23-56-34-37
(115.1)

Олимпиада ВБ1
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

город Уфа

Вариант 3-2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьевы горы"

по математике

Ахметовой Рины Наилевны

фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата

«13» марта 2016 года

Подпись участника

Чистовик

75 семьдесят пять

Кру (Вязьмин)

1	2	3	4	5	
+	+	±	∓	~~±~~ ±	Гиб

№1. (+)

$\underbrace{8x^2}_{\text{чётное}} + y^3 = \underbrace{2016}_{\text{чётное}}$; $x, y \in \mathbb{N}$; все x, y - ?

АМ (Торшина)

$\Rightarrow y^3$ - чётное $\Rightarrow y$ - чётное.

$x^2 + \frac{y^3}{8} = 252 \Rightarrow \underbrace{x^2}_{\text{целое}} + \left(\frac{y}{2}\right)^3 = \underbrace{252}_{\text{целое}}$

$\Rightarrow \left(\frac{y}{2}\right)^3$ - целое $\Rightarrow y \vdots 2 \Rightarrow y \in [2; 252]$.

1) $252 = \left(\frac{2}{2}\right)^3 + 251 = 1 + 251 =$ | 251 не явл. квадратом натур. числа |.

2) $252 = \left(\frac{4}{2}\right)^3 + 244 = 8 + 244 =$ | 244 не □ нат. ч. |

3) $252 = \left(\frac{6}{2}\right)^3 + 225 = 27 + 225 = 3^3 + 15^2 \Rightarrow y = 6; x = 15$

4) $252 = \left(\frac{8}{2}\right)^3 + \ldots = 64 + 188 =$ | 188 не явл. □-ом нат. числа |

5) $252 = \left(\frac{10}{2}\right)^3 + \ldots = 125 + 127 =$ | 127 не явл. □-ом нат. числа |

6) $252 = \left(\frac{12}{2}\right)^3 + \ldots = 216 + 36 = 6^3 + 6^2 \Rightarrow y = 12; x = 6$.

7) $252 = \left(\frac{14}{2}\right)^3 + \ldots =$ | $7^3 > 252$ |

Значит, все пары таких натур. чисел

Черновик

$8x^2 + y^3 = 2016$, $x, y \in N$, все x, y - ?

чет, чет

$2016 = 1 + 2015$ нечет

нужны все четные кубы

$2016 = 2^3 + 2008$ $\vdots 8$ =

$= y^3 +$

$$\begin{array}{r|l} 2008 & 8 \\ -16 & \hline 40 & 251 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2016 & 8 \\ -16 & \hline 41 & 252 \\ -40 & \\ 16 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 252 & 9 \\ -18 & \hline 72 & 28 \end{array}$$

$2016 \vdots 8 \Rightarrow 252 \cdot 8 = 2016$

$= 28 \cdot 9 \cdot 8 = 7 \cdot 4 \cdot 3^2 \cdot 8$

$\underset{\text{целое}}{x^2} + \underset{\text{целое}}{\frac{y^3}{8}} = \underset{\text{целое}}{252}$ $\quad \left(\frac{y}{2}\right)^3$;

$130 - 13 = 117$

1) $\begin{array}{r|l} 251 & 7 \\ -21 & \hline 41 & 3 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r|l} 251 & 13 \\ -13 & \hline 121 & 1 \end{array}$ $\quad 10^2 < 251 < 20^2$; 100, 400

$1^2 = 1$

$11^2 = 121$; 19^2

$\begin{array}{r|l} 251 & 19 \\ -19 & \hline 61 & 1 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 244 & 12 \\ -24 & \hline 04 & 2 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r|l} 244 & 18 \\ -18 & \hline 64 & 1 \end{array}$

2) $10^2 < 244 < 20^2$ $\times$ 12

3) $\begin{array}{r} 252 \\ -27 \\ \hline 225 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 252 \\ -64 \\ \hline 188 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 25 \\ \times 5 \\ \hline 125 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 252 \\ -125 \\ \hline 127 \end{array}$

$\begin{array}{r} 36 \\ \times 6 \\ \hline 216 \end{array}$ $\quad 6 \cdot 6 \cdot 6 =$ $\quad 36 + 180 = 216$ $\quad \begin{array}{r} 252 \\ -216 \\ \hline 36 \end{array}$

$\begin{array}{r} 49 \\ \times 7 \\ \hline 343 \end{array}$ $\quad (a^x)' = a^x \ln a$ $\quad 188$; $\quad \begin{array}{r|l} 127 & \\ \hline \end{array}$ $\quad 121 = 11^2$ $\quad 12^2 = 144$ $\quad 169 = 13^2$

$e^x = e^x \ln e$

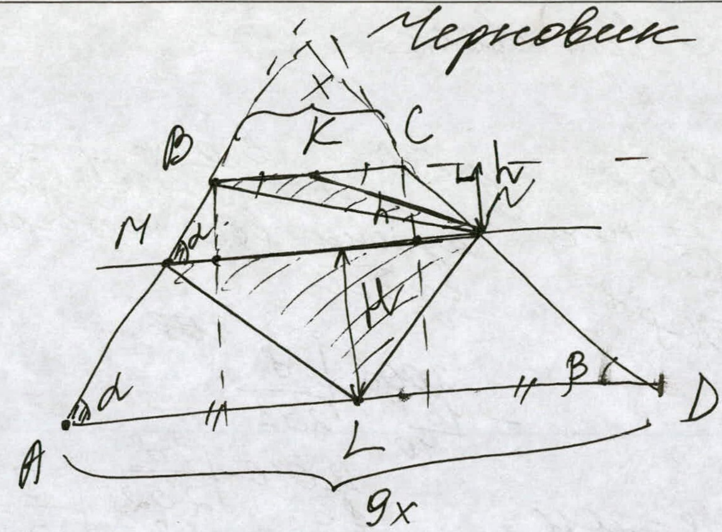
№2

$\begin{array}{r|l} 58806 & 242 \\ -484 & \hline 1040 & 243 \\ -968 & \\ \hline 726 & \\ -726 & \\ \hline 0 & \end{array}$ $\quad a^x = a^x \ln a$ $\quad \begin{array}{r} 242 \\ \times 4 \\ \hline 968 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 242 \\ \times 3 \\ \hline 726 \end{array}$

$\cancel{125} < 243 <$

$3^5 = 9 \cdot 9 \cdot 3 = 81 \cdot 3 = \begin{array}{r} 243 \\ \times 3 \\ \hline 729 \end{array}$

Черновик



$AD = 9 \cdot \overset{x}{BC} = 9x$

$BC \parallel MN \parallel AD$

$\frac{AM}{MB} = ?$

$S_{BKN} + S_{MNL}$

$S_{BKN} = \frac{1}{2} \cdot \overset{=const}{BK} \cdot h$; $h = ?$ $h = \underline{MB} \sin\alpha$

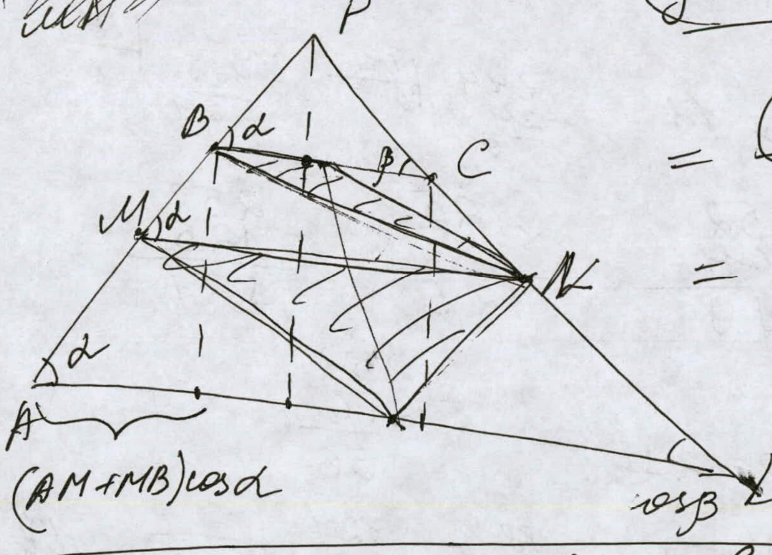
$H = ?$ $H = MA \sin\alpha$

$MN = ?$

$S_{MNL} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot H$;

$MN = BC + BM\cos\alpha +$

$\frac{(y^2+t^2+2yt)+8yt}{y+t}$



$= \frac{(t+y)^2+8yt}{y+t} =$

$= (t+y)$

Чистовик (№ 3)

$\varphi\left(\frac{t}{y}\right) = \frac{yt}{\underset{const}{y+t}} \Rightarrow Max\ y \cdot t$; $t = (AB - y)$

$\Rightarrow \varphi(y) = y(AB-y) = ABy - y^2 = const \cdot y - y^2$

$\varphi'(y) = const - 2y$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик

№1 (продолж.)

то $(x=15;\ y=6)$ и $(x=6;\ y=12)$.

Ответ: $(15;6)$, $(6;12)$.

Решение верное

№2 +

b_n - геом. пр.;

$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=242$;

$b_6+b_7+b_8+b_9+b_{10}=58806$;

$S_6=b_1+\ldots+b_6=?$

Решение: $S_6=\frac{b_1(1-q^6)}{1-q} \Rightarrow b_1=?,\ q=?$

$$\begin{cases} S_5=\frac{b_1(1-q^5)}{1-q}=242 \Rightarrow \frac{1-q^5}{1-q}=\frac{242}{b_1} \\ b_6+\ldots+b_{10}=S_{10}-S_5=\frac{b_1(1-q^{10})}{1-q}-\frac{b_1(1-q^5)}{1-q}=58806 \end{cases}$$

1) $58806=\frac{\cancel{b_1}-b_1\cdot q^{10}-\cancel{b_1}+b_1\cdot q^5}{1-q}=\frac{b_1\cdot q^5-b_1\cdot q^{10}}{1-q}=$

$=\frac{b_1\cdot q^5(1-q^5)}{1-q}=\cancel{b_1}\cdot q^5\cdot\frac{242}{\cancel{b_1}}=242\cdot q^5$

$\Rightarrow q^5=\frac{58806}{242}=243 \Rightarrow q=\sqrt[5]{243}=3$

2) $S_5=\frac{b_1(q^5-1)}{q-1}=\frac{b_1(243-1)}{3-1}=\frac{b_1\cdot 242}{2} \Rightarrow$

$121 b_1=242 \Rightarrow b_1=2.$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Чистовик

№2 (продолж.)

3) $S_6 = \frac{b_1(q^6-1)}{q-1} = \frac{2(243\cdot 3-1)}{3-1} = \frac{\cancel{2}(729-1)}{\cancel{2}} =$

$= 728.$

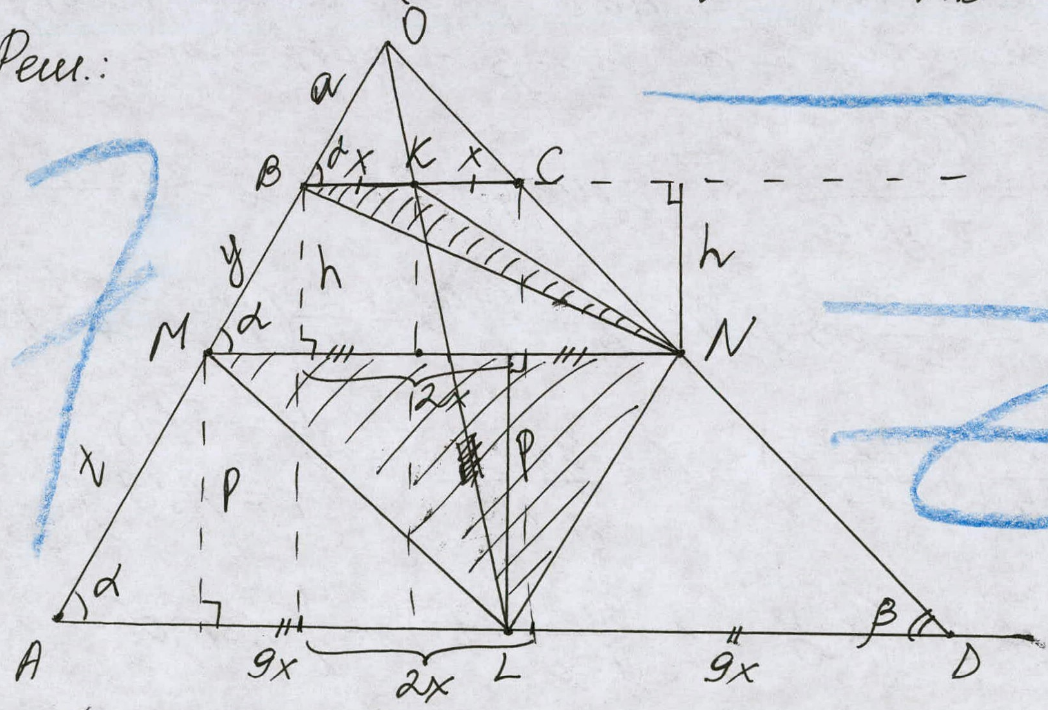
Ответ: 728.

Решено верно

№3 1

Дано: ABCD – трапеция, BC и AD – осн., K и L – серед. BC и AD соотв., $AD = 9\cdot BC$, $MN \parallel BC \parallel AD$, $(S_{BKN} + S_{MNL})^{max}$; $\frac{AM}{MB}$ – ?

Реш.:



Пусть $BC = 2x$, тогда $AD = 9\cdot 2x = 18x$.

Пусть h – высота $\triangle BKN$, $h \perp BC$, $h \perp MN$.

Пусть p – высота $\triangle MNL$, $p \perp MN$, $p \perp AD$.

$S_{BKN} = \frac{1}{2}\cdot BK\cdot h \Rightarrow h = ?$

$S_{MNL} = \frac{1}{2}\cdot MN\cdot p \Rightarrow p = ?,\ MN = ?$

Черновик

$$\cos^3 x + \sin^3 x + 3\sin x\cos x(\sin x+\cos x) - \overset{\sin 2x}{2\sin x\cos x}(\sin x + \cos x)$$

$$(\sin x+\cos x)^3 - 2\cos x(1-\cos^2 x) - 2\sin x(1-\sin^2 x)$$

$$-2\cos x + 2\cos^3 x - 2\sin x + 2\sin^3 x$$

$$\cancel{\cos^3 x} + \cancel{\sin^3 x} + \sin^2 x\cos x + \sin x\cos^2 x$$

$$(1-\cos^2 x)\cos x + (1-\sin^2 x)\sin x$$

$$\cos x - \cancel{\cos^3 x} + \sin x - \cancel{\sin^3 x}$$

$\Rightarrow$ cosx e sinx

$$4x^2+4x+10 = 2(2x^2+2x+5)$$

$$D = 4 - 4\cdot 2\cdot 5$$

$$\cancel{4}(\underbrace{(2x)^2}_{=t} + 2\cdot 2x\cdot 1 + 1) + 9 = (2x+1)^2+9$$

$$\frac{3(2x+1)}{(2x+1)^2+9} \Rightarrow \frac{3t}{t^2+9}$$

$$b \le 9^{\frac{3t}{t^2+9}} < a$$

$$\begin{cases} b \le 9^{\frac{3t}{t^2+9}} > 0 \\ 9^{\frac{3t}{t^2+9}} > 0 < a \end{cases}$$

$\Rightarrow \cancel{b>0}$

$\Rightarrow \boxed{b \le 0}$, ~~когда~~ $\forall x$ $\qquad 81 \times 9$

$\Rightarrow a > 0$

$$\sqrt[t^2+9]{9^{3t}} \Rightarrow \sqrt[t^2+9]{(81\cdot 9)^t} = \sqrt[t^2+9]{729^t}$$ убывающ.

$$f(x) = (9^3)^{\frac{t}{t^2+9}}$$

$$\sqrt[t^2+9]{(9^3)^t} \qquad \sqrt[4]{2^3}$$

$$\sqrt[100]{8} \Rightarrow 1 \qquad \sqrt[4]{8}$$

Чистовик

№5 (продолж.)

$$f'_t = \underbrace{(9^3)^{\frac{t}{t^2+9}}}_{>0} \cdot \underbrace{\log_e (9^3)}_{>0} \cdot \frac{t(3-t)(3+t)}{(t^2+9)^3}$$

t		-3		0		3	
f'	+	0	−	0	+	0	−
f	↗	max	↘	min	↗	max	↘

Значит, ф-ия $f(t)$ принимает свое наибольш. и наименьш. значения в т. 0 и ±3. (в какой-то из них).

$$f(-3) = (9^3)^{\frac{-3}{9+9}} = 9^{\frac{-9}{18}} = 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

$$f(3) = 9^{\frac{3\cdot 3}{9+9}} = 9^{\frac{9}{18}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

⇒ Наиб. значение $f(t)$ это 3.

⇒ $\underline{a > 3}$.

$$f(0) = 9^{\frac{3\cdot 0}{0+9}} = 9^0 = 1$$

⇒ Наим. значение $f(t)$ это 1.

⇒ $\underline{b \leq 1}$.

Ответ: $a \in (3; \infty)$, $b \in (-\infty; -1]$

Чистовик

№ 3 (продолж.)

Пусть $\angle A = \alpha$; $MN \parallel AD \Rightarrow \angle BMN = \alpha$ (как соответственные)

$\Rightarrow h = BM \sin\alpha$; $p = MA \sin\alpha$.

$BK = x = const$; $\sin\alpha = const$.

$MN(BM, MA) = ?$ $\frac{AM}{MB} = \frac{t}{y}$

$S_{MNL} + S_{BKN} = \frac{1}{2} KB \cdot BM \sin\alpha + \frac{1}{2} MN \cdot AM \sin\alpha =$

$= \frac{1}{2}\sin\alpha (x \cdot MB + MN \cdot AM)$

$\triangle BOC \sim \triangle MON \sim \triangle AOD$ (по 3-ем $\angle$-ам, $\angle O$ - общий, $\angle\alpha$ и $\angle\beta$ - соотв. при парал. прямых).

$\Rightarrow \frac{\cancel{x}}{a} = \frac{9\cancel{x}}{t+y+a} \Rightarrow t+y+\cancel{a} = 9a^{-a} \Rightarrow a = \frac{t+y}{8}$

$\frac{MN}{y+a} = \frac{BC}{a} \Rightarrow MN = \frac{BC(y+a)}{a} = \frac{2x}{a}\left(y + \frac{t+y}{8}\right) =$

$= 2\frac{\cancel{8}x}{t+y}\left(\frac{9y+t}{\cancel{8}}\right) = 2 \cdot x \cdot \frac{9y+t}{y+t}$ $\left(\begin{matrix} y = BM, \\ t = AM \end{matrix}\right)$.

$\sum = \frac{1}{2}\sin\alpha\left(x \cdot y + x \cdot \frac{9y+t}{y+t} \cdot t\right) = \frac{1}{2} x \sin\alpha \cdot$

$\cdot \left(y^{|y+t} + \frac{9y+t}{y+t} \cdot t\right) = \underbrace{\frac{1}{2} x \sin\alpha}_{const}\left(\frac{y^2 + yt + 9yt + t^2}{(y+t)}\right)$

Т.е. все зависит от $f(y, t) = \frac{y^2 + t^2 + 10yt}{y+t}$

$= \frac{(y+t)^2 + 8yt}{y+t} = (y+t) + \frac{8yt}{y+t} = const + 8 \cdot \frac{1}{\frac{1}{t} + \frac{1}{y}}$ и?

$\varphi(y) = \frac{8y(AB - y)}{AB} = \frac{8 \cdot AB \cdot y - 8y^2}{AB}$; $\overset{const}{\cancel{8AB}} - 16y \Rightarrow$

Ответ: не окончено.

23-56-34-37
(115.1)

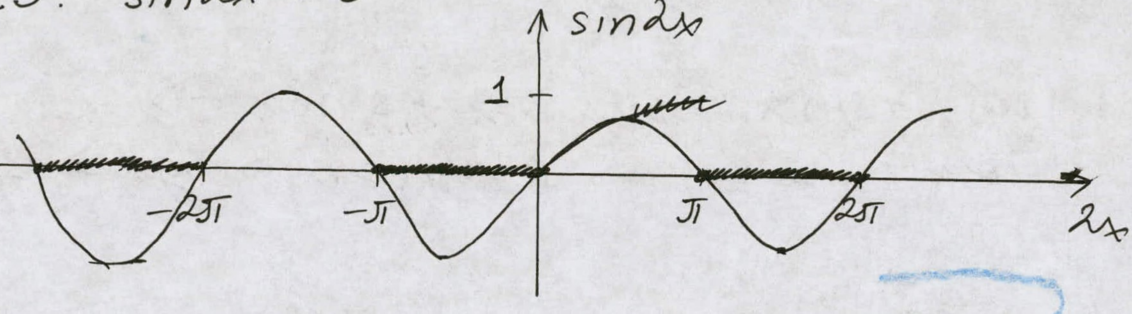
Чистовик

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

№ 4

$\cos^3 x + (\sin x + \cos x)\sin x \cos x + \sin^3 x < \sqrt{-\sin 2x}$

ОДЗ: $\sin 2x \leq 0$



$\Rightarrow 2x \in [2\pi n - \pi; 2\pi n], \ n \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow x \in [\pi n - \frac{\pi}{2}, \pi n], \ n \in \mathbb{Z}$

$\cos^3 x + \sin^3 x + (1-\cos^2 x)\cos x + (1-\sin^2 x)\sin x <$
$< \sqrt{-\sin 2x}$.

$\cancel{\cos^3 x} + \cancel{\sin^3 x} + \cos x - \cancel{\cos^3 x} + \sin x - \cancel{\sin^3 x} < \sqrt{-\sin 2x}$

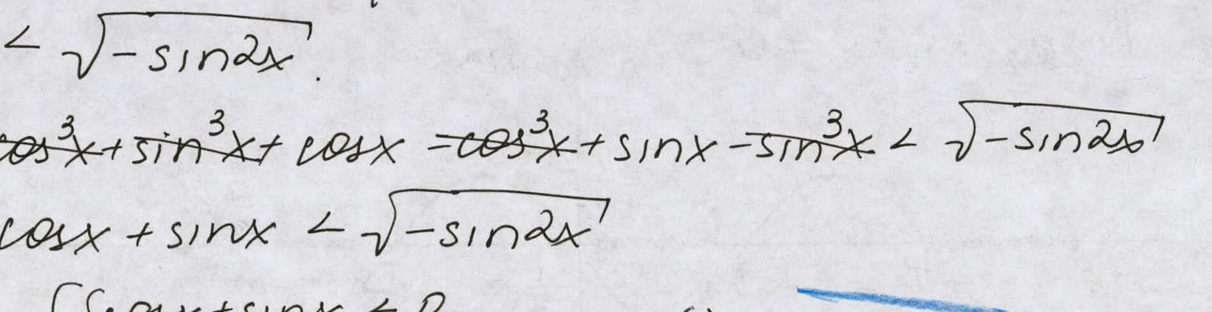
$\cos x + \sin x < \sqrt{-\sin 2x}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x + \sin x < 0 \\ \text{ОДЗ} \end{cases} \quad (\text{I}) \\ \begin{cases} (\cos x + \sin x)^2 < -\sin 2x \\ \text{ОДЗ} \\ \cos x + \sin x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II}) \end{array}\right.$$

нельзя!

1) $\cos x + \sin x < 0 \ / : \cos x \Rightarrow 1 + \operatorname{tg} x < 0$

$\operatorname{tg} x < -1$



Чистовик.

№ 5 (продолж.)

Тогда:

$$b \le 9^{\frac{3t}{t^2+9}} < a$$

$9 > 0 \Rightarrow 9^{\frac{3t}{t^2+9}} > 0$ (по св-ву показательных функций).

$$\Rightarrow \begin{cases} (9^3)^{\frac{t}{t^2+9}} \ge b \Rightarrow \text{Если } b \le 0, \text{ то верно } \forall t \Rightarrow \forall x. \\ (9^3)^{\frac{t}{t^2+9}} < a \end{cases}$$

Пусть $f(t) = (9^3)^{\frac{t}{t^2+9}}$

$$f'_t = \frac{t'(t^2+9) - (t^2+9)'t}{(t^2+9)^2} =$$

$$= \frac{t^2+9-2t^2}{(t^2+9)^2} = \frac{9-t^2}{(t^2+9)^2} =$$

$$= \frac{(3-t)(3+t)}{(t^2+9)^2}$$

Неверное выраж. для f'_t

$$f'_t = (9^3)^{\frac{t}{t^2+9}} \cdot \log_e (9^3)^{\frac{t}{t^2+9}} \cdot \left(\frac{t}{t^2+9}\right)' =$$

$$= (9^3)^{\frac{t}{t^2+9}} \cdot \frac{t}{t^2+9} \cdot \log_e 9^3 \cdot \frac{t^2+9-(t^2+9)'t}{(t^2+9)^2} =$$

$$= (9^3)^{\frac{t}{t^2+9}} \cdot \log_e (9^3) \cdot \frac{t}{t^2+9} \cdot \frac{(3-t)(3+t)}{(t^2+9)^2}$$

Чистовик

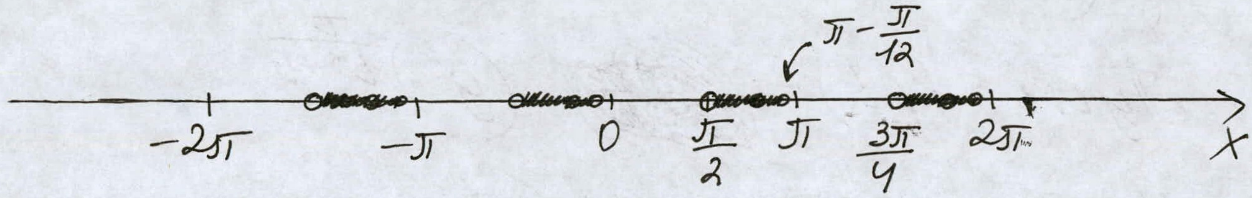
№ 4 (продолж.)

$x \in \left(\pi n - \frac{5\pi}{12}; \pi n - \frac{\pi}{12}\right), n \in Z.$

Из графика видно, что подходят

$x \in \left[\pi n - \frac{\pi}{4}; \pi n - \frac{\pi}{12}\right), n \in Z.$

3) $\left[\begin{array}{l} x \in \left(\pi n - \frac{\pi}{2}; \pi n - \frac{\pi}{4}\right) \\ x \in \left[\pi n - \frac{\pi}{4}; \pi n - \frac{\pi}{12}\right) \end{array}\right., n \in Z$



$\Rightarrow x \in \left(\pi n - \frac{\pi}{2}; \pi n - \frac{\pi}{12}\right), n \in Z.$

Ответ: $\left(\pi n - \frac{\pi}{2}; \pi n - \frac{\pi}{12}\right), n \in Z.$

№ 5. +

$b \leq 9^{\frac{6x+3}{4x^2+4x+10}} < a$

верно $\forall x$; $a, b = ?$

Решение: $\frac{6x+3}{4x^2+4x+10} = \frac{3(2x+1)}{(2x)^2+4x+1+9} =$

$= \frac{3(2x+1)}{(2x+1)^2+9}$. Пусть $2x+1 = t$.

Чистовик

№4 (продолж.)

Из графика видно, что подходит

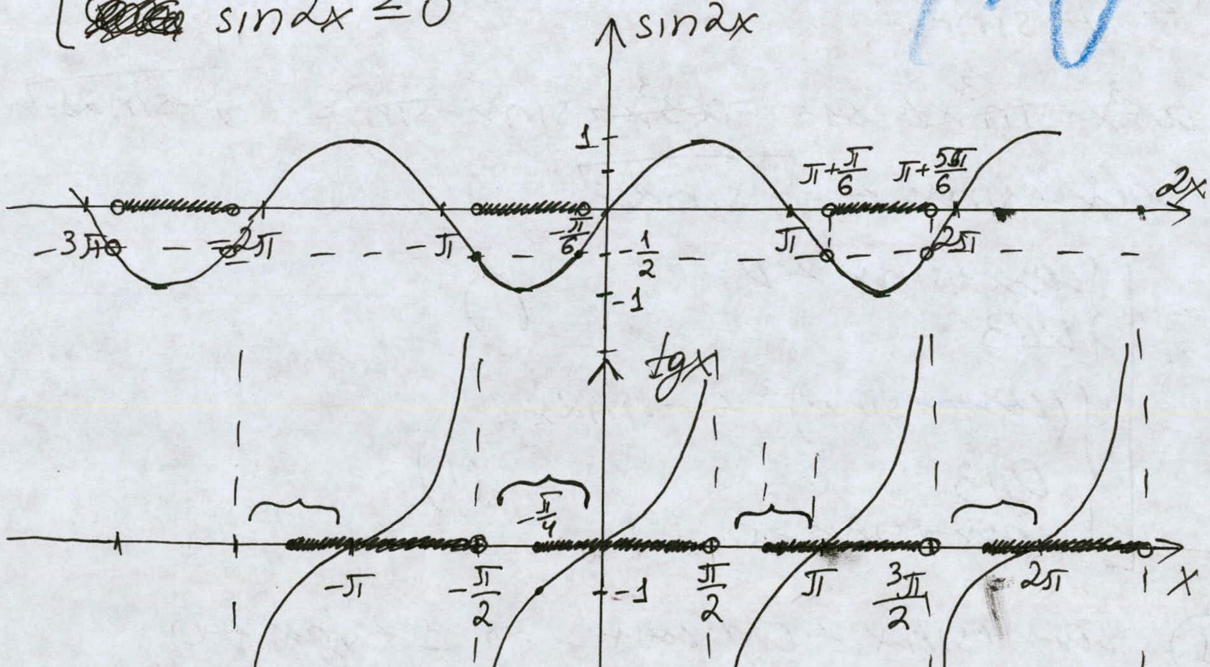
$x \in \left(\pi n - \frac{\pi}{2}; \pi n - \frac{\pi}{4}\right), n \in Z$

2) $\begin{cases} \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \sin 2x < 0 \\ \cos x + \sin x \geq 0 \Rightarrow 1 + tgx \geq 0 \Rightarrow tgx \geq -1 \\ ОДЗ \end{cases}$

$1 + \sin 2x + \sin 2x < 0$

$2\sin 2x < -1 \Rightarrow \sin 2x < -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2x < -\frac{1}{2} \\ tg x \geq -1 \\ \sin 2x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x < -\frac{1}{2} \\ tg x \geq -1 \end{cases}$



$\Rightarrow 2x \in \left(2\pi n \underbrace{-\pi + \frac{\pi}{6}}_{-\frac{5\pi}{6}}; 2\pi n - \frac{\pi}{6}\right), n \in Z$

$2x \in \left(2\pi n - \frac{5\pi}{6}; 2\pi n - \frac{\pi}{6}\right), n \in Z$