Олимпиада ПВГ
2016

90-14-51-22
(114.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 3-1 город Уфа

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы Горы

по математике

Захарова Вадима Павловича

фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

+ 1 лист

Дата

«13» март 2016 года

Подпись участника

90-14-51-22 (114.1)

Чистовик

Лист 1 из 6

Олимпиада ПВГ 2016

1	2	3	4	5
+	+	∓	±	±

75

Смородина Вещуб (Вещунок)

№ 5.

$b < 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} \leq a$

оценим $\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}$

$\frac{2x-1}{(2x-1)^2+4}$ пусть $2x-1=b$

$\frac{b}{b+4}$

$f(b)=\frac{b}{b^2+4}$

$f(b)=\min$, при $b=-2$

$f(-2)=\frac{-2}{8}=-\frac{1}{4}$

$f(b)=\max$, при $b=2$

НЕОБОСНОВАНО

$f(2)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

тогда:

$16^{-\frac{1}{4}} \leq 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} \leq 16^{\frac{1}{4}}$

$\frac{1}{2} \leq 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} \leq 2$

тогда из исходного нер-ва:

$b<\frac{1}{2}$; $a \geq 2$

Ответ: при $a \in [2;+\infty)$;

при $b \in (-\infty;\frac{1}{2})$.

±

№2. Черновик.

$a+aq+\ldots+aq^4=93$

$aq^5+\ldots+aq^9=2976$

$a(1+q+q^2+q^3+q^4)=93$

$aq^5(1+q+q^2+q^3+q^4)=2976$

$q^5=\frac{2976}{93}=32$

$q=2$

$2976 : 93 = 32$; 279; 186

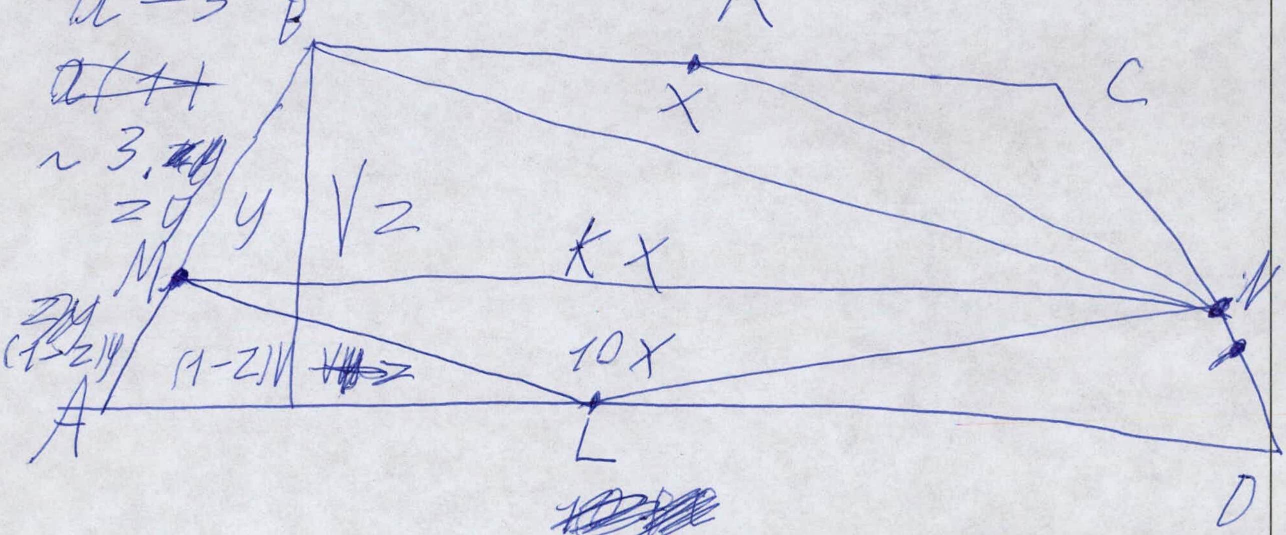
$a(1+2+4+8+16)=93$

$a\cdot 31=93$

$a=3$

~~a(1+1~~

№3.



$S_{MNL}=\frac{1}{2}kx\cdot Vz$

~~SBK1~~

$S_{BKN}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x\cdot V$

$\frac{2y}{y}=$

$S_5=\frac{1}{2}xV(k\cancel{z}+\frac{1}{2})$

Черновик.

$$16^{\frac{2x-1}{(2x-1)^2+4}} = 16^{-\frac{(2x-1)^2+4}{(2x-1)}} =$$

$$\cancel{16^{-2x+1-\frac{4}{2x-1}}}$$

$$-b-\frac{4}{b} = -\frac{b+4}{b}$$

$$16^{\frac{b}{b^2+4}} \ne b$$

$$\cancel{0 < \frac{b}{b^2+4} < 1}$$

$$\lim_{b\to\pm\infty} \frac{b}{b^2+4} = 0$$

$$\cancel{\lim_{b\to -0} \frac{b}{b^2+4}}$$

$$-\frac{1}{4} < \frac{b}{b^2+4} < \frac{1}{4}$$

$$b < \frac{1}{16}$$

$$a \geq 16$$

$$16^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} = \frac{1}{2}$$

$$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt{16} = 2$$

$$\frac{1}{16} \quad \frac{b^2+4}{b}$$

$$b+\frac{4}{b}$$

$$\frac{2,5}{0,25+4}$$

$$\frac{1,5}{2,25+4}$$

Чистовик   лист 2 из 6

№ 2.

$a+aq+aq^2+aq^3+aq^4=93$

$a\cdot(1+q+q^2+q^3+q^4)=93 \quad (1)$

$\cancel{a+}\ a\cdot q^5+\ldots+a\cdot q^9=2976$

$aq^5(1+q+q^2+q^3+q^4)=2976 \quad (2)$

разделим (2) на (1):

$q^5=\frac{2976}{93}=32$

$q=2$

из (1):

$a\cdot(1+2+4+8+16)=93$

$a\cdot 31=93$

$a=3$

$(a+aq+aq^2+aq^3+aq^4)+aq^5+aq^6=$

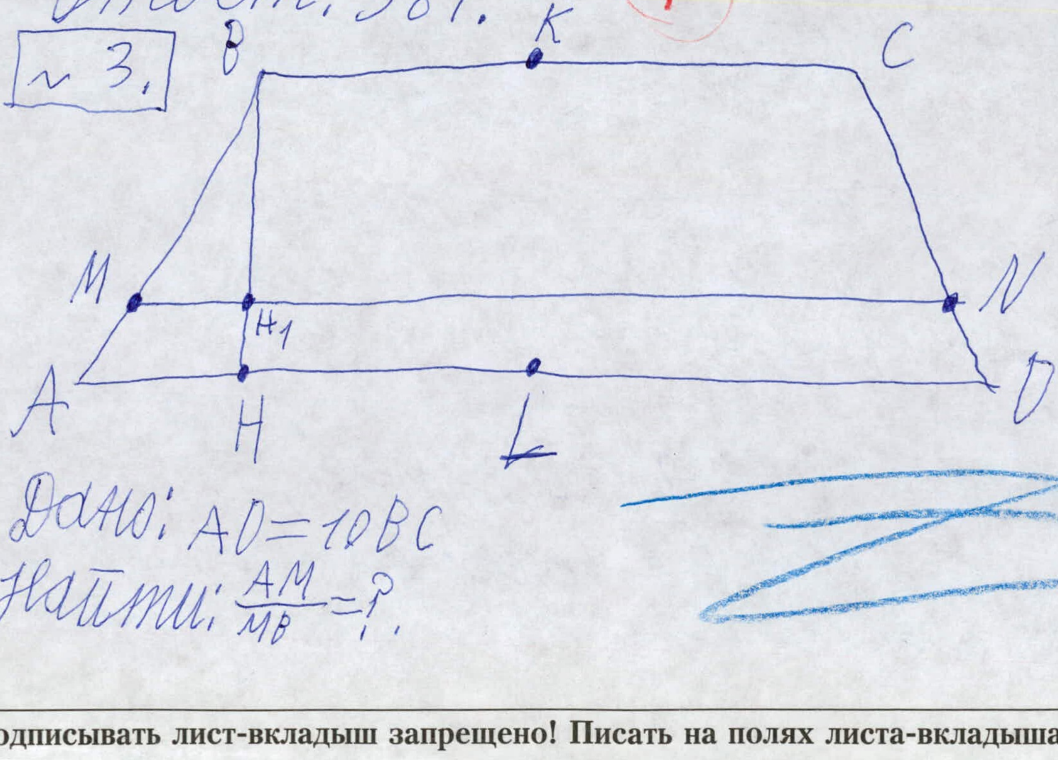
$=93+3\cdot 32+3\cdot 64=93+96+192=$

$=189+192=381$

Задача решена верно

Ответ: 381.   +

№ 3.



Дано: $AD=10BC$

Найти: $\frac{AM}{MB}=?$

Чистовик

лист 3
$\frac{4}{6}$

$\boxed{№ 3}$ (продолжение)

Решение: пусть:
$BH = h$; а $BH_1 = z \cdot h$, тогда $H_1H = (1-z)h$;
$AB = y$; $BC = x$; а $MN = kx$.
Тогда:

$S_{BKN} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} x \cdot z h$

Зависимость S_{BKN} от искомого соотн. найдена верно (см *)

$S_{MNL} = \frac{1}{2} \cdot kx \cdot (1-z)h$

$S_{BKN} + S_{MNL} = \frac{1}{2} xh \left(\frac{1}{2} z + k \cdot (1-z)\right)$

Т. к. x и h — основание и высота, т.е. фиксированные величины, то $S_{BKN} + S_{MNL}$ будет max, при ~~макс~~ максимальном $\frac{1}{2} z + k \cdot (1-z)$ (*)

трапеция $BMNC \sim$ трапеции $BADC$, т.к. $MN \parallel AD$, тогда:

НЕВЕРНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ

$\frac{BM}{BA} = \frac{MN}{AD}$ (0)

~~т.к.~~ $\Delta BMH_1 \sim \Delta BAH$, т. к. $MH_1 \parallel AH$, тогда:

* $\frac{BM}{BA} = \frac{BH_1}{BH} = \frac{zh}{h}$ (1)

подставим (1) в (0):

$\frac{zh}{h} = \frac{MN}{AD}$

$z = \frac{kx}{10x}$; $z = \frac{k}{10}$ (2)

(2) в (*)

$\frac{k}{20} + k \cdot \frac{10-k}{10} = \frac{k}{20} + k - 0{,}1k^2$

№ 4, Черновик

$\sqrt{2\sin x\cos x} > (\cos^{2} x-\sin x)^3+2\cos^2 x\sin x-$
$-2\sin^2 x \cdot \cos x$

$\sqrt{2\sin x\cos x} > (\cos x-\sin x)^3+2\sin x\cos x\cdot$
$\cdot(\cos x-\sin x)$

$\cancel{\cos x-\sin x=a}$
$\cancel{\sqrt{2\sin x\cos x}=b>0}$
$\cancel{b > a^3+a\cdot b^2}$
$\cancel{b > a(a^2+b^2)}$

$\cancel{\cos x-\sin x=a}$
$2\sin x\cos x=b\geq 0$

$\sqrt{b} > a^3+ab$

$\cancel{\sqrt{b} > a(a^2+b)}$
≥ 0 ≥ 0

$\sqrt{\sin 2x} > (\cos x-\sin x)((\cos x-\sin x)^2+\sin 2x)$

$\sqrt{\sin 2x} > (\cos x-\sin x)(\cos^2 x+\sin^2 x-\sin 2x+\sin 2x)$

$\sqrt{\sin 2x} > \cos x-\sin x$

$\sin x+\sqrt{\sin 2x}-\cos x>0$

$\sin x^2+\sin 2x+\cos^2 x-\sin 2x-2\sqrt{\sin 2x}\cos x+$
$+2\sin x\sqrt{\sin 2x}>0$

$1+2\sqrt{\sin 2x}(\sin x-\cos x)>0$

Черновик:

№1. $(x-y)^3=(x^2-2xy+y^2)(x-y)=$

$x^3+2y^2=2016$ $=x^3-2x^2y+xy^2-x^2y+2xy^2-$

$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

$12 \times 12 = 144$

144×12: $288 + 144 = 1728$

14×14: $56 + 14 = 196$

196×14: $784 + 196 = 2744$

144×14: $576 + 144 = 2016$

> 2016

2016

36×36: $216 + 108 = 1296$

2592

$x^3=-486$

34×34: $136 + 102 = 1156$

32×32: $64 + 96 = 1024$

2016	2
1008	2
504	2
252	2
126	2
63	7
9	3^2

$x^3=-32$

$y^2(y+2)=2016$

$y=12$

$x^3+2y^2=2016$

$(x^3-12^3)+2(y^2-12^2)=\cancel{2016}\ 0$

$\cancel{\dfrac{x^3-12^3}{2(y^2-12^2)}=-1}$

$(x^3-12^3)+2(y+12)(y-12)=0$

$(x-12)(x^2+12x+144)+2(y+12)(y-12)=0$

Чистовик лист 4 из 6

$\boxed{№3}$ (продолжение)

$k+20k-2k^2$

$21k-2k^2$ — это парабола с ветвями вниз и вершиной в точке $k=\cancel{6,25}$ $5,25$

~~из подобия △~~

заметим, что:

$$\frac{BM}{MA}=\frac{BH_1}{H_1H}$$

$$\frac{BH_1}{H_1H}=\frac{z}{1-z} \Rightarrow \frac{BM}{MA}=\frac{z}{1-z}$$

$$\frac{MA}{BM}=\frac{1-z}{z}=\frac{1-\frac{k}{10}}{\frac{k}{10}}$$ из (2)

$$\frac{MA}{BM}=\frac{10-k}{k}=\frac{10-5,25}{5,25}=\frac{4,75}{5,25}=$$

$$=\frac{19}{21}$$

Ответ: $\cancel{\frac{19}{21}}$ $\frac{AM}{MB}=\frac{19}{21}$.

$\pm$

$\boxed{№4.}$

$\sqrt{2\sin x\cos x}>(\cos^3 x-3\sin x\cos^2 x+3\sin^2 x\cos x-\sin^3 x)+$
$+2\sin x\cos^2 x-2\sin^2 x\cos x$

$\sqrt{2\sin x\cos x}>(\cos x-\sin x)^3+2\sin x\cos x(\cos x-\sin x)$

$\sqrt{2\sin x\cos x}>(\cos x-\sin x)((\cos x-\sin x)^2+2\sin x\cos x)$

$\sqrt{2\sin x\cos x}>(\cos x-\sin x)(\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin x\cos x+2\sin x\cos x)$

$\sqrt{2\sin x\cos x}>\cos x-\sin x$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

90-14-51-22 (114.1)

Чистовик. (продолжение) Лист 5 из 6

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

$\boxed{\sim 4.}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2\sin x\cos x \geq 0 \\ \cos x - \sin x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2\sin x\cos x > \cos^2 x + \sin^2 x - 2\cos x\sin x \\ \cos x - \sin x \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in [2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k] \cup [\pi + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k] \\ \cos x < \sin x \end{cases} \\ \begin{cases} 2\sin x\cos x > \frac{1}{2} \\ \cos x \geq \sin x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k] \cup [\pi + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k) \\ \begin{cases} \sin 2x > \frac{1}{2} \\ x \in [2\pi l; \frac{\pi}{4} + 2\pi l] \cup [\cancel{\frac{3\pi}{2} + 2\pi l}; \\ \cup [\frac{5\pi}{4} + 2\pi l; 2\pi(l+1)] \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\left[\begin{array}{l} x \in \ldots \\ \begin{cases} x \in (\frac{\pi}{} \end{cases} \end{array}\right.}$$

$$\left[\begin{array}{l} x \in \ldots \\ x \in (\frac{\pi}{12} + 2\pi l; \frac{5\pi}{12} + 2\pi l) \end{array}\right.$$

ПРИ ПЕРЕХОДЕ К ОТВЕТУ допущена арифм. ошибка.

~~Ответ: $x \in (\frac{\pi}{12} + 2\pi s; \frac{\pi}{2} + 2\pi s] \cup$~~

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Черновик;

№3.

$$\frac{BM}{BA}=\frac{MN}{AD}$$

$$S_{MNL}=\frac{1}{2}kx\cdot(1-z)V \qquad z=\frac{k}{10}$$

$$S_{BKN}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x\cdot zV$$

$$S_S=\frac{1}{2}xV(k\cdot(1-z)+\frac{1}{2}z)=$$

$$=\frac{1}{2}xV(k-z(k-0,5))=$$

$$\cancel{\frac{\frac{10x+x}{2}}{kx}=}$$

$$\cancel{=\frac{1}{2}xV(k-zk+0,5z)=}$$

$$\cancel{=\frac{1}{2}xV(k}-\frac{k^2}{5,5+k}+\frac{k}{11+2k})$$

$$\frac{kx}{\frac{10x+x}{2}}=\frac{BM}{MA}=\frac{zy}{(1-z)y} \qquad 0 \text{ и } 21$$

$$\frac{k}{5,5}=\frac{z}{1-z} \qquad k-\frac{k^2}{10}+\frac{k}{20} \quad k(21-k)$$

$$21k-k^2$$

$$k=5,5\cdot\frac{z}{1-z} \qquad k-\frac{k^2}{5,5+k}+\frac{k}{11+2k}=$$

$$k-kz=5,5z \qquad 11k+2k^2-k^2+k=$$

$$z=\frac{k}{5,5+k} \qquad =k^2+12k=k(k+12)$$

$\cancel{475}$

$$k_1=0$$

$$k_2=-12$$

$$\frac{475}{525}=\frac{95}{105}= \quad \text{min } \cancel{\text{max}} \text{ при} -$$

$$=\frac{19}{21}$$

$\boxed{№4.}$ (ответ) Чистовик: листок 30

Ответ: $x \in [\frac{\pi}{12} + 2\pi s; \frac{\pi}{2} + 2\pi s] \cup$
$\cup [\pi + 2\pi s; \frac{3\pi}{2} + 2\pi s]$, где
$s \in N$. ±

$\boxed{№1.}$ $x^3 + 2y^2 = 2016$

один из корней:

$x_0 = y_0 = 12$

$$
\begin{array}{r}
x^3 + 2y^2 = 2016 \\
- \; x_0^3 + 2y_0^2 = 2016 \\
\hline
\end{array}
$$

$(x^3 - 12^3) + (2y^2 - 2 \cdot 12^2) = 0$

$y^2 = \frac{2016 - x^3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3 \vdots 2$, т.к. $y \in N \Rightarrow$

$\Rightarrow x \vdots 2$

$x = 2$; $y = \sqrt{1004} \notin N$

$x = 4$; $y = \sqrt{\frac{1952}{2}} = \sqrt{976} \notin N$

$x = 6$; $y = \sqrt{\frac{2016 - 216}{2}} = \sqrt{900} = 30$

$x = 8$; $y = \sqrt{\frac{2016 - 512}{2}} = \sqrt{752} \notin N$

$x = 10$ $y = \sqrt{508} \notin N$

$x = 12$ $y = 12$

$x = 14 \Rightarrow y = \sqrt{-z}$ $\varnothing$ $(z \in N)$
$14^3 > 2016$

Ответ: $(6; 30)$; $(12; 12)$ +

Задача РЕШЕНА ВЕРНО

Черновик.

з1.

$(x^3-12^3)+2(y^2-12^{\cancel{3}\,2})=0$

$$\boxed{\begin{aligned} x^3 &= 12^2(2+12)-y^2 \\ x^3 &= 2016-y^2 \\ x^3 &= (\sqrt{2016}-y)(\sqrt{2016}+y) \end{aligned}}$$

$(x^3-12^3)=-2(y^2-12^2)$

$\frac{x^3-12^3}{2}=12^2-y^2$

$y^2=\frac{x^3-2016}{2}$

$$\begin{array}{r} \times\ 196 \\ 14 \\ \hline +\ 784 \\ 196 \\ \hline 2744 \end{array}$$

$x^3 \vdots 2$

$x \vdots 2$

$x=2$

$y=\sqrt{1004} \notin N$

$$\begin{array}{r} \times\ 6 \\ 6 \\ \hline 36 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 36 \\ 6 \\ \hline 216 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 14 \\ 14 \\ \hline +\ 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

~~20~~ $2y^2=1800$

$y^2=900$

$y=30$