21-36-60-44
(114.1)

Олимпиада ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

г. Уфа.

Вариант 3-1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы Горы"

по математике

Зиганшина Марата Рамилевича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

$16^{18} - 16^{23}$

Дата
«13» марта 2016 года

Подпись участника

21-36-60-44 (114.1)

Чистовик

1	2	3	4	5
+	+	+	+.	+

100

Сбо

Вещуб (Вещунок)

Задача №1. +

1) $x^3+2y^2=2016$

$2y^2 \vdots 2,\ 2016 \vdots 2 \Rightarrow x^3 \vdots 2 \Rightarrow x \vdots 2$. Пусть $x=2k$.

$8k^3+2y^2=2016$

$4k^3+y^2=1008$

$4k^3 \vdots 2,\ 1008 \vdots 2 \Rightarrow y^2 \vdots 4 \Rightarrow y \vdots 2$. Пусть $y=2l$

$4k^3+4l^2=1008$

$k^3+l^2=252$.

2) Пусть $k \geq 7$, тогда $k^3+l^2 > 7^3=343$ — неуд., значит $k \leq 6$.

3) Рассмотрим все возможные значения k.

$k=1 \Rightarrow l^2=251 \Rightarrow l \notin N$ — неуд.

$k=2 \Rightarrow l^2=244 \Rightarrow l \notin N$ — неуд.

$k=3 \Rightarrow l^2=225 \Rightarrow l=15$ — уд, тогда $x=6,\ y=30$

$k=4 \Rightarrow l^2=188 \Rightarrow l \notin N$ — неуд.

$k=5 \Rightarrow l^2=127 \Rightarrow l \notin N$ — неуд.

$k=6 \Rightarrow l^2=36 \Rightarrow l=6$ — уд, тогда $x=12,\ y=12$.

Ответ: $(6, 30), (12, 12)$

Задача №2. +

1) Пусть первый член $=b_1$, а частное — q, тогда:

$$\left.\begin{aligned} S_5 &= b_1\frac{q^5-1}{q-1}=93 \quad (1) \\ S_5' &= b_1 q^5 \frac{q^5-1}{q-1}=2976 \quad (2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow q^5 \cdot 93 = 2976 \Rightarrow$$

$\Rightarrow q^5=32 \Rightarrow q=2$ — подставим в (1)

$$b_1\frac{32-1}{2-1}=93$$

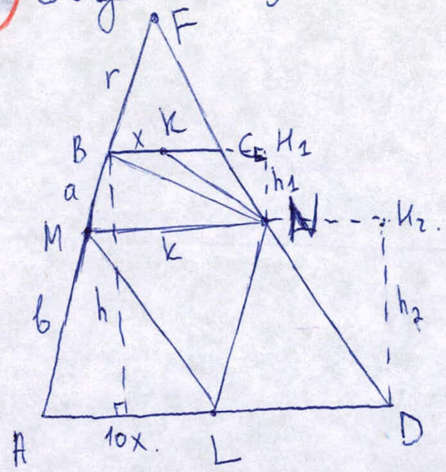
$b_1=3$

2) $S_7=b_1\dfrac{q^7-1}{q-1}=3\dfrac{128-1}{2-1}=3\cdot127=381$

Ответ: 381

Чистовик

Задача N3



1) Обозначим $BK = x$, тогда $AL = 10x$.

2) Обозначим $AM = b$, $BM = a$

3) Соединим AB и CD в точке F. Обозначим $BF = r$, $MN = k$.

4) $\triangle BFC \sim \triangle MFN \Rightarrow$

$$\frac{r}{r+a} = \frac{2x}{k} \quad (1)$$

5) $\triangle BFC \sim \triangle AFD \Rightarrow \dfrac{r}{r+a+b} = \dfrac{1}{10} \quad (2)$

6) $(1) \Rightarrow rk = 2xr + 2ax$

$$r(k-2x) = 2ax$$

$$r = \frac{2ax}{k-2x} \quad (3)$$

(3) в (2)

$$\frac{\frac{2ax}{k-2x}}{\frac{2ax}{k-2x} + a + b} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{2ax}{\cancel{2ax} + ak + bk - 2bx} = \frac{1}{10}$$

$$20ax = ak + bk - 2bx$$

$$k = \frac{20a+2b}{a+b} \cdot x.$$

7) $S_{BKN} = \frac{1}{2} x \cdot NH_1 = \frac{1}{2} x \cdot \frac{a}{a+b} \cdot h$

$S_{MNL} = \frac{1}{2} MN \cdot DH_2 = \frac{1}{2} x \frac{20a+2b}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot h$

$S = \frac{1}{2} xh \left(\frac{a}{a+b} + \frac{20a+2b}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} \right)$

Пусть $\frac{b}{a} = l$.

$$S = \frac{1}{2} xh \left(\frac{1}{l+1} + \frac{20+2l}{l+1} \cdot \frac{l}{l+1} \right) = \frac{1}{2} xh \left(\frac{l+1+20l+2l^2}{(l+1)^2} \right) = \frac{1}{2} xh \frac{2l^2+21l+1}{(l+1)^2}$$

8) Посчитаем производную функции S и приравняем к 0

$$S' = \frac{1}{2} xh \cdot \frac{(4l+21)(l+1)^2 - (2l^2+21l+1)2(l+1)}{(l+1)^4} = 0$$

$$(4l+21)(l+1) - (2l^2+21l+1) \cdot 2 = 0$$

$$4l^2 + 21l + 4l + 21 - 4l^2 - 42l - 2 = 0$$

$$17l = 19$$

$l = \frac{19}{17}$. Значит при $\frac{AM}{MB} = \frac{19}{17}$ сумма площадей максимальна

Ответ: $\frac{19}{17}$

Чистовик

Задача №4.

(+.)

$$\sqrt{2\sin x\cos x} > \cos^3 x - \sin^3 x + \sin x\cos x\,(\sin x - \cos x)$$

$$\sqrt{2\sin x\cos x} > (\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x\sin x + \sin^2 x) - (\cos x - \sin x)\sin x\cos x$$

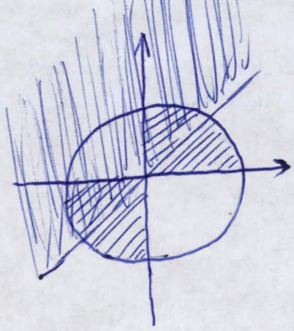
$$\sqrt{2\sin x\cos x} > (\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cancel{\cos x\sin x} + \sin^2 x - \cancel{\cos x\sin x})$$

$$\sqrt{2\sin x\cos x} > \cos x - \sin x.$$

1сл. $\cos x - \sin x < 0$, тогда неравенство будет верно при всех x из ОДЗ.

$$2\sin x\cos x \geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x \geq 0\\ \cos x \geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x \leq 0\\ \cos x \leq 0\end{cases}\end{array}\right.$$

- значит x лежит в I или III четверти тригонометрического круга



учитывая условие $\cos x - \sin x < 0$ строим график

Значит $x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right] \cup \left[\pi + 2\pi n, \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

2сл. $\cos x - \sin x \geq 0$, тогда возведем обе части в квадрат.

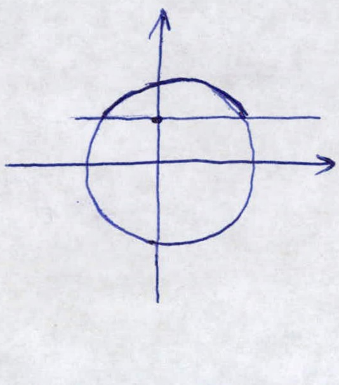
$2\sin x\cos x > 1 - 2\sin x\cos x.$

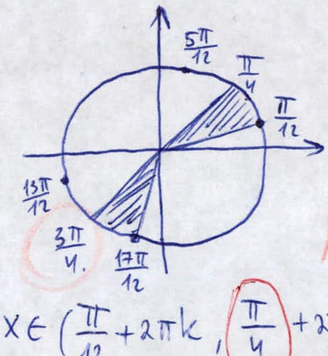
$2\sin 2x > 1$

$\sin 2x > \frac{1}{2}.$

$\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

$\frac{\pi}{12} + \pi k \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + \pi k$, учитывая условие $\cos x - \sin x \geq 0$ строим график





неверно $\frac{5\pi}{4}$

$x \in \left(\frac{\pi}{12} + 2\pi k, \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \frac{17\pi}{12} + 2\pi k\right)$ $k \in Z$

Объеденив два случая получим ответ!

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{12} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right] \cup \left[\pi + 2\pi n, \frac{17\pi}{12} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$

Чистовик

Задача №5

1) $16^{\frac{2x-1}{(2x-1)^2+4}}$

Пусть $2x-1=t$

$16^{\frac{t}{t^2+4}}$

2) $16^{\frac{t}{t^2+4}} \le a$

Заметим, что $16^{\frac{t}{t^2+4}}$ всегда >0, значит $a>0$

$\frac{t}{t^2+4} \le \log_{16} a$

$t \le t^2 \cdot \log_{16} a + 4\log_{16} a.$

$t^2 \cdot \log_{16} a + 4\log_{16} a + t \geq 0$

Если $0<a<1$, то ветви $\underbrace{\text{параболы}}_{\text{т.к } \log_{16} a<0}$ направлены вниз и быть всегда выше оси t она не может $\Rightarrow a \geq 1$

$D = \cancel{16\log}\ 1 - 16\log_{16}^2 a$, чтобы парабола при всех t лежала выше от, $D \leq 0$

$1-16\log_{16}^2 a \leq 0$

$\cancel{-\frac{1}{4} < \log_{16} a < \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < \log_{16} a < \frac{1}{4}}$

$\cancel{\log_{16} 1 < \log_{16} a < \log_{16} 2}.$

$16\log_{16}^2 a \geq 1$ и т.к $\log_{16} a \geq 0$

$\log_{16} a \geq \frac{1}{4}.$

$a \geq 2.$

3) $16^{\frac{t}{t^2+4}} > b$

при $b \leq 0$ – это верно. Пусть $b>0$

$\frac{t}{t^2+4} > \log_{16} b$

$t^2 \log_{16} b - t + 4\log_{16} b < 0$

Если $b \geq 1$, то ветви параболы направлены вверх и она не может полностью лежать под от.

Значит $0<b<1$. и $D<0$

$D = 1 - 16\log_{16}^2 b < 0$

$\log_{16}^2 b > \frac{1}{16}$ и т.к $\log_{16} b < 0$

$\log_{16} b < -\frac{1}{4}.$

$b < \frac{1}{2}$

Ответ: $a \geq 2$, $b < \frac{1}{2}$.

Черновик

$x^3+2y^2=2016.$

$8k^3+2y^2=2016$

$4k^3+y^2=1008.$

$4k^3+4l^2=1008$

$k^3+l^2=252$

$k^3+l^2=6^3+6^2$

$k^3-6^3=6^2-l^2$

$(k-6)(k^2+6k+36)=(6-l)(\cancel{36+6l+l^2})$ $6+l.$

$l=1$

$k^3=251$ - нуд.

$32\cdot7\cdot3^2$

$4\cdot7\cdot3^2.$

$6^2\cdot7.$

216

$\frac{5+l}{l+1}$

$\frac{(x^3)'}{(x)'}=$

216

$\frac{x^3-3x^2\cdot x}{x^2}$

$b<16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}}\le a.$

$b<16^{\frac{2x-1}{(2x-1)^2}}$ $S'=$

$16^{\frac{2x-1}{2}}$

$16^{\frac{2x-1}{(2x-1)^2+4}}$

$2x-1=t$

$16^{\frac{t}{t^2+4}}\le a.$

$\frac{t}{t^2+4}\le\log_{16}a$

$t\le(t^2+4)\log_{16}a.$

$t\le t^2\cdot\log_{16}a+4\log_{16}a.$

$t^2\cdot\log_{16}a-t+4\log_{16}a\ge0$

$D=1-16\log_{16}^2a<0.$

$16\log_{16}^2a-1>0.$

log

$16^{\frac{t}{t^2+4}}>b$

$\log\frac{t}{t^2+4}>\log_{16}b$

$t^2\cdot\log_{16}b-t+4\log_{16}b)$

$\frac{f'g'-f'g}{g^2}$

$S\ \frac{1}{2}x\cdot h\cdot\frac{l}{l+1}+\frac{1}{2}x\cdot h\cdot\frac{1}{l+1}\cdot\frac{5l+1}{l+1}=$

42
25
18

$=\frac{1}{2}\ \frac{l(l+1)+5l+1}{(l+1)^2}=\frac{l^2+6l+1}{(l+1)^2}=1+\frac{4l}{(l+1)^2}$

$\frac{(4l+21)(l+1)^2-(2l^2+21l+1)\cdot2(l+1)}{(l+1)^4}=\cancel{4l}+21l+4l+21-4l^2-42l-$

19

Черновик

Черновик

$x^3+2y^2=2016$

$x \vdots 2 \Rightarrow x^3 \vdots 8.$

$y^2 \vdots 4$

N1

$(2k)^3+2(2l)^2=2016.$

$8k^3+2\cdot 4l^2=2016.$

$k^3+l^2=252$

$\begin{array}{r} 252 \\ 64 \\ \hline 188 \end{array}$

$2016 \mid 8$; 16; $252.$; 41; 40; 16

N2.

0
1
0
3

$\cancel{a_1+a_2+}$

$b_1 \dfrac{q^5-1}{q-1} = 93.$

$b_1 q^5 \dfrac{q^5-1}{q-1} = 2976.$

$q^5 = 32.$

$\cancel{q^{52}=2^{5}}.$ $q=2.$

$2976 \mid 93$; 279; 32; 186

$2016 \mid 32$; 192; 63; 96

$3, 6, 12, 24, 48$

$\begin{array}{r} 93 \\ 32 \\ \hline 186 \\ 279 \\ \hline 2976 \end{array}$

$3, 42, 48.$

N1

$x \equiv 0$
$x \equiv 1$
$x \equiv 4$
$x \equiv 4$
$x \equiv 1$
$\cancel{x \equiv 0}$

$y^2 = 0, 1, 4.$

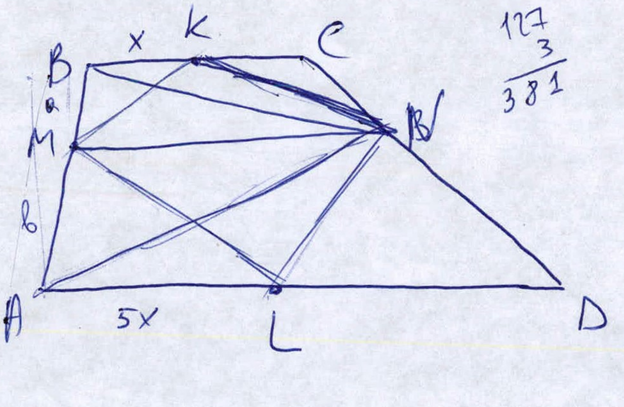
$x \equiv 0$
$x \equiv 1$
$x \equiv 3$
$x \equiv$

$\begin{array}{r} 144 \\ 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \\ 288 \\ \hline 2016 \end{array}$

$\begin{array}{r} 49 \\ 7 \\ \hline 343 \end{array}$

N3

$\begin{array}{r} 127 \\ 3 \\ \hline 381 \end{array}$



$\cancel{S = \frac{1}{2}x \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot MN \cdot h_2} =$

$= \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{5l+1}{l+1} \cdot h$

$S = \frac{1}{2} x \cdot \frac{a}{a+b} \cdot h + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{5l+1}{l+1} \cdot h$

$\dfrac{2ax}{ak+bk-bx} = \dfrac{1}{10}.$

$10ax = ak+bk-bx$

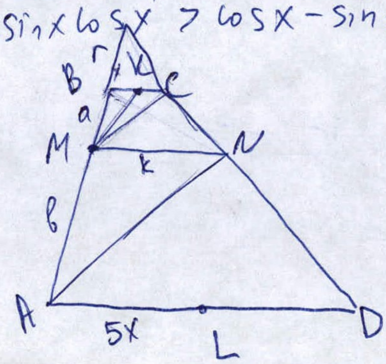
$k = 2\dfrac{5a+b}{a+b} \cdot x$

$k = \dfrac{5 \cdot l+1}{l+1} \cdot x.$

$\sqrt{2\sin x \cos x} > \cos^3 x - \sin^3 x + \sin x \cos x (\sin x - \cos x)$

$\sqrt{2\sin x \cos x} > (\cos x - \sin x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$\sqrt{2\sin x \cos x} > \cos x - \sin x.$



S_1 $\dfrac{r}{r+a} = \dfrac{2x}{k}$

$rk = 2xr + 2ax.$

$r = \dfrac{2ax}{k-2x}$

225 $\dfrac{(r+a)}{r+a+b} = \dfrac{k}{5x}$

3 $216 + \dfrac{2 \cdot 900}{r+a+b} = \dfrac{1}{10}.$

$\dfrac{\frac{2ax}{k-2x}}{\frac{2ax+ak-2ax+bk-2bx}{k-2x}} = \dfrac{1}{10}$