42-13-78-97
(180.3)

Олимпиада ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 171

+1 лист

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников

по математике

Калашникова Дмитрия Сергеевича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата
«22» марта 2016 года

Подпись участника

42-13-78-97 (180.3)

Чистовик

70 (семьдесят) Дубравина ~~Дуб~~

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

№2

Пусть более медленный мальчик пробегает круг за x минут, $x \in \mathbb{N}$ по условию. Пусть длина круга a, тогда скорости мальчиков равны:

$V_б = \frac{a}{5}$ (более быстрый)

$V_м = \frac{a}{x}$ (более медл.)

При встрече более быстрый мальчик уже пробежал на 1 круг больше, чем медленный (считая от последней встречи). Пусть ~~до встречи~~ между встречами прошло t минут, $t \in \mathbb{N}$ по условию. Тогда более быстрый мальчик пробежал $\frac{a}{5} \cdot t$, а более медленный $\frac{a}{x} t$. Отсюда уравнение:

$$\frac{a}{x}t + a = \frac{a}{5}t$$

$$\frac{t}{x} + 1 = \frac{t}{5}$$

$$5t + 5x = tx$$

$$t = \frac{5x}{x-5} = \frac{5x-25+25}{x-5} = 5 + \frac{25}{x-5}$$

Т.к. $\begin{cases} t \in \mathbb{N} \\ x \in \mathbb{N} \end{cases}$, то $\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=10 \\ x=26 \end{array}\right.$ не верно, но тогда:

$\begin{cases} x=26 \\ t=6 \end{cases}$, не удовл. условию $t \geq 12$

$\begin{cases} x=10 \\ t=10 \end{cases}$, не удовл. условию $t \geq 12$

$\begin{cases} x=6 \\ t=30 \end{cases}$

Ответ: 6 минут верно

$\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}x=-\frac{5}{2}-2$

$\frac{13}{6}x=-\frac{9}{2}$

$\begin{cases} x=-\frac{54}{26} \\ y=-\frac{18}{13}+2=\frac{8}{13} \end{cases}$

Итак в точке $\left(-\frac{54}{26};\frac{8}{13}\right)$ данная сумма минимальна и оба слагаемых равны. Значит

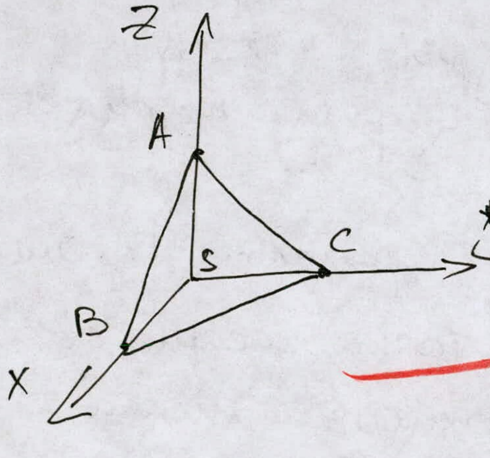
$\sqrt{(x+6)^2+y^2}+\sqrt{(y-4)^2+x^2}=2\sqrt{(y-4)^2+x^2}=2\sqrt{\left(4-\frac{8}{13}\right)^2+\frac{54^2}{26^2}}=$

$=2\sqrt{\frac{44^2}{13^2}+\frac{54^2}{26^2}}=\frac{2}{13}\sqrt{27^2+44^2}=\frac{46\sqrt{5}}{13}$ — Ошибка!

неверно

Ответ: $\frac{46\sqrt{5}}{13}$

N 5



Введем ПСК как показано на рисунке:

$S(0;0;0)$

Пусть: $A(0;0;a)$

$B(b;0;0)$

$C(0;c;0)$

$D(x;y;z)$

По условию:

$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2+z^2=10 \\ y^2+z^2=13 \end{cases}$

$x^2+y^2+z^2=14$

$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$ (т.к. все координаты положительны по построению)

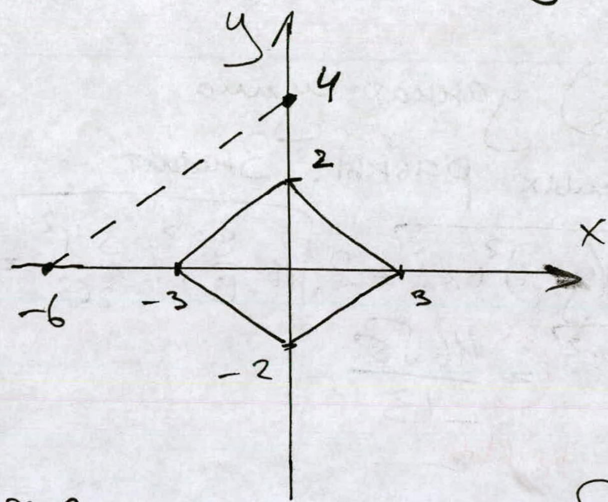
Плоскость (ABC) задается ур-ем:

$acx+aby+bcz-abc=0$

Тогда $D(1;2;3)$

– это элипс.

Построим ~~график функции~~ фигуру $2|x|+3|y|=6$ пользуясь её симметрией относительно Ox и Oy:



Сумма расстояний будет наименьшей когда элипс будет касаться левой верхней стороны получившейся фигуры (т.к. при уменьшении суммы расстояний у фигур не будет общих точек.)

Видно, что прямая $y=\frac{2}{3}x+2$ параллельна гл. оси элипса, что означает, что точка касания будет равноудалена от фокусов элипса и следовательно будет лежать на серединном перпендикуляре к отрезку AB.

Пусть C – середина AB, тогда $C(-3;2)$

$y=-\frac{3}{2}x+b$ – сер. пер-р к AB

$2=+\frac{9}{2}+b$

$b=-\frac{5}{2}$

Найдем точку касания: $\begin{cases} y=-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2} \\ y=\frac{2}{3}x+2 \end{cases}$

№1

$$\cos 1+\sin 1=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 1\right)=\sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\right)$$

1) $1<\frac{\pi}{3}$ 2) $1>\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4}+1<\frac{7\pi}{12}$ $\frac{\pi}{4}+1>\frac{\pi}{2}$

$\begin{cases}\frac{7\pi}{12}\in \text{II} \\ \frac{\pi}{4}+1\in \text{II}\end{cases}$, следовательно $y=\sin t$ убывает.

А значит $\sin\left(\frac{\pi}{4}+1\right)>\sin\frac{7\pi}{12}$

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$\sqrt{2}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \vee \frac{49}{36}$

$1+\sqrt{3} \vee \frac{49}{18}$

$18+18\sqrt{3} \vee 49$

$18\sqrt{3} \vee 31$

$972>961$

Т.е. $\sin 1+\cos 1=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+1\right)>\sqrt{2}\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}>\frac{49}{36}$

2

верно

Ответ: $\sin 1+\cos 1>\frac{49}{36}$

№3

$\sqrt{(x+6)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-4)^2}$ это сумма расстояний между точкой $M(x;y)$ и точками $A(-6;0)$ и $B(0;4)$

Геометрическое место точек с постоянной суммой расстояний до двух заданных точек –

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

42-13-78-97
(180.3)

Чистовик

№5 (продолжение)

$V=\frac{1}{3}h\cdot S=\frac{1}{3}\cdot a\cdot\frac{1}{2}b\cdot c=\frac{1}{6}abc$

Следовательно abc должно быть минимально и должно выполнятся условие:

$ac+2ab+3bc-abc=0$

$a=\frac{-3bc}{c+2b-bc}$

$V=\frac{c^2\cdot b^2}{2(bc-2b-c)}$

$V'(b)=\frac{2c^2\cdot b\cdot 2(bc-2b-c)-c^2b^2\cdot 2(c-2)}{(2(bc-2b-c))^2}=0$

$2(bc-2b-c)-b(c-2)=0$

$2bc-4b-2c-bc+2b=0$

$bc-2b-2c=0$

$bc=2(b+c)$ — Нет дальнейшего развития

Чтобы V был min $ac=2ab=3bc=\frac{1}{3}abc$

Нет обоснования

тогда $b=3$

$a=9$

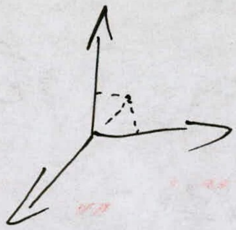
$c=6$

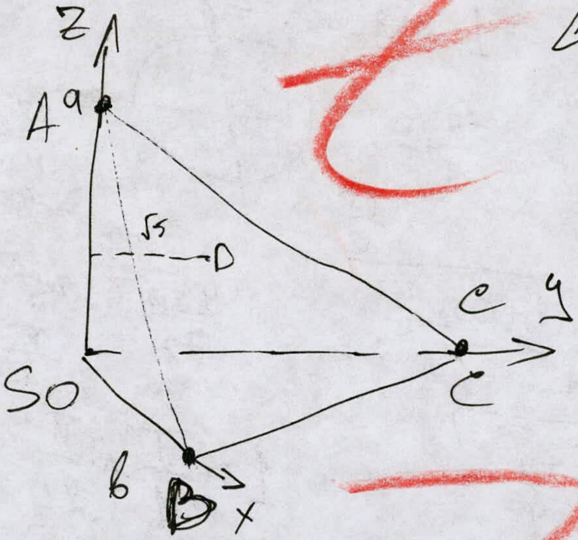
$V=27$

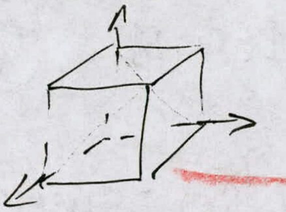
42-13-78-97
(180.3)

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

Черновик







$V'(a) = \frac{1}{6}bc$

$\boxed{ac = \frac{1}{3}abc}$

$D(x;y;z)$

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2+z^2=10 \\ y^2+z^2=13 \end{cases}$$

$x^2+y^2+z^2=14$

$b=3$

$a\ 3bc = \frac{1}{3}abc$

$V=\frac{1}{6}abc$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

$D(1;2;3)$

$Ax+By+Cz+D=0$

$A\cdot b=-D$

$A=-\frac{D}{b}$

$3\cdot 3=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot a$

$a=3$

$\boxed{ac\cdot x+aby+bcz-abc=0}$

$ac+2ab+3bc-abc=0$

$\frac{1}{b}+\frac{2}{c}+\frac{3}{a}-1$

$c(a+b)+2b(a+c)$

$a=\frac{-3bc}{c+2b-bc}$

a^2-b^2

$a^2+2a^2+3a^2-a^3=0$

$6a^2=a^3$

$a=6$

$\boxed{V=36}$

$V=\frac{b^2c^2}{2(bc-c-2b)}$

$V=\frac{4(b+c)^2}{2c}$

$V=\frac{cb^2}{2}$

$\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}x=-\frac{5}{2}-2$

$\frac{13}{6}x=-\frac{9}{2}$

$x=-\frac{54}{26}$

$y=-\frac{18}{13}+2=\frac{8}{13}$

$\cancel{\left(\frac{54}{26}+6\right)^2}$

$\frac{54^2}{26^2}+\frac{44^2}{13^2}$

$\frac{\sqrt{27^2+44^2}}{13}$

$\sqrt{529}=23$

$2\cdot\frac{23\sqrt{5}}{13}$

$(x+6)^2+y^2=x^2+(y-4)^2$

$x^2+12x+36+y^2=x^2+y^2-8y+16$

$12x+36=-8y+16$

$12x+20=-8y$

$y=-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$

$44\cdot44=1936$, $1936+729=2645$, $2645:5=529$, $529:13$

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}}{2}} \qquad \frac{6^2}{7^2}\cdot\sqrt{2} \qquad \cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=$$

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4} \qquad \frac{7^4}{6^4\cdot 2} \qquad =\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{7^4\cdot 2}{6^4}$$

$$2+\sqrt{2+\sqrt{3}} \qquad \cos\frac{\pi}{24}=\sqrt{\frac{1+\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}{2}}=$$

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \qquad \frac{2\cdot 7^4-2\cdot 6^4}{6^4} \qquad =\sqrt{\frac{2\sqrt{2}+1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}}$$

$$\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \qquad \frac{2(7^4-6^4)}{6^4}$$

$$1+\sqrt{3} \qquad \frac{2\sqrt{2}(7^4-6^4)}{6^4}$$

$$\sqrt{6}+\sqrt{2} < 4$$

$$\sqrt{3} \qquad \frac{2\sqrt{2}(7^4-2\sqrt{2}\cdot 6^4-6^4}{6^4} \qquad 8+2\sqrt{12} < 16$$

$$2\sqrt{12} < 8$$

$$0 \qquad 2\sqrt{2}\cdot 7^4-(2\sqrt{2}+1)\,6^4-\sqrt{3}\cdot 6^4 \qquad 2\sqrt{3} < 8$$

$$2\sqrt{2}\cdot 7^4-(2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)\,6^4$$

$$4\cdot 7^4-(4+\sqrt{6}+\sqrt{2})\,6^4$$

$$0 \qquad 4\cdot 7^4-8\cdot 6^4$$

$\cancel{49\cdot 49}$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times\ 49 \\ \hline 2401 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36 \\ \times\ 36 \\ \hline 216 \\ +\ 108\ \ \\ \hline 1296 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 98 \\ -\ 36 \\ \hline 62 \end{array}$$

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \qquad \frac{7^2}{6^2\sqrt{2}}$$

$$6^2(1+\sqrt{3}) \qquad 2\cdot 7^2 \qquad 1+\sqrt{3} \qquad \frac{2\cdot 7^2}{6^2} \qquad \begin{array}{r} 324 \\ \times\ \ \ 3 \\ \hline 972 \end{array}$$

$$36+36\sqrt{3} \qquad 98 \qquad \sqrt{3} \qquad \frac{2\cdot 7^2-6^2}{6^2}$$

$$36\sqrt{3} \qquad 62$$

$$18\sqrt{3} \qquad 31$$

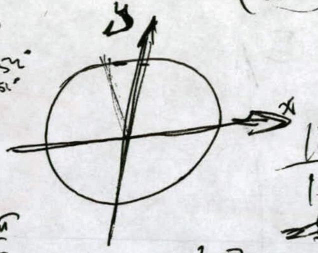
$$972 > 961$$

$\cancel{\log_2[\log_3 x]}\,[\log_3 x] = \cancel{[x]}\log_3[x]$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+1\right)$

$\sin 1 + \cos 1 \qquad \left(\frac{7}{6}\right)^2$

$1 \approx 57^\circ$



$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$

$\frac{180}{12} =$

$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right) =$

$= \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} =$

$= \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$

$\frac{49\sqrt{2}}{72} \quad 6 \quad 45^\circ \quad \frac{\pi}{12}$

$1 > \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{24}$

$\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right) > \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$

$\uparrow \quad \frac{7\pi}{24}$

$24 > 7\pi$

$\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} \vee \frac{7^2}{6^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{2}} =$

$= \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}}{2}}$

$\frac{2+\sqrt{3}}{4} \ast \frac{7^4}{6^4\, 2}$

$2+\sqrt{3} \ast \frac{7^4\cdot 2}{6^4}$

$\sqrt{3} \ast \frac{7^4\cdot 2 - 2\cdot 6^4}{6^4}$

$3 \quad \frac{4(7^4-6^4)^2}{6^8}$

$0 \quad 4(7^4-6^4)^2 - 3\cdot 6^8$

$4\cdot 7^8 - 8\cdot 7^4\cdot 6^4 + 4\cdot 6^8 - 3\cdot 6^8$

$4\cdot 7^8 + 6^8 - 8\cdot 7^4\cdot 6^4$

$4\cdot 49^4 + 36^4 - 8\cdot 42^4$

$4(49^4 - 42^4) + (36^4 - 42^4) =$

$= 4\cdot 7\cdot 91\cdot(49^2+42^2) -$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

42-13-78-97
(180.3)

5 мин $\frac{1}{5}$ $\frac{кр}{мин}$ $\frac{t}{5}$ кругов

$\frac{t}{x}$ кругов

$\frac{t}{x}+1=\frac{t}{5}$

$\frac{5t}{x}+5=t$

$5t+5x=xt$

$t=\frac{5x}{x-5}$ $x=\frac{5t}{t-5}$

$\frac{5x}{x-5}$

$\frac{5x-25+25}{x-5}=$

$=5+\frac{25}{x-5}$

$x=$ $5t+xt+5x=0$

$\frac{5x}{x-5}\geq 12$

$5x\geq$

$x=6$

$x=$

$\log_2(\log_3 x)=\frac{9}{2}$

№4

$[\log_2(\log_3 x)]^2-11\log_2([\log_3 x])+18\log_2(\log_3([x]))=0$

$\log_3 x=2^9$ $\left[\begin{array}{l} x=3^{2^9}=3^{512} \\ x=81 \end{array}\right.$

$\log_3 x=4$

$V=\frac{b^2\cdot c^2}{2(c-2)b-2c}$

$V'=\frac{2c^2\cdot b(2(c-2)b-2c)-b^2c^2(2(c-2)}{(2(c-2)b-2c)^2}=0$

$2\cancel{bc}$ $2(2(c-2)b-2c)-b(2(c-2)=0$

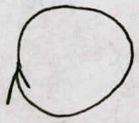
$4cb-8b-4c-2bc+4b=0$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

№2

1. 1 круг : 5 мин

2. 1 круг : ~~4~~ 6, 7 …   5   4



t минут прошло

$V_1 = \frac{a}{5\text{ мин}}$ $S = \cancel{t}a + a$

$\frac{a}{5}\cdot t$; $\frac{a}{x}\cdot t$

$V_2 = \frac{a}{x\text{ мин}}$ $S = t\cdot a$

$\frac{a}{5}\cdot t = \frac{a}{x}\cdot t + a$

$\frac{(t\cdot a + a)\cdot 5\text{ мин}}{a} = \frac{t\cdot a\cdot x\text{ мин}}{a}$

$\frac{t}{5} = \frac{t}{x} + 1$

$(t+1)5 = tx$

$5t + 5 - tx = 0$

$\begin{cases} t = \frac{5}{x-5} \\ tx \geq 12 \end{cases}$ $x = 6, 10$
$t = 5, 1$

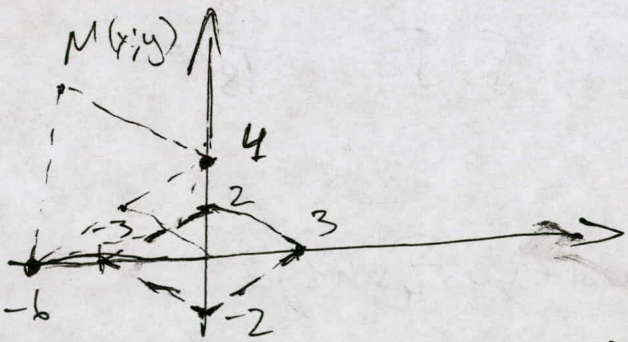
2

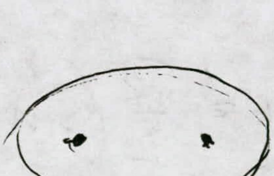
№3 $(-6;0)$ $(0;4)$ $2|x| + 3|y| = 6$

$\sqrt{(x+6)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-4)^2}$

$|y| = -\frac{2}{3}|x| + 2$

$y = -\frac{2}{3}x + 2$





$y = \frac{2}{3}x + 4$ $C(-3;2)$

$y = -\frac{3}{2}x + b$

$2 = -\frac{3}{2}\cdot -3 + b$

$2 = \frac{9}{2} + b$ $b = 2 - \frac{9}{2} = -\frac{5}{2}$

$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 2 \\ y = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \end{cases} \Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2}{3}x + 2 = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$

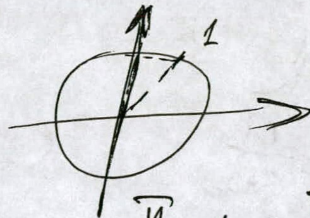
$\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}x = -\frac{5}{2} -$

Шифр

Черновик

$\frac{\pi}{2} < 1+\frac{\pi}{4} < \frac{2\pi}{3}$

$\sin 1 + \cos 1$ $\qquad \frac{49}{36}$



$\frac{\sqrt{2}}{2}\ \sin\frac{\pi}{4} < \sin 1 < \sin\frac{\pi}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{2} < \cos 1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3}$

$\frac{\sqrt{2}+1}{2} < \sin 1 + \cos 1 < \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$

$\frac{49}{36} \vee \frac{\sqrt{2}+1}{2}$

$49 \vee 18 + 18\sqrt{2}$

$31 \vee 18\sqrt{2}$

$961 > 648$

$31 \cdot 31 = 961$; $18 \cdot 18 = 324$; $324 \cdot 2 = 648$; $72 \cdot 72 = 5184$; $324 \cdot 5 = 1620$; $49 \cdot 49$

$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} \vee \frac{49}{36}$

$18\sqrt{3} + 18\sqrt{2} \vee 49$

$(50-1)^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401$

$2401 - 1620 = 781$

$18^2 \cdot 3 + 2 \cdot 18^2 \cdot \sqrt{6} + 18^2 \cdot 2 \qquad 49 \cdot 49$

$18^2 \cdot 5 + 2\sqrt{6} \cdot 18^2 \qquad 49 \cdot 49$

$2\sqrt{6} \cdot 18^2 \qquad 49^2 - 18^2 \cdot 5$

$\sqrt{3}+\sqrt{2} \qquad \frac{49}{18} =$

$648 \cdot \sqrt{6} > 781$

$\sin 1 + \cos 1 = \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos 1 + \cos\frac{\pi}{4}\sin 1\right) =$

$= \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+1\right) \qquad \frac{49}{36}$

$\frac{49\sqrt{2}}{72} \qquad 1$

$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+1\right) \qquad \frac{49}{18}$

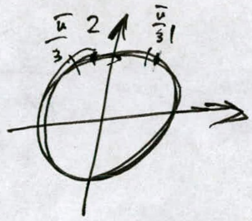
$49\sqrt{2} \qquad 72$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+1\right) \qquad \frac{49\sqrt{2}}{72}$

$2401 \cdot 2 \qquad 72^2$

4802

$\sin 1+\cos 1$ $\frac{49}{36}$ $\frac{49\sqrt{3}}{72}$



$\sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\right)$

$\left(\frac{7}{6}\right)^2$

$2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}+\cos^2\frac{1}{2}-\sin^2\frac{1}{2}$

$\left(\cos\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{2}\right)^2-2\sin^2\frac{1}{2}$

$\cancel{\sqrt{2}\frac{\pi}{4}\left(\cos\frac{1}{2}+3\sin\frac{1}{2}\right)}$

$\left(\cos\frac{1}{2}+(1+\sqrt{2})\sin\frac{1}{2}\right)\left(\cos\frac{1}{2}+(1-\sqrt{2})\sin\frac{1}{2}\right)$

$\pi\approx 3{,}1415$

$1=1$

$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$

$\cos 1+\sin 1-1$ $\frac{13}{36}$

$\cos 1-\cos^2 1+\sin 1-\sin^2 1$ $\frac{13}{36}$

$\cos 1(1-\cos 1)+\sin 1(1-\sin 1)$

$\ldots+\ldots\geqslant 2\sqrt{\sin 1\cos 1}=\sqrt{2}\sqrt{\sin 2}=\sqrt{2\sin 2}$ $\left(\frac{7}{6}\right)^2$

$\sqrt{2\sin 2}>\sqrt{2\sin\frac{2\pi}{3}}=\sqrt[4]{3}$

$\sqrt[4]{3}$ $\left(\frac{7}{6}\right)^2$ 6 36 216

7 49 3

3 $\left(\frac{7}{6}\right)^8$

$6^8\cdot 3$ 7^8