58-76-33-79
(182.4)

Олимпиада ПВГ
2016

# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
## имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 173

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

**Олимпиада школьников**

**по** математике

Камальдинова Дмитрия Артуровича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата
«22» марта 2016 года

Подпись участника

100 (сто)

# ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

58-76-33-79 (182.4)

~~95 (девяносто пять)~~

Чистовик

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

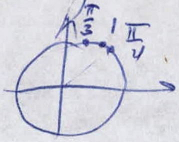
№1.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x + \cos x$

$f'(x) = \cos x - \sin x \Rightarrow f$ возрастает при $\cos x > \sin x$ и убывает при $\cos x < \sin x$.

$0 < \frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$ $\left(\pi \approx 3{,}1415\ldots \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{4}{4} = 1,\ \frac{\pi}{3} > \frac{3}{3} = 1\right)$

$1 \in$ I четверти, числа 1 и $\frac{\pi}{3}$ находятся на промежутке $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, но есть там, где $\sin x > \cos x$, $f$ убывает



$\frac{\pi}{3} > 1 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) < f(1)$

$\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} < \sin 1 + \cos 1$

$\sin 1 + \cos 1 > \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$

С другой стороны, $\frac{\sqrt{3}+1}{2} > \frac{42}{31}$, т.к.

$\sqrt{3} + 1 > \frac{84}{31}$

$\sqrt{3} > \frac{53}{31}$

$(\sqrt{3} \cdot 31)^2 > 53^2$

$3 \cdot 961 > 2809$

$2883 > 2809$

Ответ: $\sin 1 + \cos 1 > \frac{42}{31}$. верно

№2.

Пусть $t$ − время, за которое пробегает 1 круг более медленный спортсмен. $t \in \mathbb{Z}$, $t > 7$

$S$ − длина окружности.

Скорость более быстрого относительно более медленного равна $\frac{S}{7} - \frac{S}{t}$. Тогда время между встречами равно $\frac{S}{\frac{S}{7} - \frac{S}{t}} = \frac{7t}{t-7}$.

По условию $\frac{7t}{t-7} \in \mathbb{Z}$

$\frac{7t}{t-7} = 7 + \frac{49}{t-7} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{49}{t-7} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 49 \vdots\ t-7$

$t - 7 > 0,\ 49 \vdots\ t-7 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t-7=1 \\ t-7=7 \\ t-7=49 \end{array}\right.$ время между встречами равно $\Delta t = 7 + \frac{49}{t-7}$ $(\Delta t \geq 16)$

$\left[\begin{array}{l} t=8 \\ t=14 \\ t=56 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta t = 7 + \frac{49}{8-7} = 56 \\ \Delta t = 7 + \frac{49}{14-7} = 14 < 16 \\ \Delta t = 7 + \frac{49}{56-7} = 8 < 16 \end{array}\right. \Rightarrow$ $\boxed{\text{Ответ: } 56}$

Задача решена верно, ответ верный

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

# ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$

$V=\left(\frac{abc}{6}\right)_{min}$ — ?

По неравенству о средних (между средним гармоническим и средним геометрическим):

$$3=\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{\frac{1}{2}b}+\frac{1}{\frac{1}{3}c}}\le\sqrt[3]{a\cdot\frac{1}{2}b\cdot\frac{1}{3}c}=\sqrt[3]{\frac{abc}{6}}=\sqrt[3]{V}$$

$V\ge 27$, $V_{min}=27$

Минимальный объём достигается при равенстве $a=\frac{1}{2}b=\frac{1}{3}c$

$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1 \Rightarrow \frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}=\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases}a=3\\b=6\\c=9\end{cases}$ ← координаты точек A, B, C

Решение верное

Ответ: 27.

ответ верный

№4.

$[\log_3 x]\ge[\log_3 x]$ если $x=3^\ell+a+\varepsilon$ ($\varepsilon<1$, $a<3^\ell$, $a\in\mathbb{Z}$), но $\log_3(x)=\log_3(3^\ell+a)$, $[\log_3 x]=\ell$ ⇒ $15\log_2(\log_3[x])$, $8\log_2(\log_3 x)$ равенство при $a=0$ ⇒ $x=3^\ell+\varepsilon$

$$[\log_2(\log_3 x)]^2-8\log_2([\log_3 x])+15\log_2(\log_3([x]))=0$$

ОДЗ: $\begin{cases}\log_3 x>0\\ [\log_3 x]>0\\ \log_3([x])>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>1\\ \log_3 x\ge1\\ [x]>1\end{cases} = \begin{cases}x>1\\ x\ge3\\ x\ge2\end{cases} \Rightarrow x\ge3$

$[\log_2(\log_3 x)]^2=8\log_2([\log_3 x])-15\log_2(\log_3([x]))\in\mathbb{Z}$

$8\log_2([\log_3 x])-15\log_2(\log_3([x]))=\log_2([\log_3 x]^8)-\log_2(\log_3^{15}([x]))=$

$=\log_2\left(\frac{[\log_3 x]^8}{\log_3^{15}([x])}\right)\in\mathbb{Z}$ ($\in\mathbb{N}_0$, т.к. равна квадрату)

$\log_2\left(\frac{[\log_3 x]^8}{\log_3^{15}([x])}\right)=k\in\mathbb{Z}$

$[\log_3 x]^8=2^k\cdot\log_3^{15}([x])$

$\sqrt[15]{\frac{p}{q}}$ — корень многочлена $qx^{15}-p=0$ ($p,q$ — целые)

$\ell\in\mathbb{Z}$, т.к. 3 — не степень

$\log_3^{15}([x])=\frac{[\log_3 x]^8}{2^k}\in\mathbb{Q}$ ⇒ т.к. $[x]\in\mathbb{Z}$, но $[x]=3^\ell$ ($\log_3 a$, где $a\in\mathbb{Z}$ и $a\ne3^k$ — трансцендентное)

$x=3^\ell+\varepsilon$ ($0\le\varepsilon<1$)

$[\log_3 x]=[\log_3(3^\ell+\varepsilon)]=\ell$, т.к. $3^{\ell+1}>3^\ell+\varepsilon$, т.к. $\varepsilon<2\cdot3^\ell$, $\ell\ge1$

$\ell^8=2^k\cdot\ell^{15} \Rightarrow 2^k\cdot\ell^7=1$ $\ell,k\in\mathbb{Z} \Rightarrow k=0,\ \ell=1 \Rightarrow x=3+\varepsilon<4$

$[\log_2(\log_3 x)]^2=8\cdot0-15\cdot0=0 \Rightarrow \log_3 x<2 \Rightarrow 3\le x<4$ Ответ: $3\le x<4$.

ответ верный

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

$MB = MA \Rightarrow$ $\begin{cases}\sqrt{(x-3)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y+9)^2}\\ 3x-y=6\end{cases}$
$M \in RS \Rightarrow$

$\begin{cases}x^2-6x+9+y^2 = x^2+y^2+18y+81\\ 3x-y=6\end{cases}$

$\begin{cases}3y+x=-12\\ 3x-y=6 \quad | \cdot 3\end{cases}$

$10x = 18-12 = 6$

$x = 0,6$

$y = 3x-6 = 1,8-6 = -4,2$

$M(0,6;-4,2)$

Заметим, что $x>0$, а $y<0$ $\Rightarrow$ M принадлежит не только прямой RS, но также и отрезку RS.

Эта точка и является ответом.

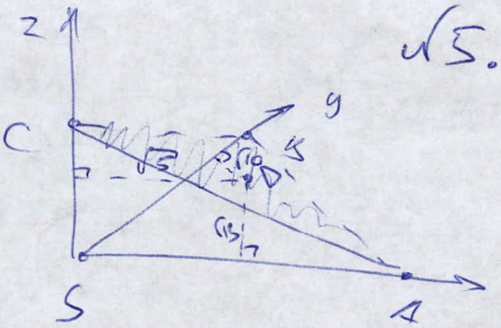
$\left(\sqrt{(x-3)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y+9)^2}\right)_{min} =$

Решение верное

$\sqrt{2,4^2+4,2^2} + \sqrt{0,6^2+4,8^2} = 2\sqrt{23,4} = 6\sqrt{2,6}$

Ответ верный

Ответ: $6\sqrt{2,6}$.




№5. Введём систему координат (прямоугольную, декартову) с началом в точке S.

$A \in Sx$
$B \in Sy$
$C \in Sz$ (по условию, SA, SB и SC взаимно перпендикулярны)

Пусть точки A, B, C имеют координаты $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$

$a>0$, $b>0$, $c>0$.

$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{SBC} \cdot AS = \frac{1}{3} \cdot \frac{bc}{2} \cdot a = \frac{abc}{6}$

($AS \perp SB$, $AS \perp SC \Rightarrow AS \perp BSC \Rightarrow AS$ высота)

Пусть точка D имеет координаты $D(x;y;z)$

Так как расстояние от D до прямой SA равно $\sqrt{13}$, то $y^2+z^2=13$ (это уравнение задаёт цилиндрическую поверхность с радиусом $\sqrt{13}$ и осью Sx) Аналогично

$\begin{cases}y^2+z^2=13\\ x^2+y^2=5\\ x^2+z^2=10\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}z^2-x^2=8\\ z^2+x^2=10\end{cases} \Rightarrow 2z^2=18$

$\begin{cases}z^2=9\\ x^2=10-z^2=1\\ y^2=13-z^2=4\end{cases}$

Так как по построению $x,y,z>0$, то $\begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=3\end{cases}$, D имеет координаты $D(1;2;3)$

Уравнение плоскости ABC в отрезках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Подставим координаты D: $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$

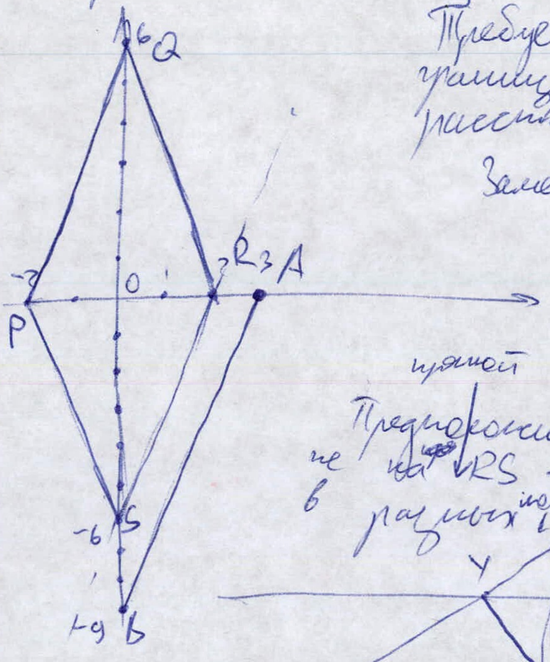
№3.

$\left(\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+9)^2}\right)_{min}$ — ?

$3|x|+|y|=6$

Рассмотрим геометрическую интерпретацию задачи.

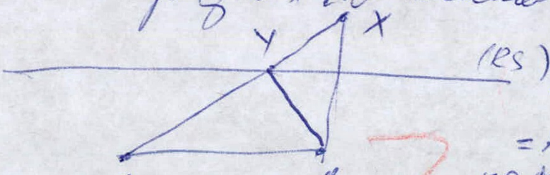
Уравнение $3|x|+|y|=6$ задаёт границу ромба.




Требуется найти точку на этой границе с наименьшей суммой расстояний до точек $A(3;0)$ и $B(0;-9)$

Заметим, что $RS \parallel AB$
(действительно, $\frac{2}{3}=\frac{-6}{-9}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{OR}{OA}=\frac{OS}{OB} \Rightarrow RS \parallel AB$)

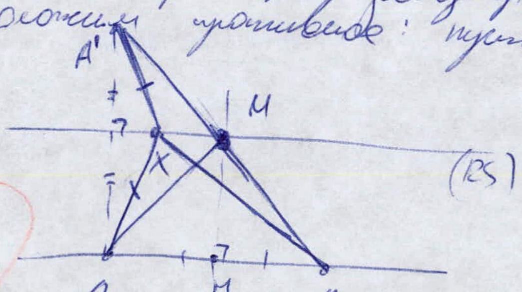
Предположим, что нужная точка $(X)$ лежит не на прямой $RS$ $\Rightarrow$ ~~...~~ $X$ и $AB$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой $RS$.




Пусть $Y = XA \cap RS$, тогда $AX+XB = AY+(YX+XB) > AY+YB$ по неравенству треугольника для $\Delta XBY$ $\Rightarrow$ $X$ не является нужной точкой. Противоречие. $\Rightarrow$ $\underline{X \in RS}$

Пусть $l$ — сер. перпендикуляр к $AB$. Докажем, что $X = l \cap RS$

Предположим противное: пусть $M = l \cap RS$, ~~...~~ $X \neq M$, $X$ — нужная:




Пусть $A'$ — точка, симметричная $A$ относительно $RS$.

$\Delta A'AB$ — прямоугольный
~~...~~
$AM=MB$, $MA=MA'$ $\Rightarrow$ $M$ — центр описанной окр $\Delta A'AB$
$M \in A'B$, т.к. $\Delta AA'B$ - прямоугольный

$AX = XA'$, т.к. $A'$ и $A$ симметричны

$AX+XB = XA'+XB > A'B$ по неравенству треугольника

$M \in A'B \Rightarrow AX+XB > A'B = AM+MB$; $AX+XB > AM+MB$

Противоречие ~~...~~

нужная точка — $\underline{\text{это } M}$

Найдём координаты точки $M$.

58-76-33-79
(182,4)

(Черновик)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

$\frac{42}{31}$ $\quad \sin 1+\cos 1$

$\sin 1+\cos 1<\sqrt{2}<\frac{42}{31}$

$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\le\sqrt{2}$

$1+\sqrt{3}\le 2\sqrt{2}$

$4+2\sqrt{3}\dots 8$

$2\sqrt{3}\dots 4$

$\sqrt{3}\dots 2$

$3\le 4$

$31 \times 31$, $31$, $93$, $961$

$1922\le 1964$

$41 \times 42$, $84$, $168$, $1964$

$\frac{5}{7}$ $\quad \frac{5}{t}$

$\frac{5}{\frac{5}{7}-\frac{5}{t}}=\frac{7t}{t-7}\in\mathbb{Z}$

$\ge 16$

$\frac{7t}{t-7}\in\mathbb{Z}$

$t\,\vdots\,7$ $\quad \frac{7t}{t-7}=7+\frac{49}{t-7}$

$t-7>0$

$t\ge 8$

$49\,\vdots\,t-7$

$t-7=1$

$t-7=7$

$t-7=49$

$56$?

$7+49$

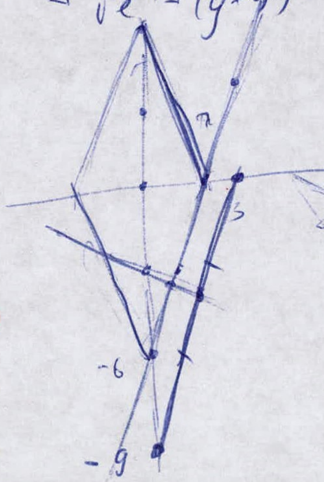
$7+7$

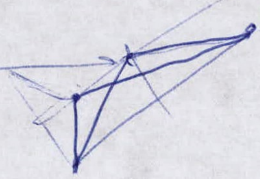
$7+1$

$\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+9)^2}$

$\rho((0,0),$

$\rho(A,(3;0))$



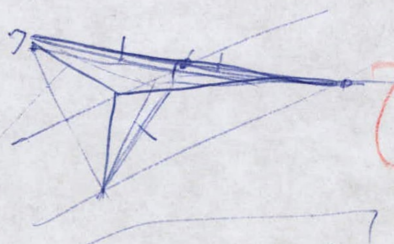


$3|x|+|y|=6$

$3x+y=6$

$3x-y=6$

$y^2=(6-3|x|)^2=36+9x^2-36|x|$



$\sqrt{x^2-6x+9+y^2}+\sqrt{x^2+y^2+18y+81}=$

$=\sqrt{10x^2-6x-36|x|+45}$

$\sqrt{(0{,}6-3)^2+(4{,}2)^2}=$

$\sqrt{25{,}40}$

$=$

$9-6x=18y+81$

$x$

$18y+6x=-72$

$3y+x=-12$

$9x-3y=18$

$10x=6$

$x=0{,}6$ $\quad y=1{,}8-6=-4{,}2$

$2{,}4$ $\quad 2{,}4 \times 2{,}4$, $96$, $48$

$41\times 42$, $84$, $168$, $1964$, $576$, $2540$

$\log_3^{15}((x)) = \frac{8}{8}$

$3^{\sqrt[15]{\frac{8}{8}}} = 5$

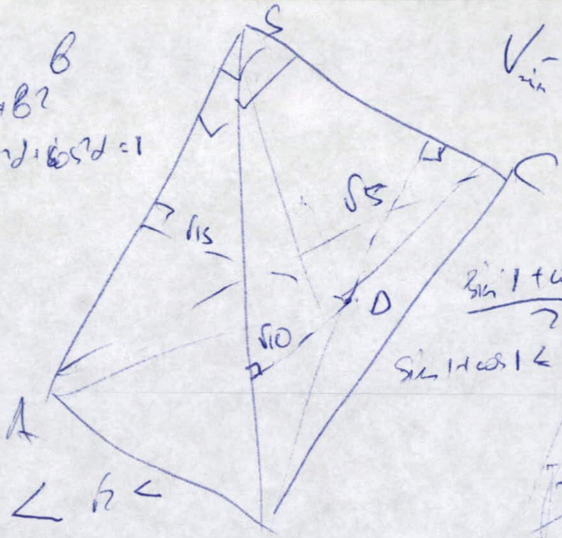
$\frac{1}{2}$ $-1$

$\log_4 2 + \log_4 \frac{1}{4} = \log_4 \frac{1}{2}$

$\log_2(\log_5 x) = 4 \pm \sqrt{16-15} = 4 \pm 1 = 5$

$= 3$

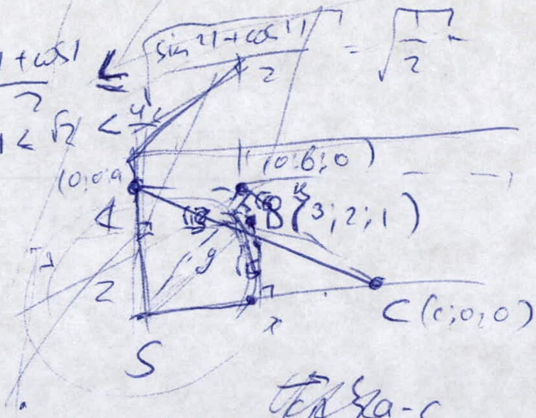
$a$ $b$
$a^2+b^2$
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$



$V_{min}-?$

$\frac{\sin 1+\cos 1}{2} \le \sqrt{\frac{\sin^2 1+\cos^2 1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sin 1+\cos 1 < \sqrt{2} < \frac{4}{\ldots}$



$47 \times 42 = 84,\ 168,\ 1764$

$31 \times 31 = 31,\ 93,\ 961$

1921

$\frac{1}{3}\cdot\left(3\cdot\frac{ab}{2}+2\cdot\frac{ac}{2}+1\cdot\frac{bc}{2}\right) = \frac{abc}{6}$

$\overrightarrow{CA}\{a-c$

$\overrightarrow{CA}\{-c;0;a\}$

$\overrightarrow{CB}\{-c;b;0\}$

$\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^2+z^2=10 \\ z^2+y^2=5 \end{cases}$

$y^2-z^2=3$
$y^2+z^2=5$
$2y^2=8$

$\begin{cases} y^2=4 \\ x^2=9 \\ z^2=1 \end{cases}$

$\overrightarrow{CD} = k\cdot\overrightarrow{CA}+l\cdot\overrightarrow{CB}$

$\begin{cases} 3=-kc-lc \\ 2=bl \\ 1=ka \end{cases}$

$y=$ $x=$ $z=1$ $k=\frac{1}{a}$ $l=\frac{2}{b}$

$\frac{x}{c}+\frac{y}{b}+\frac{z}{a}=1$

$\frac{3}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{x}{3}$

$\frac{1}{3}c$ $\frac{1}{2}b$

$\le \sqrt[3]{\frac{1}{6}abc}$

$27 \le \frac{1}{6}abc$

$abc \ge 6\cdot 27$

$\frac{1}{3}c=\frac{1}{2}b=\frac{1}{a}$

$3=-c\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)= -c\cdot\frac{b+2a}{ab}$

$abc = 3ab+2ac+bc$

$abx+acy+bc\,z-abc=0$

$h=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}=\frac{abc}{abc\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}$

$3ab=-cb-2ac$

$3ab+2ac+cb=0$

$\overrightarrow{SD}=z\cdot\overrightarrow{SA}+y\cdot\overrightarrow{SB}+x\cdot\overrightarrow{SC}$

$z+y+x=1$

27

$\frac{x}{9}+\frac{y}{6}+\frac{z}{3}=1$

$3=xc$
$2=yb$
$1=za$

$\frac{1}{3}c=\frac{1}{2}b=\frac{1}{a}$

$3b=6a$

3 2 1

c

$\frac{3}{c}+\frac{2}{b}+\frac{1}{a}=1$

$\frac{3}{c}=\frac{1}{3}$

$c=9$

$b=6$ $a=3$

# ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$\left[\log_2(\log_3 x)\right]^2 - 8\log_2([\log_3 x]) + 15\log_2(\log_3([x])) = 0$

$\log_3[x] = [\log_3(x)]$

$x \geq 3$

$3^k = [x]$

$[x] > 0$

$x \geq 1$

$3^l = \log_3 x$

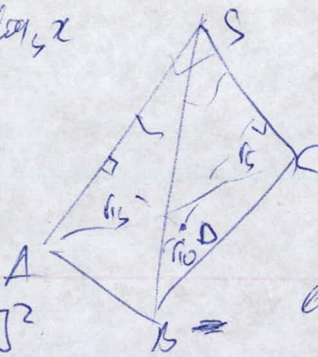
$[\log_3 x] > 0$

$\log_3 x \geq 1$

$x \geq 3$

$\log_3[x] < [\log_3 x]$

$\log_3[x] \leq \log_3 x$



$\log_2$

$[\log_2(\log_3 x)]^2 = \log_2\left(\frac{(\log_3[x])^{15}}{[\log_3 x]^8}\right) = 0$

$\left[\log_2(\log_3 x)\right]^2 = 8\log_2([\log_3 x]) - 15\log_2(\log_3[x])$

$= \log_2\left(\frac{[\log_3 x]^8}{(\log_3[x])^{15}}\right) \in \mathbb{Z}$

$\geq 0$

$\log_3 x \geq 1$

$2^k$

$\cancel{x=1}$

$\frac{[\log_3 x]^8}{(\log_3[x])^{15}} = 2^k \in \mathbb{Z}$

$[\log_3 x]^8 = 2^k \cdot (\log_3[x])^{15}$

$\log_3[x] \in \mathbb{Q}$

$[x] = 3^l$

$\in \mathbb{Z}$

$x = 3^l + \varepsilon$, $\varepsilon < 1$, $\varepsilon \geq 0$

$x = 3^l + \varepsilon$

$\log_3 x = \frac{p}{q}$

$3^{\frac{p}{q}} < x$

$\log_3 x$

$3^l < x$

$l^8 = 2^k \cdot l^{15}$

$3^{l+1} > 3^l + \varepsilon$

$2^k \cdot l^7 = 1$

$l = 1$, $k = 0$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Черновик



$0 < 1 < \frac{\pi}{2} \approx 1,5\ldots$

$1 \in$ I четверти на тригонометрическом круге

По неравенству о средних $\sin 1 > 0$, $\cos 1 > 0$

$\frac{\sin 1 + \cos 1}{2} \leq \sqrt{\frac{\sin^2 1 + \cos^2 1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sin 1 + \cos 1 \leq \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

С другой стороны, $\frac{42}{31} > \sqrt{2}$, т.к. $42 > 31\sqrt{2}$, $42^2 > 31^2 \cdot 2$

$\sin 1 + \cos 1 \ldots \frac{42}{31} = 1$

$\frac{\sin 1 + \cos 1}{2} \leq \sqrt{\frac{1}{2}\sin 2}$

$\sqrt{2}\sqrt{\sin 2} \ldots \frac{42}{31}$

$\sqrt{2}$

$\frac{\pi}{4} \ldots 1$

42 : 31 = 1,354

$\sin 2 \ldots \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\pi < \frac{2\pi}{3}$ $1{,}2 \; \frac{\pi}{3}$

$\sin 2 > \sin\frac{\pi}{3}$

$\sin 2 > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt{3}$ $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$\sqrt{2} \; \frac{3\pi}{4} \ldots 2$

$(\sin x + \cos x)^{3\pi} \ldots 8$

$\frac{\pi}{3} > 1$ $1 > \frac{\pi}{4}$

$f(\frac{\pi}{3}) > f(1) > \frac{\pi}{4}$

$= \cos x - \sin x < 0$ $\frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{4}$

$\sin 1 + \cos 1 > \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} > \frac{42}{31}$

$\sqrt{3} > \frac{84}{31}$

$\sqrt{3} > \frac{53}{31}$

53 · 53 = 2809

461 · 3 = 2883 > 2809

$\log_3 5$

$e^8 = e^{15}$

$[\log_3 x] = 4$

$x = 3^4 + \varepsilon$

$\log_3 x > 4+1$

$\log_3(3^4+\varepsilon) > 4+1$

$3^{4+1} \leq 3^4 + \varepsilon$

$\frac{5}{51 \cdot 9} = \frac{5}{211} = \frac{01}{422}$

$11{,}7 \cdot 5{,}2 = 22{,}2 + 0{,}2 = 23{,}4$

## ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$\log_3[x] \geqslant [\log_3 x]$

$x = 3^e + \varepsilon$

$3^e + a + \varepsilon$

$\log(3^e + a) \geqslant e$

$a = 0$