г Йошкар-Ола

18-09-58-73
(197.1)

Олимпиада ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7-1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьевы горы!"

по математике

Исупова Кирилла Олеговича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

выход 10:44 – 10:46

Дата
«27» марта 2016 года

Подпись участника

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

18-09-58-73 (197.1)

Чистовик

Олимпиада ПВГ 2016

80 (Восемьдесят) [illegible]

1	2	3	4	5	Σ
+	+	+	+	−	

№1. $\left(\frac{3}{2x-y}-\frac{2}{2x+y}-\frac{1}{2x-5y}\right):\frac{y^2}{4x^2-y^2}=\frac{8}{3}$

1) $\frac{3}{2x-y}-\frac{2}{2x+y}=\frac{6x+3y-4x+2y}{4x^2-y^2}=\frac{2x+5y}{4x^2-y^2}$

верное решение

2) $\frac{2x+5y}{4x^2-y^2}-\frac{1}{2x-5y}=\frac{4x^2-25y^2-4x^2+y^2}{(4x^2-y^2)(2x-5y)}=\frac{-24y^2}{(4x^2-y^2)(2x-5y)}$

3) $\frac{-24y^2(4x^2-y^2)}{(4x^2-y^2)(2x-5y)\cdot y^2}=\frac{-24}{2x-5y}=\frac{-24}{\frac{8}{3}-\frac{35}{3}}=\frac{-24\cdot 3}{-27}=\frac{8}{3}$

верно

т.к $x=\frac{4}{3}$, $y=\frac{7}{3}$

№2 $\log_{3x}(x+1)-(x+1)^{\left(\log_{\cos 9}\sqrt{x+1}\right)^{-1}}<\sin^2 9$

О.Д.З: $x+1>0$, $3x>0$, $3x\neq 1$ =>

$x>0$, $x\neq\frac{1}{3}$

верно

1) $\left(\log_{\cos 9}\sqrt{x+1}\right)^{-1}=\log_{\sqrt{x+1}}\cos 9$ (по О.Д.З)

2) $(x+1)^{\log_{\sqrt{x+1}}\cos 9}=\cos 9^{\log_{\sqrt{x+1}}(x+1)}=\cos^2 9$

3) $\log_{3x}(x+1)-\cos^2 9<\sin^2 9$

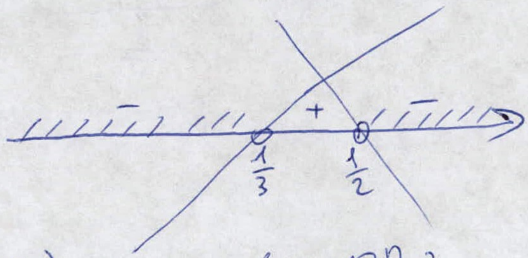
$\Updownarrow$

$\log_{3x}(x+1)<1=\log_{3x}3x$

$\Updownarrow$

$(3x-1)(x+1-3x)<0$

$(3x-1)(1-2x)<0$



т.е $x\in(-\infty;\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{2};+\infty)$, учитывая ОДЗ

получаем: $x\in(0;\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{2};+\infty)$

верно

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

№5. $\cos(8\pi x)+2\cos(4\pi x)-\cos(2\pi x)+2\sin(\pi x)+3=0$

$\cos^2(4\pi x)+2\cos(4\pi x)-\sin^2(4\pi x)+\sin^2(\pi x)+2\sin(\pi x)-\cos^2(\pi x)+3=0$

$(\cos(4\pi x)+1)^2+(\sin(\pi x)+1)^2=\sin^2(4\pi x)+\cos^2(\pi x)-1$

$(\cos(4\pi x)+1)^2+(\sin(\pi x)+1)^2=1-\cos^2(4\pi x)-\sin^2(\pi x)$

$(\cos(4\pi x)+1)^2+\cos^2(4\pi x)+(\sin(\pi x)+1)^2+\sin^2(\pi x)=1$

$2\cos^2(4\pi x)+2\cos(4\pi x)+(\sin(\pi x)+1)^2+\sin^2(\pi x)=0$

$2\cos^2(4\pi x)+2\cos^2(2\pi x)-2\sin^2(2\pi x)+\cancel{\sin^2(\pi x)}\Downarrow=0$

нет решений

№3. Пусть работало n учеников, их производ-ть x. тогда производ.-ть мастера $2,5x$.

Пусть t_1 – время в 1-ом случае

t_2 – время во 2-ом случае, тогда

1-ый случай (без мастера):

$$nx \cdot t_1 = 288 \ (1)$$ → кв. м.

2-ой случай (с мастером):

$$(\underbrace{n-1+2,5}_{=n+1,5})x \cdot t_2 = 288 \ (2)$$ если вычесть из (1), (2), то

получим:

$$nxt_1 - nxt_2 - 1,5xt_2 = 0 \ (3)$$

З-м, что по условию xt_1 – сделал всего 1 ученик в 1-ом случае,

а xt_2 – сделал 1 ученик во втором случае =>

$$xt_1 - xt_2 = 6$$, тогда (3):

$$n(xt_1 - xt_2) = 1,5xt_2$$

$$6n = 1,5xt_2 \Rightarrow 4n = xt_2$$, тогда подставим в (2)

$$(n+1,5)4n = 288$$ ~~не~~верное уравнение

$$4n^2 + 6n - 288 = 0. \quad \frac{D}{4} = 9 + 288 \cdot 4 = 1161$$

т.е. $n = \dfrac{-3 \pm \sqrt{1161}}{4}$

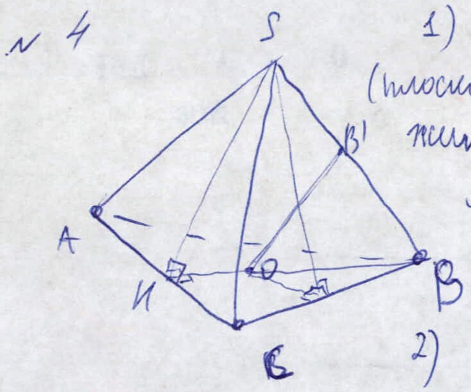
$$n = \frac{-3 + \sqrt{1161}}{4}$$

З-м, что получается нецелое число, т.е. в реальности такого не могло быть.

~~не~~верно

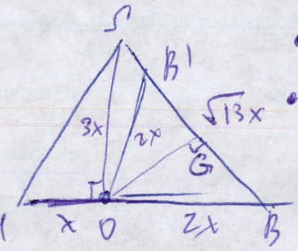
шифр

№ 4



1) З-м, что $\triangle ABC$ - правильный, и в ABC (плоскости) лежит ок-ть сферы, которая содержит все вершины $\Rightarrow$ O - центр сферы является центром описанной ок-ти $\triangle ABC$ т.е его центром.

2) Пусть B' - вторая точка пересечения сферы со стороной SB. 3) Опустим из S и B на AC - перпендикуляры, в силу симметрии они пересекутся в точке H, тогда рассмотрим $\triangle SHB$:



• По определению двугранного угла $\angle SHB = 3$

• З-м, что S проецируется в центр описанной ок-ти, т.к S равноудалена от вершин.

• Если $HO = x$, то $OB = 2x$, т.к O - точка пересечения медиан (ABC - правильный) $\Rightarrow \frac{BO}{OH} = \frac{2}{1}$;

• $tg\angle SHO = 3 \Rightarrow \frac{SO}{HO} = 3 \Rightarrow SO = 3x \Rightarrow$ в $\triangle SOB$ (прямоуг.): $SB = \sqrt{9x^2 + 4x^2} = \sqrt{13}x$

• Опустим из O перпендикуляр на SB: OG, тогда в $\triangle B'OB$ (равнобедр.) OG - медиана $\Rightarrow B'G = GB$

верное решение

• Из $\triangle SOB$: $\cos\angle SBO = \frac{OB}{SB} = \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow$ в $\triangle OBG$: $\frac{GB}{OB} = \cos\angle SBO$

$\Rightarrow \frac{GB}{OB} = \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow GB = \frac{4x}{\sqrt{13}} \Rightarrow B'B = \frac{8x}{\sqrt{13}} \Rightarrow SB' = \sqrt{13}x - \frac{8x}{\sqrt{13}}$

тогда $\frac{SB'}{B'B} = \frac{\sqrt{13} - \frac{8}{\sqrt{13}}}{\frac{8}{\sqrt{13}}} = \frac{13-8}{8} = \frac{5}{8}$

Ответ: Сфера делит боковую сторону SB в отношении $5/8$.

верно

18-09-58-73
(197.1)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

черновик

x

$2,5x$

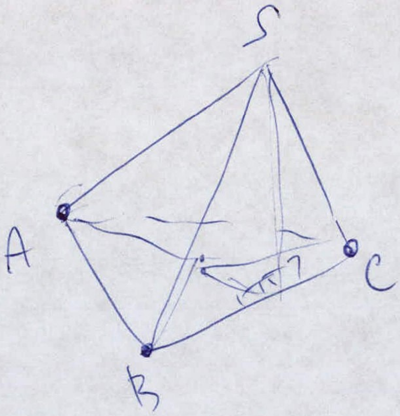
$$\frac{6x+3y-4x-2y}{4x^2-y^2}=\frac{2x-y}{2x+y}$$

$$\frac{}{2x+y}-\frac{}{2x-5y}$$

$nx\cdot t_1=288$

$(n-1)x$

$(n+1,5)x\cdot t_2=288$



$xt_1-xt_2=6$

$nxt_1-nxt_2-1,5xt_2=0$

$n6=1,5xt_2$

$xt_2=\frac{n6}{1,5}=4n$

$(n+1,5)4n=288$

$4n^2+6n=288$

$2n^2+3n-144=0$

$D=9+8\cdot 144$

$\cos(8\pi x)+2\cos(4\pi x)-\cos(2\pi x)$

$+2\sin(\pi x)+1/3=0$

$2\cos^2(4\pi x)-1+2\cos(4\pi x)$

$2\cos^2(4\pi x)-1+4\cos^2(2\pi x)-2$

$2\cos^2(4\pi x)+4\cos^2(2\pi x)-\cos(2\pi x)$

$+2\sin(\pi x)=0$

$\frac{D}{4}=9+228\cdot 4$

800 + 80 + 32 = 912

114 × 8 = 912

921

800 + 100 + 32 = 912

921

19 × 5

31 × 31 = 961

$9+8\cdot 144$

144 × 8 = 1152

1161

200

35

$288=35,5\cdot x\cdot t_2$

$288=34\cdot x\cdot t_1$

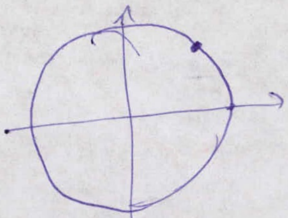
35

34

34 × 34 = 136 + 102 = 1156

33 × 33 = 99 + 99 = 1089

288



$\cos(8\pi x) + 2\cos(4\pi x) - \cos(2\pi x) + 2\sin(\pi x) + 3 = 0$

$\left(\quad \right)\left(\quad \right)$

$\cos^2(4\pi x) - \sin^2(4\pi x) + 2\cos(4\pi x) - \cos^2(\cancel{4}\pi x) + \sin^2(\pi x) + 2\sin(\pi x) + 3 = 0$

$2\cos^2(4\pi x) + 4\cos^2(2\pi x) - \cos^2(\pi x) + \underbrace{\sin^2(\pi x) + 2\sin(\pi x)}_{+1} = 0$

-1

$2\cos^2(4\pi x) + 4\cos^2(2\pi x) + (\sin(\pi x) + 1)^2 + \cancel{\cos(\pi x)}$

$4\left(2\cos^2(\pi x) - 1\right)^2$

$288 = 4 \cdot 72 = 2^5 \cdot 9$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$\cos(8\pi x) + 2\cos(4\pi x) - \cos(2\pi x) + 2\sin(\pi x) + 1 = 0$

$\underline{2\sin^2(\pi x) + 1 + 2\sin(\pi x)}$

cos2...

$\cancel{1 - 2\sin^2(4\pi x) + 2 - 4\sin^2(2\pi x) + \sin^2(\pi x) - 1 + 2\sin(\pi x) + 3 = 0}$

$\cancel{(\sin(\pi x) + 1)^2}$

$6n = 1{,}5x + 2$

$\cos(8\pi x) = 2\cos^2(4\pi x) - 1 = \cos^2(4\pi x) - \sin^2(4\pi x) = 1 - 2\sin^2(4\pi x)$

$2\cos^2(4\pi x) + 2\cos(4\pi x) + 2\sin^2(\pi x) + 2\sin(\pi x) + 1 = 0.$

$(\cos(4\pi x) + 1)^2 + \cos(4\pi x) - 1 + (\sin(\pi x) + 1)^2 + \sin(\pi x) = 0$

$(\quad)^2 + (\quad)^2 = 1 - \cos^2(4\pi x) - \sin^2(\pi x)$

$(\cos^2 \pi x \pm \cos^2 4\pi x) \quad \cos\frac{5}{2}x$

$2\cos^2(4\pi x) + 4\cos^2(2\pi x) - \cos(2\pi x) + 2\sin(\pi x) = 0$

$\cos^2(4\pi x) - \cos^2(4\pi x)$

$\cos^2(4\pi x) + 2\cos(4\pi x) + 1 - \sin^2(4\pi x)$

$\sin^2(\pi x) + 2\sin(\pi x) + 1 - \cos^2(\pi x) + 1$

$(\cos(4\pi x) + 1)^2 + (\sin(\pi x) + 1)^2 = \sin^2(4\pi x) \cancel{+} \cos^2(\pi x) \cancel{+1}$
$+ \cos^2(4\pi x)$

$(\cos(4\pi x) + 1)^2 + \cos^2(4\pi x)$

$(1 - x)^2 = 1 + x^2 - 2x + x^2$

$1 + 2x^2 - 2x$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$+2\sin^2(\pi x)-1+2\sin(\pi x)$

$2\cos^2(4\pi x)-1+2\cos(4\pi x)$

$2\cos(4\pi x)(2\cos(4\pi x)+1)+2\sin(\pi x)(2\sin(\pi x)+1)=-1$

$(4n+6)\cdot n=228$

$n;\ x,\ 2{,}5x$

$4n^2+6n-228$

288

$$\begin{cases} nx\cdot t_1=288 \\ (n+1{,}5)x\cdot t_2=288 \\ xt_1-xt_2=6 \end{cases}$$

$\underline{nxt_1-nxt_2}-1{,}5xt_2=0$

$n6=1{,}5xt_2$

$(n+1{,}5)\cancel{4}n=\cancel{288}^{72}$

$4n=xt_2$

$\cancel{4n^2+6n=288}$

$n^2+1{,}5n-72=0$

$2n^2+3n-144=0$

$D=9+4\cdot2\cdot144=$

$9+$

800
320
32
1152

1161

18-09-58-73
(197.1)

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

Черновик

$x = \frac{1}{2}$

$3 + 1$