69-50-03-17
(183.4)

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 174

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников

по математике

Зимюкова Максима Олеговича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата
«22» марта 2016 года

Подпись участника

69-50-03-17 (183.4)

Чистовик

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

№1

$\frac{40}{29} > 1 \Rightarrow$ возведем оба числа в квадрат и значение неравенства не изменится ($\left(\frac{40}{29}\right)^2 > \frac{40}{29}$, если $\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2} > 1$, то оно увеличится и ~~выр~~ больше если оно больше, чем $\frac{40}{29}$ и наоборот, иначе оно уменьшится и будет заведомо меньше $\frac{40}{29}$, что тоже верно).

$$\left(\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\right)^2 = \sin^2\frac{1}{2}+\cos^2\frac{1}{2} + 2\sin\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{1}{2} = 1+\sin(1)$$

$1+\sin(1)$ $\quad \frac{1600}{841}$

$\sin(1)$ $\quad \frac{759}{841}$

$1 < \frac{3{,}14}{3} \Rightarrow 1 < \frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$

$\Downarrow$

$\sin(1) < \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{3}$

$$\frac{759}{841} > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\uparrow$$

$$759\cdot 2 > \sqrt{3}\cdot 841$$

$$759^2\cdot 4 > 3\cdot 841^2$$

$$\uparrow$$

~~2.121~~

$$2.304.324 > 2.121.843$$

$$\begin{array}{r} \times\ 759 \\ 759 \\ \hline 6831 \\ 3795 \\ 5313 \\ \hline 576081 \\ \times\ 4 \\ \hline 2304324 \end{array}$$

$$\frac{759}{841} > \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) > \sin(1)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{759}{841} > \sin(1)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{40}{29} > \left(\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{array}{r} \times\ 841 \\ 841 \\ \hline 841 \\ 3364 \\ 6728 \\ \hline 707281 \\ \times\ 3 \\ \hline 2.121.843 \end{array}$$

Ответ: $\left(\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\right) < \frac{40}{29}$ верно

№2

Пусть длина круга – 1 км. скорость быстрого – $\frac{1}{3}$ км/м., медленного $\frac{1}{k}$ км/мин., тогда они проезжают круг за 3 и k минут соответственно, $k > 3$. Период встречи – длина круга деленная на скорость сближения (условно можно считать, что после очередной встречи между ними расстояние равное длине круга, которое сокращается со скоростью равной разнице их скоростей).

Тогда: $\frac{1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{k}} = \frac{3k}{k-3} \geq 8$ и целое.

Обозначим их $k; n; m$

$1=k+n+m$. Пусть мы зафиксировали k, тогда необходимо максимизировать nm при заданной их сумме:

$n+m=1-k$

$n=1-k-m$ $\quad n\cdot m = \cancel{n-kn-mn}\quad m-km-m^2=\cancel{m}$

$=m(1-k)-m^2$ – парабола с ветвями ~~вниз~~ в, вершина (~~минимум~~ максимум)

$=-\frac{b}{2a}=\frac{k-1}{2(-1)}=\frac{1-k}{2}=m$, $\quad n=1-k-\frac{1-k}{2}=\frac{1-k}{2}$; т.е.

зафиксировав один, оставшиеся 2 нужно брать равными

тогда пусть $1=k+2n \quad k=1-2n$

$k\cdot 2n=(1-2n)\cdot 2n^2=n^2-2n^3$, производная: $2n-6n^2$,

корни производной $2n-6n^2=2n(1-3n)-0$ и $\frac{1}{3}$, заметим, что между 0 и $\frac{1}{3}$ производная положительна, т.е. функция возрастает от 0 до $\frac{1}{3}$, а затем убывает, но

$1=k+2n$, $\quad k,n>0 \Rightarrow \quad n<0{,}5 \Rightarrow$ максимум функции при $n=\frac{1}{3}$; $k=\frac{1}{3} \Rightarrow$ При фиксированной сумме 3-х элементов максимум достигается при их равенстве.

$\frac{4}{p}=\frac{2}{q}=\frac{3}{t}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow$ $\begin{matrix} p=12 \\ q=6 \\ t=9 \end{matrix}$, тогда $\frac{p\cdot q\cdot t}{3}=\frac{12\cdot 6\cdot 9}{3}=\cancel{77}$

$=72\cdot 3=216$

Ответ: 216 неверно.

$2x+3=-0{,}5x-1$

$2{,}5x=-4$

$5x=-8$

$x=-\frac{8}{5}$

$x=-1{,}6$

$2\cdot(-1{,}6)+3=-3{,}2+3=-0{,}2$

$M(-1{,}6;-0{,}2)$

Тогда минимальное зн-е данного выр-я:

$\sqrt{2{,}4^2+0{,}2^2}+\sqrt{1{,}6^2+1{,}8^2}=\sqrt{5{,}76+0{,}04}+\sqrt{2{,}56+3{,}24}=$

$=\sqrt{5{,}8}+\sqrt{5{,}8}=2\sqrt{5{,}8}=\sqrt{23{,}2}$

Ответ: $2\sqrt{5{,}8}$ верно

№5

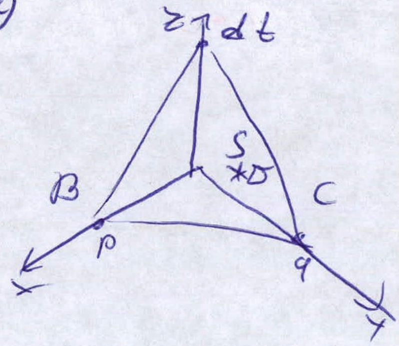
Введем систему координат: Пусть $S:(0;0;0)$, $A(0;0;t)$, $B(p;0;0)$, $C(0;q;0)$ (возможно, т.к. боковые ребра перпендикулярны)

Тогда $V=\frac{pqt}{3}$ $V=\frac{pqt}{6}$

~~Из~~

Пусть $D(x_0, y_0, z_0)$

Тогда из условия:



$\begin{cases} y_0^2+\cancel{x_0}^2=20 \\ y_0^2+z_0^2=13 \\ x_0^2+z_0^2=25 \end{cases}$ $x_0^2+y_0^2+z_0^2=29$

$\begin{cases} z_0^2=9 \\ x_0^2=16 \\ y_0^2=4 \end{cases}$ с.ч. $\begin{cases} x_0=4 \\ y_0=2 \\ z_0=3 \end{cases}$

$D(4;2;3)$

D принадлежит плоскости ABC.

Пусть плоскость ABC: $ax+by+cz+d=0$, тогда

$\begin{cases} ap+d=0 \\ bq+d=0 \\ ct+d=0 \\ 4a+2b+3c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{d}{p} \\ b=-\frac{d}{q} \\ c=-\frac{d}{t} \\ -\frac{4}{p}d-\frac{2}{q}d-\frac{3}{t}d+d=0 \end{cases}$

$1=\frac{4}{p}+\frac{2}{q}+\frac{3}{t}$ заметим, что при выборе тройки, подходящей по равенство можно взять любое d, а затем высчитать a, b и c тем, что исходная система выполнится

$\frac{4}{p}$; $\frac{2}{q}$; $\frac{3}{t}$ – 3 элемента, при заданной сумме которых необходимо максимизировать произведение $\left(\frac{4}{p}\cdot\frac{2}{q}\cdot\frac{3}{t}=\frac{24}{pqt}=\frac{8}{V}\right)$, а V нужно минимальное). Решим эту подзадачу:

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$3k > 8(k-3)$

$3k > 8k - 24$

$24 > 5k$

$k < 4{,}8$; но k - целое $\Rightarrow$ $k \le 4$; но $k > 3 \Rightarrow k = 4$,

тогда период встречи - 12 минут

Ответ: за 4 минуты.

верно

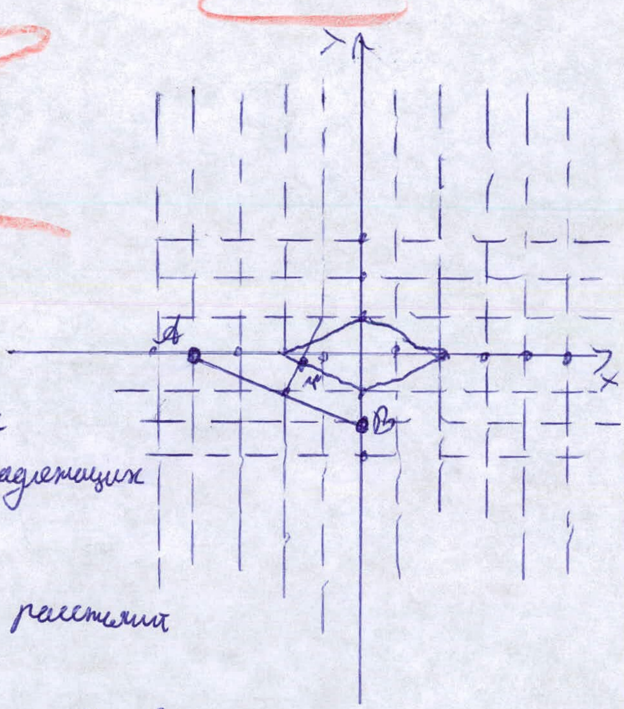
№3

$|x| + 2|y| = 2$

$|y| = 1 - 0{,}5|x|$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \ge 0 \\ y = 1 - 0{,}5|x| \end{cases} \\ \begin{cases} y < 0 \\ y = 0{,}5|x| - 1 \end{cases} \end{array}\right.$$ - ромб

т.е. ~~все точ~~ решения ищутся среди точек, принадлежащих изображенному ромбу



$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y+2)^2}$ - сумма расстояний до точек $A(-4; 0)$ и $B(0; -2)$

Заметим, что суммой расстояний до двух точек задается эллипс, соответственно чем больше эта сумма, тем он шире и длиннее.

Но ~~ближайшая~~ ~~от~~ к AB сторона ромба очевидно по координатам точек параллельна ей $\Rightarrow$ минимальную ширину ~~ромб~~ эллипс на AB будет иметь тогда, когда он касается этой стороны (для всех остальных точек ромба, если эллипс проходит через них, то его ширина больше или равна расстоянию от данных точек до AB), т.е. искомая точка лежит на пересечении серединного перпендикуляра к AB и ближайшей стороны ромба (для остальных точек этой стороны, т.к. высота из них на AB попадает не в середину AB, то ширина ~~р~~ эллипса будет больше, чем длина этой высоты).

Тангенс угла наклона $AB = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ для перпендикуляра - 2 и он проходит через точку $-2; -1 \Rightarrow$ уравнение перпендикуляра: $y = 2x + 3$

пересечение с $y = -\frac{1}{2}x - 1$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

69-50-03-17 (183.4)

Чистовик

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

~4

Пусть все значения получались целыми, тогда уберем знаки целой части почему?

ОДЗ – ?

$$\left(\log_3(\log_2 x)\right)^2 - 12\log_3(\log_2 x) + 20\log_3(\log_2 x) = 0$$

$k = \log_3(\log_2 x)$

$k^2 - 12k + 20k = 0$

$k^2 + 8k = 0$

$k(k+8) = 0$ $\left[\begin{array}{l} k=0 \\ k=-8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = 3^{-8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 2^{\frac{1}{6561}} \end{array}\right.$ не учтено ОДЗ

Других корней нет неверно

Ответ: 2; $2^{\frac{1}{6561}}$. неверно

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

69-50-03-17 (183.4)

Черновик

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

$\frac{1}{2} = 0,5 < \frac{3,14}{6} = 30^\circ$

$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ $\frac{40}{29}$

$(\sqrt{3}+1)29 -$ 80

$\sqrt{3} \cdot 29$ 51

841 - 3 2601

2523 ~~2601~~

$\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$ $\frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{2,75}{2} < \frac{3}{2}$

$(30-1)^2 = 900-60+1$

$= 841$

$(50+1)^2 = 2601$

$(20+9)^2$

$400+360+81$

~~17,5~~

$(20-2,5)^2$

$400 - 100 + 6,25$

306,25

17

17

$(20-3)^2$ 280

~~17,5~~

$(20-2,5$

$(20-a)^2 =$

$= 400 - 40a + a^2$

$a^2 - 40a - 100 = 0$

$1600 + 400 = 2000$

$a = \frac{40 \pm 20\sqrt{5}}{2}$

$a = 20 \pm 10\sqrt{5}$

$1 + 2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}$

$1 + \sin(1)$

$\sin(1)$

$(\frac{40}{29})^2$

$\frac{1600}{841}$

$\frac{759}{841}$

$1 < \frac{\pi}{3} = 60$

$\sin(1) < \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{759}{841}$

$\frac{58}{70} = \frac{29}{5}$

$759 \cdot 2 > 841 \cdot \sqrt{3}$

24^2

$(20+4)^2 = 400 + 160 + 16$

$= 576$

$5,8 - 4 =$

$20 + 3,2$

324

$(20-2)^2 = 400 - 80 + 4$

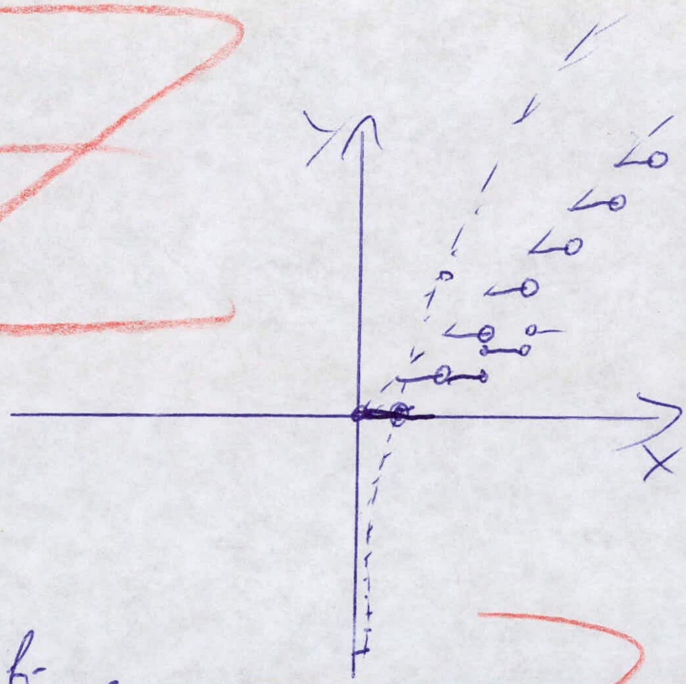
24
24
96
48
576

58
759
759
6831
3795
5313
576081
4
~~115~~2162
2304324

841
841
841
3364
6728
707281
3
2121843

$\log_2 x = k$

$2^k = x$



a:

$3^a \le 2^x$

$3^{a+1} > k$

$3^a \le 2^x$

$3^a \le k$

$3^{a+1} > k$

b:

3^b

$3^a = k$

l

9^4 81^2 $729 \cdot 9$

$(80+1)^2 = 6400+160+1$

6561

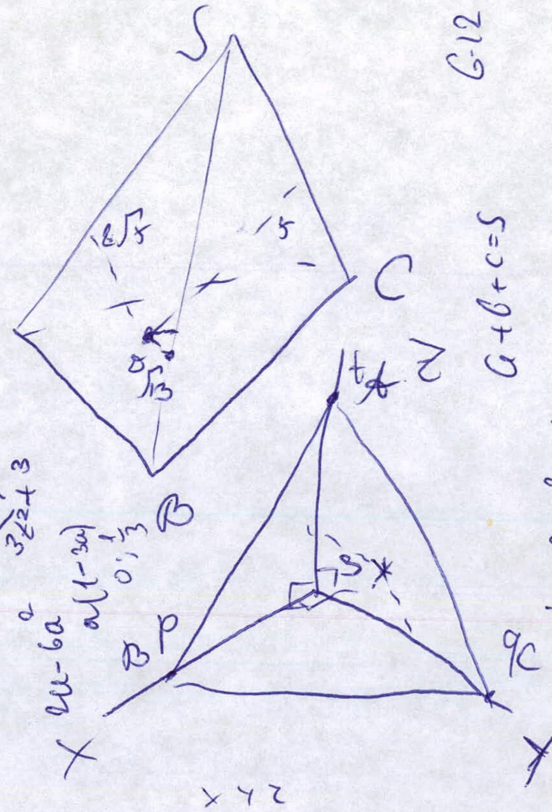
$\frac{1}{6561}$

$a: \quad 3^a = \log_2 x$

$b: \quad 2^b = x$

$[a]$

$a(1-a) = a - a^2$



$G{:}12$

$a+b+c=5$

$\frac{4}{a} + \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3}$

$p>0$

$0;q;0$

$0;0;t$

$a = -\frac{d}{p}$

$b = -\frac{d}{q}$

$c = -\frac{d}{t}$

$O(a,b,c)$

$a^2+b^2=20$

$b^2+c^2=13$

$a^2+c^2=25$

$ap+d=0$

$bq+d=0$

$ct+d=0$

$4a+2b+3c+d=0$

$-\frac{4}{p} - \frac{2}{q} - \frac{3}{t} + 1 = 0$

$-4qt-2pt-3pq+pqt=0$

$pqt = 4qt+2pt+3pq$

$a^2-c^2=7$

$a^2 = c^2+7$

$b^2-c^2=-5$

$b^2 = c^2-5$

$ax+by+cz+d=0$

$abc = 4bc+2ac+3ab$

$1 = \frac{4}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}$

~~$4a+2b+3$~~

$4a+2b+3c+d=0$

$2c^2+2=20$

$c^2=9$

$c=3 \quad b=2$

$a=4$

$\text{Б} \quad 4;2;3$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$S \quad x, y \quad x > y$

$\frac{S}{x} = 3 \quad \frac{S}{y} = k \quad \frac{S}{x-y} = a > 8$

$\frac{3k}{k-3} > 8$

$x = \frac{1}{3} \quad y = \frac{1}{k}$

$\frac{k-3}{3k}$

$x = \frac{1}{3}$

$y = \frac{1}{k}$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{k} =$

$k > 3$

$k > 3$

$y = \frac{1}{4}$

$\frac{3k}{k-3} > 8$

$x = \frac{1}{3}$

4

3

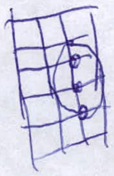
$3k > 8k - 24$

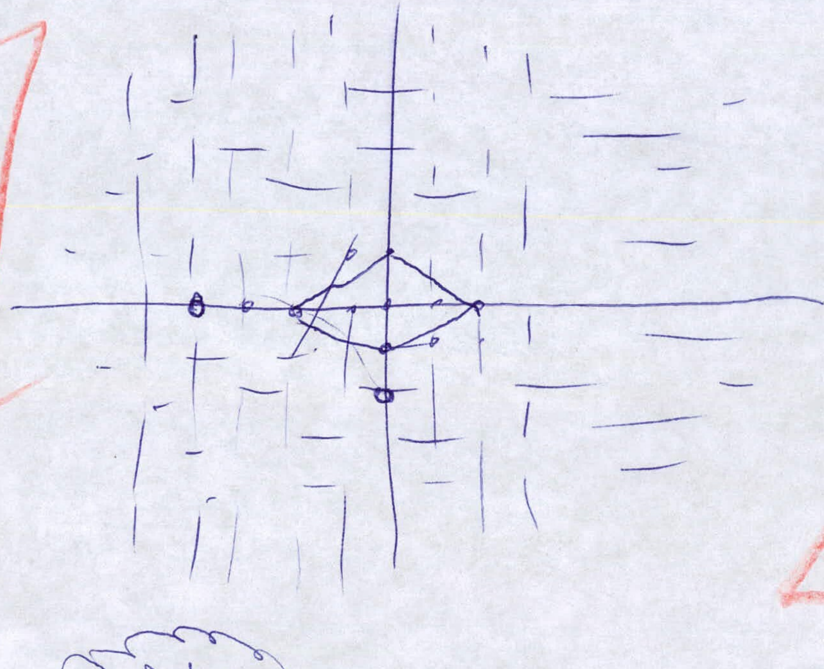
$24 > 5k$

$k < \frac{24}{5}$

$k \leq 4$

$\frac{12}{1} > 8$





$|y| = 1 - 0,5|x|$

$y > 0: \quad y = 1 - 0,5|x|$

$y < 0: \quad y = 0,5|x| - 1$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!