34-66-39-59
(181.1)

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 172

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников покори воробьёвы горы

по математике

Тимохина Максима Юрьевича

фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Смена ручки согласована с экзаменатором [illegible]
Выход 11:52-11.54 [illegible]

Дата

«22» марта 2016 года

Подпись участника [illegible]

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Бабин Курганов

65 (шестьдесят пять)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

Чистовик.

1.

~~$\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\sin\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{1}{2}\right)=$~~

~~$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$~~

~~$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\leq 1 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\leq\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}.$~~

~~Сравним $\frac{26}{19}$ и $\sqrt{2}$. Обе части больше 0, поэтому возведение~~

2. верно

Примем длину круга за 1. Пусть более медленный водитель проезжает круг за k минут. Тогда $k>3$; $k\in Z$. Быстрый едет со скоростью $\frac{1}{3}$, а медленный со скоростью $\frac{1}{k}$. Тогда ~~второй~~ скорость сближения водителей равна $\frac{1}{3}-\frac{1}{k}=\frac{k-3}{3k}$. Значит первый проезжает на 1 круг больше второго за $1:\left(\frac{k-3}{3k}\right)=\frac{3k}{k-3}$ минут. Тогда $\frac{3k}{k-3}\in Z$; $\frac{3k}{k-3}>7$.

~~...~~ $k>3 \Rightarrow k-3>0$, значит можем домножить обе части на $k-3$.

$3k>7k-21$.

$\begin{cases}4k<21\\k>3\\k\in Z\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=4\\k=5\end{array}\right.$ Если $k=5$, то $\frac{3k}{k-3}=7{,}5$ и не является целым.

Если $k=4$, то $\frac{3k}{k-3}=12$ и всё хорошо.

Ответ: 12 минут.

3.

~~Пусть $\sqrt{(x-3)^2+y^2}=r_1$; а $\sqrt{x^2+(y+6)^2}=r_2$. Тогда $r_1\geq 0$; $r_2\geq 0$.~~

~~$\begin{cases}x^2+(y+6)^2=r_2^2\\(x-3)^2+y^2=r_1^2\end{cases}$ Множество точек, удовлетворяющих первому выражению — окружность с центром в точке $(0;-6)$ и радиусом r_2, а мн-во точек, удовл. второму выражению — окружность с центром в точке $(3;0)$ и радиусом r_1.~~

~~М-во точек удовлетворяющих $2|x|+|y|=4$ — ~~это~~ граница ромба с вершинами ~~(0;2); (4;0)~~ (2;0); (0;4); (-2;0); (0;-4). Нас интересует минимальная сумма r_1+r_2, при которой обе окружности пересекают ромб.~~

дешифр

3. верно листовик.

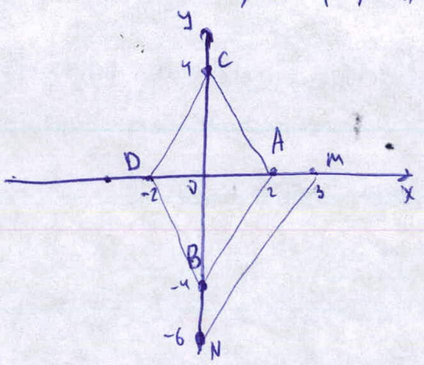
Мн-во точек, задаваемых выражением $2|x|+|y|=4$ — граница ромба с вершинами $(2;0)$; $(0;4)$; $(-2;0)$; $(0;-4)$.

$\sqrt{(x-3)^2+y^2}$ — расстояние от точки $(x;y)$ до точки $(3;0)$.

$\sqrt{x^2+(y+6)^2}$ — расстояние от точки $(x;y)$ до точки $(0;-6)$.

Нас интересует такая точка на ромбе, что сумма расстояний от неё до точек $(3;0)$ и $(0;-6)$ минимальна.

Пусть $A=(2;0)$; $B=(0;-4)$; $M=(3;0)$; $N=(0;-6)$; $(0;4)=C$; $(-2;0)=D$.



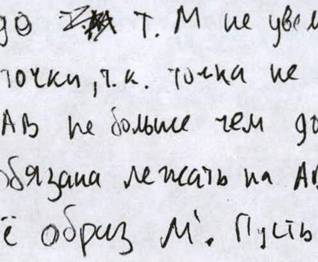
~~Очевидно, что искомая точка лежит на отрезке AB, т.к. расстояние от любой точки на AC до M больше AM (т.к. ∠CAM > 90°), до N больше AN (т.к. ∠NAC > ∠BAC > 90°). Расстояние от любой на BD до N больше BN, до M больше~~

Покажем, что искомая точка лежит на AB. Предположим, она лежит на AC или CD. Рассмотрим её образ при симметрии отн. Ox. Тогда расстояние от неё до т. M не изменилось (т.к. $M \in O_x$), а расстояние до т. N не увеличилось, т.к. и точка и образ лежат выше N (т.к. на сторонах ромба), но образ лежит не выше точки, т.к. точка не ниже O_x. Тогда сумма расстояний до образа не больше чем до точки.

смена чернил согласована с дежурным [illegible] /Доянов/

Значит, можем считать, что точка на BD или AB. Предположим, она на BD. Отразим её отн. O_y. Расстояние до N не изменилось, т.к. $N \in O_y$, а расстояние до т. M не увеличилось, т.к. точка и образ левее M, но образ не левее точки, т.к. точка не правее O_y. Тогда сумма расстояний до образа, лежащего на AB не больше чем до точки. Поэтому точка с наименьшей суммой расстояний обязана лежать на AB. Покажем, как её найти. Отразим M отн. AB. Пусть её образ M'. Пусть есть т. $X \in AB$. Тогда $MX = M'X \Rightarrow MX+NX = M'X+NX \le M'N$

Величина M'N достигается только когда X — т. пересечения M'N и AB. Тогда, если M'N



пересекает AB, точка пересечения — искомая. Обозначим её за O. $\angle M'OB = \angle NOA$. ~~$\angle M'OB = \angle MOB$~~ $\Rightarrow$ ~~$\angle MOB = \angle NOA$~~

$\angle MOB = \angle M'OB$, т.к. M и M' симметричны отн. AB.

Значит AB — биссектриса внешнего угла $\triangle MON$. Но заметим, что $\frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$, а значит AB и MN параллельны. В $\triangle MON$ биссектриса внешнего угла параллельна стороне, а значит $MO = ON$. (И наоборот, если $MO=ON$, то AB — бисс. внешнего угла). Найдём на AB такую точку. Пусть её координаты $(x_0; y_0)$.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

34-66-39-59
(181.1)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

Чистовик.

$$\begin{cases} y_0 = 2x_0 - 4 & \text{– условие принадлежности } AB \\ (x_0-3)^2 + y_0^2 = x_0^2 + (y_0+6)^2 & \text{– условие равенства } MO \text{ и } NO. \end{cases}$$

$$\cancel{x_0^2} - 6x_0 + 9 + \cancel{y_0^2} = \cancel{x_0^2} + \cancel{y_0^2} + 12y_0 + 36$$

$$\begin{cases} y_0 = 2x_0 - 4 \\ -4y_0 - 2x_0 = 9 \end{cases} \Rightarrow -4y_0 - y_0 - 4 = 9 \Rightarrow y_0 = -\frac{13}{5}$$

$$x_0 = \frac{y_0+4}{2} = \frac{7}{10}.$$

$\left(\frac{7}{10}; -\frac{13}{5}\right)$ лежит на отрезке AB, т.к. $x_0 > 0$; $y_0 < 0$.

Найдём значение суммы.

$$\sqrt{(x_0-3)^2+y_0^2} + \sqrt{x_0^2+(y_0+6)^2} = \sqrt{\left(\frac{23}{10}\right)^2 + \left(\frac{13}{5}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{7}{10}\right)^2 + \left(\frac{17}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{23^2+26^2}}{10} + \frac{\sqrt{7^2+34^2}}{10} =$$

$$= \cancel{\frac{\sqrt{1156}+\sqrt{1156}}{10}} = \frac{\sqrt{1205}+\sqrt{1205}}{10} = \frac{\sqrt{1205}}{5} = \sqrt{\frac{241}{5}}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{241}{5}}$

1. верно

$0 < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{1}{2} > 0;\ \cos\frac{1}{2} > 0.$

$\frac{26}{19} \vee \sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2}$ т.к. обе части больше 0, возведение в квадрат – равносильное преобразование.

$\frac{676}{361} \vee \sin^2\frac{1}{2} + \cos^2\frac{1}{2} + 2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}.$

$\frac{676}{361} \vee 1 + \sin 1.$ ~~$\sin 1 > 0 \Rightarrow$ обе части больше 0 $\Rightarrow$ возведение в кв. – равнос. преобр.~~

$\frac{315}{361} \vee \sin 1.$ ~~$\sin 1$~~ $0 < 1 < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin 1 < \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\frac{315}{361} \vee \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$630 \vee 361\sqrt{3}.$ обе части больше 0 $\Rightarrow$ возведение в кв. – равнос. преобр.

$396900 \vee 130321 \cdot 3.$

$396900 > 390963 \Rightarrow \left(\frac{26}{19}\right)^2 > 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} > 1 + \sin 1 = \left(\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{26}{19} > \sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2}.$

Ответ: $\frac{26}{19} > \left(\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2}\right)$

4.

$$[\log_3(\log_2 x)]^2 - 10\log_3([\log_2 x]) + 21\log_3(\log_2[x])) = 0$$

Нет строгого рассмотрение всех случаев $x \geq 2$

$\log_2[x] > 0 \Rightarrow [x] > 1. \Rightarrow x \geq 2$

~~Третье~~ Будем постепенно увеличивать x. Третье слагаемое изменяется когда x достигает целого числа, второе – когда x достигает степени 2. ~~~~ Первое – когда x достигает 2^{3^k}. При $x = 2$ они равны. При увеличении x третье слагаемое будет увеличиваться чаще и быстрее чем второе $\Rightarrow$ при $x > 2$. сумма последних двух

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

слагаемых больше 0. Первое тоже больше 0. Поэтому единственное решение возможно при $x = 2$. Тогда все 3 слагаемые равны 0 и равенство верно.

Ответ: $\{2\}$ Ответ неверный

дашиф

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

34-66-39-59
(181.1)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

Черновик.

$\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2} = \sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\right) \vee \frac{26}{19}$

$\sin a < a$

$\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

26×26: 156, 52, 676

19×19: 171, 19, 361

722

$y = 2x - 4$

$676 - 361 = 315$

$\frac{13}{3}$

$\sin\frac{1}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$

$4 - \frac{13}{5} = \frac{20-13}{5} =$

$\frac{\pi}{2} < \frac{26}{19}$

$\pi < \frac{52}{19}$

$2x - 6$

$\frac{1}{2}x + 2{,}25$

$\frac{1}{3}$ $\quad \frac{1}{k}$ $\quad \frac{25}{6}$ $\quad \frac{13}{3}$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{k} = \frac{k-3}{3k}$

$\frac{3k}{k-3} > 7$

$\frac{12}{1}$

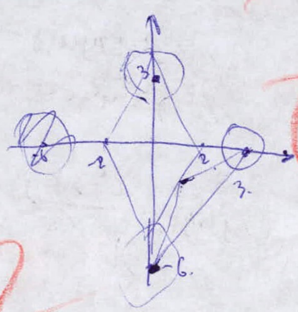
$3k > 7k - 21$

$4k < 21$

$\left[\begin{array}{l} k = 4 \\ k = 5 \end{array}\right.$

$6 - \frac{13}{5} = \frac{30-13}{5}$

$2{,}3 =$



$\frac{676}{361}$

$1 + 2 = 3$

$\frac{630}{361} \vee \sqrt{3}$

$1 + 2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} = 1 + \sin 1 < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{10\pi}{24} = \frac{5}{12}\pi$

35×35

$\frac{2+\sqrt{3}}{2} \vee \frac{26}{19}$

x^2

$38 + 19\sqrt{3} \vee 52$

$19\sqrt{3} \vee 14$

$1352 - 722 = 630$

361×361: 361, 2166, 1083, 130321; $\times 3$: 390963

34×34: 136, 102, 1156; $+ 49$: 1205

36×36: 216, 108, 1296

23×23: 69, 46, 529

26×26: 156, 52, 676; $+ 529$: 1205

$\frac{\sqrt{1205}}{5}$

63×63: 189, 378, 396900

$1205 : 5 = 241$

$241 : 7 = 3$

$241 : 13 = 1$

$\sin < \frac{2+\sqrt{3}}{2} \vee \frac{676}{361}$

$361\sqrt{3} \vee 630$

$722 + 361\sqrt{3} \vee 1352$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

$a^2-10a+21a = a^2+11a$

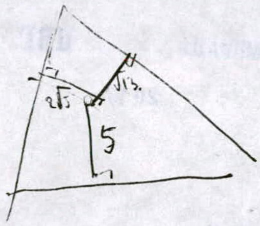
$a=0$

$a=-11.$

$\cancel{\log_3}\ \log_2 x = 3^{-11}$

$\left[\begin{array}{l} x = 2^{3^{-11}} \\ x = 1. \end{array}\right.$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ



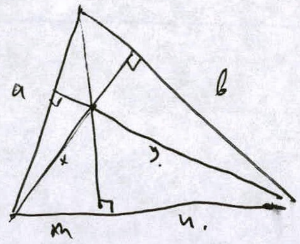
$$2h^2 + a^2 + b^2 = x^2$$

$$2h^2 = x^2 - a^2 - b^2 = -2ab\cos(\pi - \alpha) = 2ab\cos\alpha$$

$$h = \sqrt{ab\cos\alpha}$$

$$\log_3 \left(\frac{\log_2^{21}[x]}{[\log_2 x]^{10}} \right)$$

$$\log_3 \left(\frac{\log_2^{21}[x]}{[\log_2 x]^{10}} \right)$$



$$m + n = c$$
$$m^2 - n^2 = a^2 - b^2$$
$$(m - n) = \frac{a^2 - b^2}{c}$$
$$m = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$$
$$n = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2c}$$

$$x^2 - y^2 = a^2 - b^2$$
$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$
$$a^2 + b^2 - x^2 - y^2 = 2\cos\alpha(xy + ab)$$

$$y = \frac{n}{\cos(90 - \beta)} = \frac{n}{\sin\beta}$$

$$\sin\beta = \frac{b\sin\gamma}{c}$$
$$\sin\alpha = \frac{a\sin\gamma}{c}$$

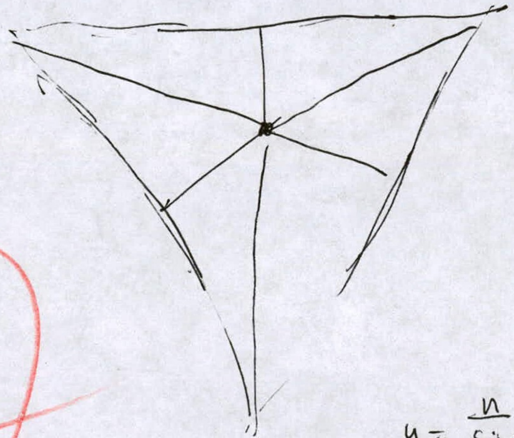
$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\gamma = c^2$$
$$x^2 - y^2 = a^2 - b^2$$

$$xy = \frac{mn}{\sin\beta\sin\alpha} =$$

$$xy\cos\gamma = \frac{c^2 - x^2 - y^2}{2}$$

$$= \frac{(c^2 - (a^2 - b^2))(c^2 + (a^2 - b^2))}{4\cancel{c^2} \cdot \frac{ab\sin^2\gamma}{\cancel{c^2}}} = \frac{c^4 - (a^2 - b^2)^2}{4ab\sin^2\gamma}$$

$$[\log_2 x]^{10} = 3^x \cdot \log_2^{21}[x]$$



$$x^2 + y^2 = a^2$$
$$x^2 + z^2 = b^2$$
$$y^2 + z^2 = c^2$$

$$2x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2$$
$$x^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

$$y = \frac{n}{\sin\beta} = \frac{(c^2 - a^2 + b^2)\cancel{c}}{2\cancel{c} \cdot b\sin\gamma} = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b\sin\gamma}$$