14-42-49-99
(205.1)

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 6 - 1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы горы

по математике

Матвиец Анастасии Геннадьевны
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата
«27» марта 2016 года

Подпись участника

В соответствии с положением об апелляции прошу пересмотреть мою работу, так как я не согласна с выставленным баллом. За неимением текста работы или точных критериев оценки не имею возможности обозначить вопрос конкретно.

Оценку оставить без изменения.

(Вязьмин В.С.)

75 баллов

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

14-42-49-99
(205.1)

1	2	3	4	5	Σ
+	+	+	+	−	75

Курвиле

Никитан

ЧИСТОВИК

№1

$10^k - 1 = \underbrace{9\ldots9}_{k}$, $\Rightarrow (10^k-1) \vdots 9 \quad \forall k \in Z$

~~abcde~~ $\overline{n_1 n_2 n_3 \ldots n_k} = 10^{k-1}\cdot n_1 + 10^{k-2}\cdot n_2 + \ldots + n_k = (10^{k-1}-1)n_1 + n_1 + (10^{k-2}-1)n_2 + n_2 + \ldots + n_k = (10^{k-1}-1)n_1 + (10^{k-2}-1)n_2 + \ldots + n_1 + n_2 + \ldots + n_k$

$(10^{k-1}-1) \vdots 9$, $\Rightarrow (10^{k-1}-1)n_1 \vdots 9$, $\Rightarrow ((10^{k-1}-1)n_1 + (10^{k-2}-1)n_2 + \ldots) \vdots 9$

тогда остаток от деления на 9 равен остатку от деления суммы цифр числа на 9.

В данном числе n цифр 4 и $n+17$ цифр 5,

т.е. сумма цифр числа $n(4+5)+17\cdot5 = 9n+17\cdot5 = 9n+85 = 9n+81+4 = 9(n+9)+4$, $\Rightarrow$ искомый остаток 4

Ответ: 4

верно.

№2

$x + \log_2 x - \log_3 x + \log_4 x - 7 = \left(\frac{3}{4} - \log_3\sqrt{2}\right)\cdot\log_2 49$ ОДЗ: $x>0$

$x - 7 + \log_2 x - \log_3 x + 0,5\log_2 x = 1,5\log_2 7 - \log_2 7\cdot\log_3 2$

$x-7+1,5\log_2 x - \log_3 x = 1,5\log_2 7 - \frac{\log_2 7}{\log_2 3}$

$x-7 = 1,5\log_2 7 - 1,5\log_2 x - \log_3 7 + \log_3 x$

$x-7 = 1,5\log_2\frac{7}{x} + \log_3\frac{x}{7}$

$x-7 = -1,5\log_2\frac{x}{7} + \log_3\frac{x}{7} \iff x-7 = \frac{-1,5\log_2\frac{x}{7}\cdot\log_2 3 + \log_2\frac{x}{7}}{\log_2 3}$

$x-7 = \frac{\log_2\frac{x}{7}(1-1,5\log_2 3)}{\log_2 3}$

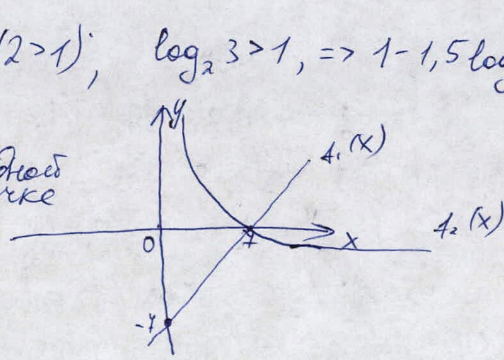
Рассмотрим $f_1(x)=x-7$ – график-прямая; $f_1(x)\nearrow \ \forall x>0$ (ОДЗ)

$f_2(x) = \frac{\log_2\frac{x}{7}(1-1,5\log_2 3)}{\log_2 3}$

график - экспонента, $\log_2\frac{x}{7} \nearrow (2>1)$; $\log_2 3>1$, $\Rightarrow 1-1,5\log_2 3<0$

$\Rightarrow f_2(x)\searrow \ \forall x>0$

$\begin{cases} f_1(x)\nearrow \forall x\in ОДЗ \\ f_2(x)\searrow \forall x\in ОДЗ \end{cases} \Rightarrow f_1(x)=f_2(x)$ в одной точке



$x=7$

$f_1(7)=0$ $f_2(7)=0$

$f_1(7)=f_2(7)$

Ответ: 7.

верно.

Чистовик

№5

$$\begin{cases}(4x^3-3x)^{15}=1-(4y^3-3y)^{16}\\ x^2=1-y^2\end{cases}$$

Найти: кол-во решений.

$x\in[-1;1]$
$y\in[-1;1]$

$$\begin{cases}(4y^3-3y)^{16}=1-(4x^3-3x)^{15}\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

1) $x^2+y^2=1$ – окр. с центром $O(0;0)$ и $r=1$

2) $(4y^3-3y)^{16}\geq 0$, $\Rightarrow 1-(4x^3-3x)^{15}\geq 0$

$(4x^3-3x)^{15}\leq 1$; $(4x^3-3x)^{15}$ – нечётная, $\Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^3-3x\leq 1$, $\Rightarrow 4x^3-3x-1\leq 0$

МИ: $4x^3-3x-1=0$

$-1:\pm1$ $x=1$; схема Горнера:

	4	0	-3	-1
1	4	4	1	0

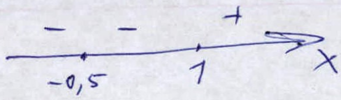
$\Rightarrow x=1$ – корень

$(x-1)(4x^2+4x+1)=0$

$(x-1)(2x+1)^2=0$

$2x+1=0$

$x=-0,5$



$x\in(-\infty;1]$

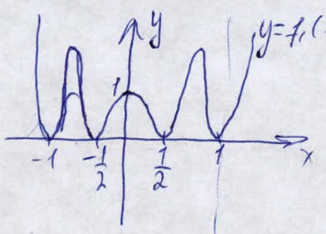
$$\begin{cases}(4x^3-3x)^{15}=1-(4y^3-3y)^{16}\\ y^2=1-x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(4x^3-3x)^{15}=1-\sqrt{1-x^2}^{16}(1-4x^2)^{16}\\ y^2=1-x^2\end{cases}$$

$$(4x^3-3x)^{15}=1-(1-x^2)^8(1-4x^2)^{16}$$

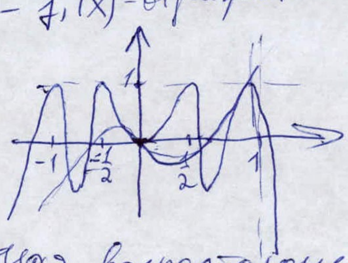
Рассмотрим $f_1(x)=(1-x^2)^8(1-4x^2)^{16} \Leftrightarrow f_1(x)=(1-x)^4(1+x)^4(1-2x)^8(1+2x)^8$

она имеет 4 нуля: ±1 и $\pm\frac{1}{2}$, для $p(x)=f_1(x)$ это кратные 4 и 8 корни.

тогда ~~это~~ $f_1(x)$ имеет вид



$1-f_1(x)$ – отражена отн. Ox и поднята на 1 по Oy



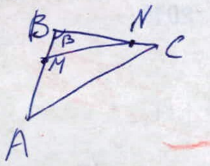
$f_2(x)=(4x^3-3x)^{15}$ – нечётная, возрастающая ф-ция · неверно

~~$f_2(x)$~~ $\Rightarrow f_2(x)=1-f_1(x)$ при $x=0$. $y^2=1-x^2$, $y=\pm1$

$f_2(x)=(x(4x^2-3))^{15}$, тогда $x=0$ и $x=\pm\frac{\sqrt3}{2}$ – нули ф-ции

Чистовик

№3



Дано:
$\triangle ABC$

$M \in AB: \frac{AM}{MB} = \frac{3}{1}$

$N \in CB: \frac{CN}{NB} = \frac{1}{7}$

Найти: $\frac{S(\triangle MBN)}{S(AMNC)} \cdot 100\%$ — ?

Решение:
$\angle MBN = \beta$

1) $S(\triangle MBN) = \frac{1}{2} BM \cdot BN \cdot \sin\beta$

$\left.\begin{array}{l} S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\beta \\ AB = 4BM \\ BC = \frac{8}{7} BN \end{array}\right\} \Rightarrow S(\triangle ABC) = \frac{16}{7} BM \cdot BN \cdot \sin\beta = \frac{32}{7} S(\triangle MBN), \Rightarrow$

$\Rightarrow S(\triangle MBN) = \frac{7}{32} S(\triangle ABC)$ см

2) $S(\triangle ABC) = S(\triangle MBN) + S(AMNC), \Rightarrow S(AMNC) = \frac{32}{32} S(\triangle ABC) - \frac{7}{32} S(\triangle ABC) = \frac{25}{32} S_{\triangle ABC}$

тогда $\frac{S(\triangle MBN)}{S(AMNC)} = \frac{\frac{7}{32} S_\triangle(ABC)}{\frac{25}{32} S(\triangle ABC)} = \frac{7}{25} = 28\% / 100\%$

Ответ: 28 верно.

№4

$(\sqrt{2}\sin 3x + \sqrt{2+\cos 3x})(2\cos(\sqrt{2}\arcsin x) - 1) = 0$ ОДЗ: $x \in [-1; 1]$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin 3x + \sqrt{2+\cos 3x} = 0 \\ 2\cos(\sqrt{2}\arcsin x) - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{2}\sin 3x = \sqrt{2+\cos 3x} \\ 2\cos(\sqrt{2}\arcsin x) = 1 \end{array}\right.$

1) $-\sqrt{2}\sin 3x = \sqrt{2+\cos 3x}$ $\quad \left\{\begin{array}{l} -\sqrt{2}\sin 3x \geq 0 \\ x \in [-1; 1] \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [-1; 0]$

$2\sin^2 3x = 2 + \cos 3x$

$2 - 2\sin^2 3x + \cos 3x = 0$ $\quad \left[\begin{array}{l} \cos 3x = 0 \\ \cos 3x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 3x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 3x = \pm\frac{3\pi}{2} + 2\pi n \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} n \\ x = \pm\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} n \end{array}\right. \quad n \in \mathbb{Z}$

$2\cos^2 3x + \cos 3x = 0$

неверно решено уравнение $\cos 3x = -\frac{1}{2}$.

$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} n_1 \\ x = \pm\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} n_2 \end{array}\right. \\ x \in [-1; 0] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} n_1 \leq 0 \\ -1 \leq \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} n_2 \leq 0 \\ -1 \leq -\frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{3} n_2 \leq 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} n_1 = -1 \\ n_2 = -1 \end{array}\right. \quad x_1 = -\frac{\pi}{6}, \; x_2 = -\frac{\pi}{6} \quad x = -\frac{\pi}{6}$

2) $2\cos(\sqrt{2}\arcsin x) = 1 \Leftrightarrow \cos(\sqrt{2}\arcsin x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(\sqrt{2}\arcsin x) = \cos(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n)$

$\sqrt{2}\arcsin x \in [-\frac{\pi\cdot\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi\cdot\sqrt{2}}{2}] \Rightarrow \sqrt{2}\arcsin x = \pm\frac{\pi}{3}$; $\arcsin x = \pm\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$

$x = \sin(\pm\frac{\sqrt{2}\pi}{6}) \Leftrightarrow x = \pm\sin\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$

Ответ: $\pm\sin(\frac{\sqrt{2}\pi}{6})$; $-\frac{\pi}{6}$;

допущена арифметическая ошибка, потерян корень $-\frac{2\pi}{9}$.

ЧЕРНОВИК

56 172
65: 127 180
90 37 171 90
162
171

4...
n-чётно

5....
n+17

$10^5 k =$ $10^5 - 1$

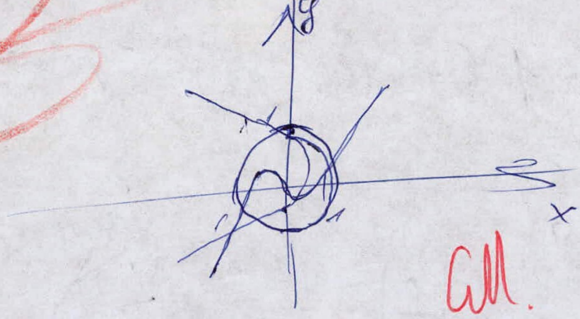
$(10^5-1)k + (10^4 - 1)k + (10$

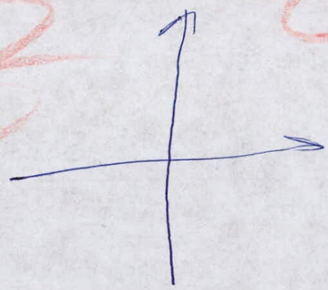
$4x^2 - 3x$ поприз и.дел.

$17 \cdot 5 = 85$

4

$x^2 + y^2 = 1$ - окр, ц(0; 0) и R = 1





см.

$(4x^3 - 3x)^{15} = 1 - (4y^3 - 3y)^{16}$

$1 - (4y^3 - 3y) \le 1$

$(x(4x^2 - 3))^{15}$

$-(-y(4y^2-3))^{16}$

1,62
0,52 · 1,41
0,7

$4x^2 = 3$

$x^2 = \frac{3}{4}$

$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$4y^3 - 3y - 1 = 0$

$y = 1$

	4	0	-3	-1
1	4	4	1	0

$(4y^2 + 4y - 1)(y-1) = 4y^3 + 4y^2 - y - 4y^2 - 4y + 1$

$f(x) = f(y)$

$4y^3 - 3y - 1$

$(4y^2 + 4y + 1)(y-1) = 4y^3 + 4y^2 + y - 4y^2 - 4y - 1$

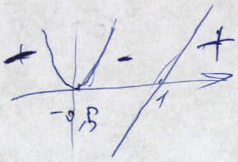
$y < 1$

$4y^2 + 4y + 1 = 0$

$1 - y = (4y(4y^2-3))^{16}$ ~~16 - 16~~ $(2y+1)^2$ $y = -0,5$

$\sqrt[16]{16y}$ $= y(4y^2 - 3)$

см.



$(4x^3 - 3x)^{15} \le 1$

$((2x+1)^2(x-1))^{15} \le 1$

~~$(2x+1)^2(x-1)$~~

$4x^3 - 3x \le 1$

$(2x+1)^2(x-1) \le 0$

$x \ge 1$

черновик

$x^2+y^2=1$ – окр ц. $(0;0)$ $r=1$

$(x;y)$ – реш.

$x^2=1-y^2$

$(x(4x^2-3))^{15}=1-(4y^3-3y)^{16}$

$\left(\sqrt{1-y^2}\,(1-y^2)\right)^{15}=1-(y(4y^2-3))^{16}$

$\sqrt{1-y^2}^{\,15}\,(1-y^2)^{15}=1-y^{16}(4y^2-3)^{16}$

$(4y^3-3y)^{16}=1-(4x^3-3x)^{15}$

$1-(4x^3-3x)^{15}\geq0$

$4x^3-3x\leq1$

$\frac{\sqrt{3}}{2}^3-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$-\sqrt{3}=1-(4y^3-3y)^{16}$

$1+\sqrt{3}=4y^3-3y$

$-4+3$

$-1=1$

$y=0$

$y(4y^2-3$

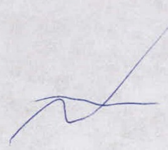
$4-4x^2-3$

0,5

$4\cdot0{,}125-1{,}5$

$0{,}5-1{,}5$

-1



$f_1(x)'=\left((1-x^2)^8(1-4x^2)^{16}\right)'$

$-8(1-x^2)^7\cdot2x\cdot(1-4x)^{16}-8x\cdot16(1-4x)^{15}(1-x^2)^8$

$(1-x^2)^7(1-4x^2)^{15}$

$(-16x(1-4x^2)-128x(1-x^2)$

$(1-x^2)^7(1-4x^2)^{15}$

$-16x-128x+64x^3+128x^3$

$192x^3$ 144

$16x$ 12 9

$48x(4x^3-3)$

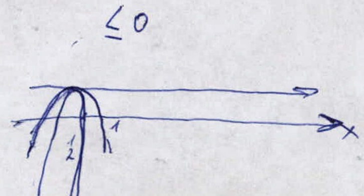
144

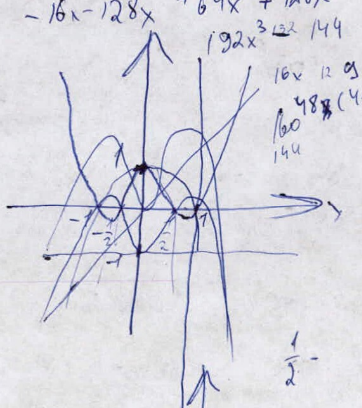
$(4x^3-3x)^{15}=1-\sqrt{1-x^2}^{\,16}(1-4x^2)^{16}$

$(x(4x^2-3))^{15}=1-(1-x^2)^8(1-4x^2)^{16}$

≥0 ≤0

≥1

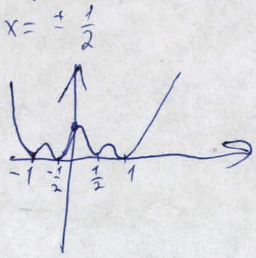




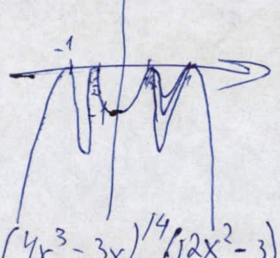
$x\in[-1;-\frac{1}{2}]$

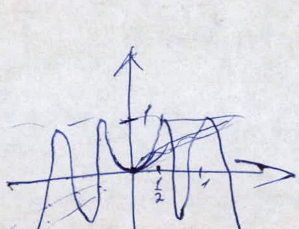
$x=\pm1$

$x=\pm\frac{1}{2}$



$\frac{1}{2}$





$4_1(x)$

$15(4x^3-3x)^{14}(12x^2-3)$

$45(4x$

Черновик

$x>0$

$x-7+\log_2 x-\log_3 x+\frac{1}{2}\log_4 x=\frac{3}{2}\log_2 7-\log_2 7\cdot\log_3 2$

$x-7+1{,}5\log_2 x-1{,}5\log_2 7-\log_3 x+\log_3 2\cdot\log_2 7=0$

$+6=\log_3 2\cdot\log_2 7 \quad 6=\frac{\log_2 7}{\log_2 3} \quad 6=\log_3 7 \quad \log_3 7$

$x=7$

$x-7+1{,}5\log_2\frac{x}{7}-\log_3\frac{x}{7}=0$

$x-7+ \quad 1{,}5\log_2\frac{x}{7}-\log_3\frac{x}{7} \quad 1{,}5\lg\frac{x}{7}-\frac{\lg\frac{x}{7}}{\lg 3}$

$x-7$

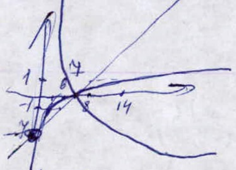
$\frac{\lg\frac{x}{7}(1{,}5\lg_3-1)}{\lg 3}$

$1{,}5\log_2\frac{x}{7}-\log_3\frac{x}{7}$

$1{,}5\log_2\frac{x}{7}-\frac{\log_2\frac{x}{7}}{\log_2 3}=-\frac{\log_2\frac{x}{7}(1{,}5\log_2 3-1)}{\log_2 3}$

$x-7=$

$\log_2\frac{x}{7}$



$y'=1$

Ш $x\in[-1,1]$

$\begin{cases}\sin 3x\le 0\\ x\in[-1;1]\end{cases} \Rightarrow x\in[-1;0]$ (т.к. синус [illegible])

$(\sqrt{2}\sin 3x+\sqrt{2+\cos 3x})(2\cos(\sqrt{2}\arcsin x)-1)=0$

$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x$

$-\sqrt{2}\sin 3x=+\sqrt{2+\cos 3x}$ $\quad -2(1-\sin^2 3x)$

$\frac{3\pi}{6} \quad -\frac{4\pi}{6}$

$2\sin^2 3x-\cancel{2}=2+\cos 3x$

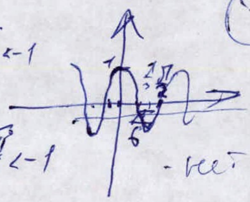
$-\cos 3x(2\cos 3x+1)$

$-2\cos^2 3x-\cos 3x=0$

$(-\frac{\pi}{6})$

$\begin{cases}\cos 3x=0\\ \cos 3x=-\frac{1}{2}\\ x\in[-1;0]\end{cases}$ $\begin{cases}3x=\frac{\pi}{2}+\pi n\\ 3x=\pm\frac{3\pi}{2}+2\pi n\\ x\in[-1;0]\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n\\ x=\pm\frac{3\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}n\\ x\in[-1;0]\end{cases}$

$-\frac{\pi}{6}<-1 \quad -\frac{3\pi}{2}<-1$



$-\frac{3\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}$

- нет реш

$2\cos(\sqrt{2}\arcsin x)-1=0$

$\sqrt{2}\arcsin x=\pm\frac{\pi}{3}+\cancel{2\pi n}$ $\quad 3\pi$

$2\cos(\sqrt{2}\arcsin x)=1$

$\cos(\sqrt{2}\arcsin x)=\frac{1}{2}$

$\arcsin x=\pm\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$

$x=\pm\sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{6}\right)$

Ш

$-\frac{\pi}{6}$

ЧЕРНОВИК

5) I) $x^2+y^2=1$ – окружность с центром $O(0;0)$
и $R=1$ $\quad x\in[-1;1]$, $y\in[-1;1]$

II) ~~$4x^3$~~ $\quad 1-(4y^3-3y)^{16}\le 1$

~~т.в.~~ $\Rightarrow$

$(4y^3-3y)^{16}\ge 0$

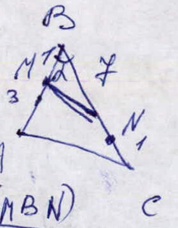
Тогда $(4x^3-3x)^{15}\le 1$, всегда $(4x^3-3x)^{15}>1$ решений нет

М.И. $(4x^3-3x)^{15}=1$

$4x^3-3x-1=0$

$x=1$

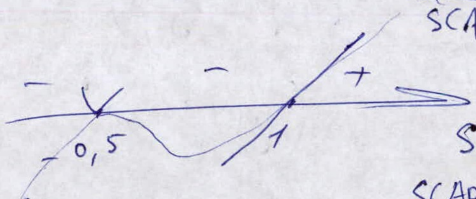
	4	0	−3	−1
1	4	4	1	0



$\frac{S(MBN)}{S(AMNC)}$

$(x-1)(4x^2+4x+1)=0$

$(x-1)(2x+1)^2=0$



$x\le 1$

$S(MBN)=\frac{1}{2}BM\cdot BN\cdot\sin\alpha$

$S(ABC)=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\alpha$

$=\frac{1}{2}\cdot 4BM\cdot 8BN\cdot\sin\alpha$

$=16BM$

~~Но для $x^2=Ay^2$ $x\in[-1;1]$~~

тогда единственное решение при $x=1$

~~тогда~~

$x+\log_2 x-\log_3 x+\log_4 x-7=\left(\frac{3}{4}-\log_7\sqrt{4}\right)/\log_7 49$

$\log_2 2^7+\frac{\log_2 x}{\cancel{\log_2 4}}=\frac{\log_2 x}{\log_2 3}+\frac{\log_2 x}{2}-\log_2 2^7=\frac{3}{2}\log_2 7-\log_2 7\cdot\log_3 2$

$x+\log_2 x-\frac{\log_2 x}{\log_2 3}+\frac{\log_2 x}{2}-\log_2 2^7=\frac{3}{2}\log_2 7-\frac{\log_2 7}{\log_2 3}$

$x-7+1{,}5\log_2 x-\log_3 x+\log_3 7-1{,}5\log_2 7=0$

$1{,}5\log_2\frac{x}{7}-\log_3\frac{x}{7}+x-7=0$

$x^2=1-y^2$ $\qquad \begin{cases}x^2=0\\1-y^2=0\end{cases}$ $\qquad x=0$, $y=\pm 1$