$

$|x|+2|y|=2$

$x^2+4y^2+4xy=4$

$\sqrt{x^2+16+y^2+8x}+\sqrt{x^2+y^2+4+4y}$

$\sin\frac{1}{2}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\right)$

$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$

$\sqrt2\cos\left(\frac{\pi-2}{4}\right)$

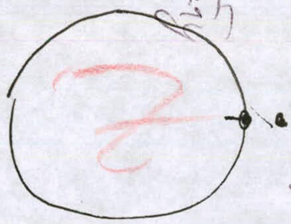
$\frac{20\sqrt2}{29}$

$\sqrt{(x+4)^2+y^2} + \sqrt{(x)^2+(y+2)^2}$

$|x| + 2|y| \le 2$

$x \le 2$

$x^2+9y^2+9xy = 4$



$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{t}$

$\frac{t-3}{3t}$ N

$\frac{t-3}{3t} \cdot N = 1$

$\frac{t-3}{3t} = \frac{1}{N}$

$3t = Nt - 3N$

$N(t-3) = 3t$

$\frac{3t}{t-3}$

$\frac{3t}{t-3} \ge 8$

$3t \ge 8(t-3)$

$3t \ge 8t - 24$

$5t \le 24$

$t \le 4{,}8$

$\cos\frac{\pi}{4}$ $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$

$\frac{90}{29}$

$1\frac{11}{29}$

$x^2+16-8x$

$x^2+16+8x$

$y+2$

$\cos\frac{\pi}{6} = \cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}+1$

$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}}$

$\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$