г. Йошкар-Ола

77-99-80-19
(197.1)

Олимпиада ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7-2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Покори Воробьёвы горы!"

по математике

Князева Леонида Павловича

фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата

«27» марта 2016 года

Подпись участника

Княз

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

77-99-80-19 (197,1)

Чистовик

75 Семьдесят пять

80 (восемьдесят) (Кочубей)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

1	2	3	4	5	Σ
∓	+	+.	+	15 ±	

№1.

$$\left(\frac{x+1}{x^2+2xy+y^2}-\frac{1}{x^2-y^2}\right)\cdot\frac{(x-y)^2}{x^2-2y-xy}+\frac{y-x}{(x-y)^2}=\left(\frac{x+1}{(x+y)^2}-\frac{1}{(x+y)(x-y)}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{(x-y)^2}{x^2-2y-xy}-\frac{x-y}{(x-y)^2}=\left(\frac{(x+1)(x-y)-(x+y)}{(x+y)^2(x-y)}\right)\cdot\frac{(x-y)^2}{x^2-2y-xy}-\frac{1}{x-y}=$$

$$=\left(\frac{x^2-xy+\cancel{x}-y-\cancel{x}-y}{(x+y)^2(x-y)}\right)\cdot\frac{(x-y)^2}{x^2-2y-xy}-\frac{1}{x-y}=\frac{x-y}{(x+y)^2}-\frac{1}{x-y}=$$

$$=(\cancel{x}-y)\left(\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{1}{(x-y)^2}\right)=(x-y)\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}\right)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}\right)=$$

$$=\cancel{\frac{1}{x-y}}\left(\frac{x-y}{x+y}-1\right)\left(\frac{x-y}{x+y}+1\right)=\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2-1=A$$

x−y

при $x=\frac{1}{3}$ и $y=\frac{8}{3}$ выражение $A=\left(\frac{7\cdot}{3\cdot\cancel{3}}\right)^2-1=\frac{49}{9}-\frac{9}{9}=\frac{40}{9}$

x − y

Неверный ответ

Ответ.

№2. $(1-x)^{(\log_{\sin 7}\sqrt{1-x})^{-1}}>\log_{(-3x)}(1-x)-\cos^2 7$

$1-x\geq 0$ − подкоренное выр-ие
$x\leq 1$

$-3x>0$ и $-3x\neq 1$
$x<0$ $\quad x\neq -\frac{1}{3}$
осн-ие логарифма

$1-x>0$
$x<1$ − подлогарифм. выр-ие

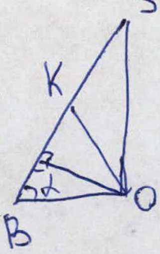
Теперь $(1-x)^{(\log_{\sin 7}\sqrt{1-x})^{-1}}=(1-x)^{\frac{1}{\log_{\sin 7}\sqrt{1-x}}}=(1-x)^{\log_{\sqrt{1-x}}\sin 7}=$

$=(1-x)^{\log_{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\sin 7}=(1-x)^{2\log_{1-x}\sin 7}=\left((1-x)^{\log_{1-x}\sin 7}\right)^2=\sin^2 7$

Неравенство принимает вид

$\sin^2 7>\log_{(-3x)}(1-x)-\cos^2 7$

$\log_{(-3x)}(1-x)<1$



Найду точку K, по которой сфера пересекает SB.

$OK = R$.

Т.к. $tg(\angle SBO) = tg\,\alpha = \frac{SO}{BO} = \frac{5}{2}$ и α – острый, то

$$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{25}{4}$$

$$25\cos^2\alpha = 4 - 4\cos^2\alpha$$

$$29\cos^2\alpha = 4$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

Теперь из р/б △KOB: $KB = 2\cdot BO\cdot\cos\alpha = 2\cdot\frac{a^{\cancel{2}}\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{29}}$

Итак, искомое отношение $\frac{SK}{KB} = \frac{SB-KB}{KB} = \frac{SB}{KB} - 1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{29}}{2}\cdot$

$\cdot\frac{3\sqrt{29}}{4a^2\sqrt{3}} - 1 = \frac{\cancel{3}\cdot 29}{\cancel{3}\cdot 4\cdot 2} - 1 = \frac{29}{8} - \frac{8}{8} = \frac{21}{8}$ – Ответ.

Верно

№3. Пусть x кв.м/ч – произв-ть к. из учеников (по усл. они равны)

($N \in \mathbb{N}$) N учеников – количество учеников, к. работали

t ч – время, к. работали все ученики и мастер,

тогда $3x$ кв.м/ч – произв-ть мастера

$3x\cdot t$ кв.м. – покрасил мастер

$\frac{330}{N+1}$ кв.м. – планировалось покр. каждым учеником, если бы работали $N+1$ учеников (один ученик не заболел бы)

(т.к. у учеников одинак. произв-ть)

$x\cdot t$ кв.м. – покрасил к. из учеников, работал с мастером

Т.к., работая с мастером, к. из учеников покрасил на 5 кв.м. меньше, (чем „работая без мастера" – как планировалось), то уравнение:

$$\frac{330}{N+1} - xt = 5 \quad ①$$

Т.к., работая с мастером, они в итоге покрасили всё, то уравнение:

$$N\cdot x\cdot t + 3x\cdot t = 330 \quad ②$$

$① \Rightarrow xt = \frac{330}{N+1} - 5$

Теперь ②: $(N+3)\left(\frac{330}{N+1} - 5\right) = 330$

(II) $4\pi x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m$ или $4\pi x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $m, n \in \mathbb{Z}$

первые полож. корни: $4\pi x = \frac{2\pi}{3}$ или $4\pi x = \frac{4\pi}{3}$

$4\pi x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi$ $\quad 4\pi x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi$

$4\pi x = \frac{2\pi}{3} + 4\pi x$ или

$4\pi x = \frac{4\pi}{3} + 4\pi x$ $\quad 4\pi x = \frac{2\pi}{3} + 6\pi$ $\quad 4\pi x = \frac{4\pi}{3} + 6\pi$

$4\pi x = \frac{2\pi}{3} + 8\pi$ $\quad 4\pi x = \frac{4\pi}{3} + 8\pi$

аналог. (I) не рассматрив.

Итак, $x = \frac{1}{6}$ или $x = \frac{1}{3}$ или $x = \frac{2}{3}$ или $x = \frac{5}{3}$ или больше

Заметим, что решением на $[0; 2]$ будет только $x = \frac{1}{6}$ (пересеч. решений (I) и (II))

По предыдущему корнями ур-ия будут $x = \frac{1}{6}$, $x = \frac{1}{6} + 2$, $x = \frac{1}{6} + 4$ и т.д.

Найдем сумму первых ста членов этой арифм. прогрессии

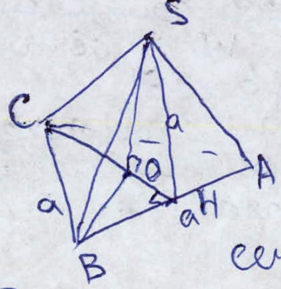
$a_1 = \frac{1}{6}$, $d = 2$

ЭТО НЕ СУММА ПЕРВЫХ 100 НАИМ. КОРНЕЙ

$S_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 = \frac{\frac{1}{6} + (100-1)\cdot 2}{2} \cdot 100 = \left(\frac{1}{12} + 99\right)\cdot 100 = 9900 + \frac{100}{12} =$

$= 9900 + \frac{25}{3} = \frac{29725}{3}$ – ответ.

№4. Пусть стороны нижнего осн-ия по a (р-ст. треугольник, т.к. пирамида пр-я).



Т.к. центр рассматриваемой сферы (т. O) лежит на осн-ии и верш. осн-ия принадлежат сфере, то $\triangle ABC$ вписан в диам. сечение сферы.

Для р-ст. $\triangle ABC$ радиус опис. окр-ти: $R = \frac{a\sqrt{3}\cdot 2}{2\cdot 3} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = OB$

Т.к. пирамида пр-ая, то SO - высота. Проведу в $\triangle ABC$ CH высоту

$OH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ - рад. впис. окр-ти р-ст. т-ка

Из прямоуг. т-ка SOH, зная, что двугранный угол SHO равен по усл. arctg5, имеем $\frac{SO}{OH} = 5 \Rightarrow SO = 5OH = \frac{5a\sqrt{3}}{6}$

Теперь в прямоуг. т-ке SOB: $SB = \sqrt{OB^2 + SO^2}$ по т. Пифагора

$SB = \sqrt{\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{25}{4}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{29}}{2}$

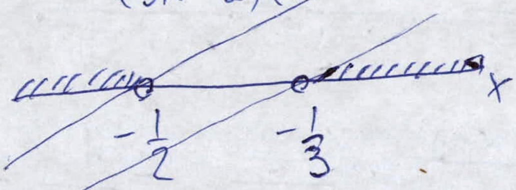
$\log_{(-3x)}(1-x) < \log_{(-3x)}(-3x)$

$\Updownarrow$ (по теореме о рационализации)

$(-3x-1)(1-x-(-3x))<0$

$(-3x-1)(1-x+3x)<0$

$(3x+1)(2x+1)>0$



Учитывая ①, Ответ: $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{3}; 0)$ ВЕРНО

№5. $\cos(8\pi x)+2\cos(4\pi x)-\cos(2\pi x)-2\sin(\pi x)+3=0$

$2\cos^2(4\pi x)-1+2\cos(4\pi x)-2\sin(\pi x)-(1-2\sin^2(\pi x))+3=0$

$2\cos^2(4\pi x)+2\cos(4\pi x)-1-2\sin(\pi x)-1+2\sin^2(\pi x)+3=0$

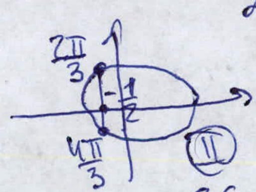
$2\cos^2(4\pi x)+2\cos(4\pi x)+\frac{1}{2}+2\sin^2(\pi x)-2\sin(\pi x)+\frac{1}{2}=0 \quad |:2$

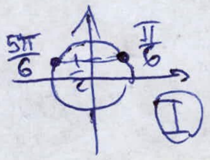
$\left(\cos(4\pi x)+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sin(\pi x)-\frac{1}{2}\right)^2=0$

$\Updownarrow$

$\cos(4\pi x)+\frac{1}{2}=0 \qquad \sin(\pi x)-\frac{1}{2}=0$

$\cos(4\pi x)=-\frac{1}{2} \qquad \sin(\pi x)=\frac{1}{2}$





Заметим, что $f(x)=\cos(8\pi x)+2\cos(4\pi x)-\cos(2\pi x)-2\sin(\pi x)+3$

периодична $T=2$, т.к. $\cos(8\pi x)=\cos(8\pi(x+2))=\cos(8\pi x+16\pi)$

$\cos(4\pi x)=\cos(4\pi(x+2))=\cos(4\pi x+8\pi)$

$\cos(2\pi x)=\cos(2\pi(x+2))=\cos(2\pi x+4\pi)$

$\sin(\pi x)=\sin(\pi(x+2))=\sin(\pi x+2\pi)$

(I) $\pi x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$ или $\pi x=\frac{5\pi}{6}+2\pi p$, $k,p \in \mathbb{Z}$

первые положительные корни: $\pi x=\frac{\pi}{6}$ или $\pi x=\frac{5\pi}{6}$

$\pi x=\frac{\pi}{6}+2\pi \qquad \pi x=\frac{5\pi}{6}+2\pi$

уже не удовлетворяют, т.к. при этом $x>2$, а мы ищем корни на первом полном периоде $[0;2]$

т.е. $x=\frac{1}{6}$ или $x=\frac{5}{6}$

77-99-80-19 (197.1)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

Чистовик

~~Т.к. $N \in \mathbb{N}$~~, то, учитывая, что

~~$N+3 \in \mathbb{N}$ и $330 \in \mathbb{N}$, получаем~~: ~~$330 \vdots (N+1)$~~

~~330~~

~~$330 = 3 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 5$~~

Т.к. $N+3>0$, то $\frac{330}{N+1} - 5 > 0$

$330 > 5(N+1)$

$N+1 < 66$

$N < 65$

②: $(N+3)(330-5N-5) = 330N + 330$

$\cancel{330N} - 5N^2 - 5N + 990 - 15N - 15 = \cancel{330N} + 330$

$-5N^2 - 20N + 645 = 0$

$5N^2 + 20N - 645$

$N^2 + 4N - 129 = 0$

$(N-3)(N+43) = 0$

$N = 3$ или $N = -43$

удовл. $N \in \mathbb{N}$ не удовл. $N \in \mathbb{N}$

Ответ: работало 3 ученика

$645 : 5 = 129$

ар. ошибка

В черновике верно найден Д.

77-99-80-19
(197.1)

Черновик

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

$(x+1)(x-y)-x-y=x^2-xy+\cancel{x}-y-\cancel{x}-y$

$\frac{(x-y)}{(x+y)^2}-\frac{(x-y)}{(x-y)^2}$

$(x-y)\left(\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{91}{49(x-y)^2}\right)$

$(1-x)^{\log_{\sqrt{1-x}}\sin 7}=(1-x)^{\log_{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\sin 7}$

$-\frac{7}{3}\cdot\frac{49-81}{9\cdot 49\,7}$

81
49
32

$\frac{81-49}{21\cdot 9}$ $\frac{32}{189}$

$\left((1-x)^{2\log_{1-x}\sin 7}\right)^2$

$\sin^2 7$

23
23
69
46
529

$1>\log_{(-3x)}(1-x)$

$\log_{(-3x)}(-3x)>\log_{(-3x)}(1-x)$

$(-3x-1)(-3x-(1-x))>0$

$(3x+1)(2x+1)>0$

129 | 3
12 | 43

$\cancel{(x-43)(x-3)}$

16+516

532

$-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{3}$ x

ограничения

$(x+43)(x+3)$

x ед/ч - уч.

3x ед/ч - маст.

~~8-час~~ t-время

$$\begin{cases} Nx\cdot t+3x\cdot t=330 \\ \frac{330}{N+1}-x\cdot t=5 \end{cases} \Rightarrow xt=\frac{330}{N+1}-5$$

шт-сб $\frac{330}{N+1}$

$\frac{330}{N+1}>5(N+1)$

330 $N<66$

$N\cdot\left(\frac{330}{N+1}-5\right)+3\left(\frac{330}{N+1}-5\right)=330 \quad |\cdot(N+1)\neq 0$

25
14
100
25
350

$\cancel{330}-5N+\frac{990}{N}-15=\cancel{330} \quad |\cdot N\neq 0$

$-5N^2+990+15N=0$

990 | 5
5 | 198
49
45
40
40
0

32 · 6

$N^2-198N+3=0$

105

$(N+3)(330-5N-5)=330(N+1)$

$N=13.$

$[0;\frac{1}{2}]$

$2\cos^2 4\pi x - 1 + 2(2\cos^2 2\pi x - 1)$

$-2 \qquad +2$

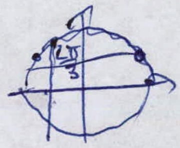
$2\cos^2 4\pi x + 4\cos^2 2\pi x - \cos 2\pi x - 2\sin \pi x = 0$

$-(\cancel{1}^{4} - 2\sin^2 \pi x)$

$2\cos^2 4\pi x + 2\cos 4\pi x + \frac{1}{2} + 2\sin^2 \pi x - 2\sin \pi x + \frac{1}{2} = 0$

$\cos^2 4\pi x + \cos 4\pi x + \frac{1}{4} + \sin^2 \pi x - \sin \pi x + \frac{1}{4} = 0$

$(\cos 4\pi x + \frac{1}{2})^2 + (\sin \pi x - \frac{1}{2})^2 = 0$



$\cos 4\pi x = -\frac{1}{2} \qquad \sin \pi x = \frac{1}{2}$

$4\pi x = \frac{2\pi}{3} \qquad \pi x = \frac{\pi}{6}$

$x = \frac{1}{6} \qquad x = \frac{1}{6}$

$\times\; 99$
$\quad 3$
29700

$\cancel{1-2\sin^2 4\pi x = 1}$

$2\cos^2 4\pi x - 1 = 2(2\cos^2 2\pi x - 1)^2 - \cancel{1 = 2(2(2\cos^2 \pi x}$

$2(2(1-2\sin^2\pi x)^2-1)^2-1 = \cancel{2(1-4\sin^2\pi x) - 1 - 8\sin^2\pi x}$

$2(2\cos^2 2\pi x - 1) = 2(2(1-2\sin^2\pi x)^2-1) \cancel{= 2 - 8\sin^2\pi x}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$-2\sin 5\pi x\cdot\sin 3\pi x$

$\cos(\frac{\pi}{2}-\pi x)$

$2(\cos 4\pi x - \sin\pi x) = -4\sin(\frac{3}{2}\pi x + \frac{\pi}{4})\cdot\sin(\frac{5}{2}\pi x - \frac{\pi}{4})$

$3\pi x$ $5\pi x - \frac{\pi}{2}$

$-8\sin\frac{5\pi x}{2}\cdot\cos\frac{5\pi x}{2}\cdot\sin\frac{3\pi x}{2}\cdot\cos\frac{3\pi x}{2}$

$-4(\sin\frac{3\pi x}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\frac{3\pi x}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})(\sin\frac{5\pi x}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\frac{5\pi x}{2}\frac{\sqrt{2}}{2})$

$-2\sin\frac{3\pi x}{2}\cdot\sin\frac{5\pi x}{2}(1 + \quad)$

$2\cos^2 4\pi x - 1 + 2\cos 4\pi x \quad \cancel{(2\cos^2\pi x - 1 + 2\sin\pi x)}$

$-(1-2\sin^2\pi x + 2\sin\pi x) + 3 = 0$

$\cancel{2(\cos^2 4\pi x}$

$2(\cos^2 2\pi x - \sin^2 2\pi x) + \cancel{2\sin 2\pi x)}$

$\cos^2\pi x$

$2(\cos 4\pi x - \sin\pi x)$

$\cancel{330N} - 5N(N+1) + \cancel{990} - 15(N+1) = 330\cancel{(N+1)}$ $\quad -660$

$-\underline{5N^2} - 5N + 990 - 15N - 15 = 330$

$5N^2 + 20N - 645 = 0$

$N^2 + 4N - 129 = 0$

$645 \div 5 = 129$

$129 \cdot 4 = 516$

$16 + 516$

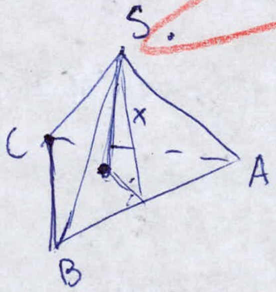
$\cancel{532 \div 4 = 133}$

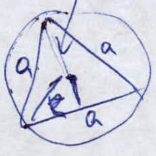
$\cancel{532 \div 22}$

$\cancel{532 \div 26}$

990
345
645

$532 \div 4 = 133$



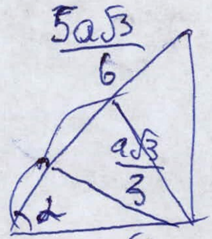


$\frac{a\sqrt3}{2}$

$\frac{a\sqrt3}{2\cdot3}$

$\frac{a\sqrt3}{6}$

$\frac{x\cdot6}{a\sqrt3} = 5$ $\qquad x = \frac{5a\sqrt3}{6}$



$R = \frac{a\sqrt3}{\cancel{2}\cdot3}$

$\frac{5a\sqrt3}{6}$ $\quad \frac{a\sqrt3}{3}$ $\quad \frac{a\sqrt3}{3}$

$tg\,\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{5}{2}$ $\qquad tg\,\alpha = \frac{5\cancel{a\sqrt3}\cdot3}{2\cancel{6}\cdot\cancel{a\sqrt3}} = \frac{5}{2}$

$\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{25}{4}$

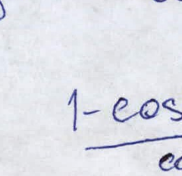
$25\cos^2\alpha = 4 - 4\cos^2\alpha$

$4 = 21\cos^2\alpha$

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}$ $\quad \frac{2\sqrt{21}}{21}$

$\frac{a\cancel{\sqrt3}\cdot2\cdot\sqrt7}{3\cancel{\sqrt3}\cdot\sqrt7} = \frac{4a}{3\sqrt7}$

$t\sqrt{26}$



$\frac{a\sqrt3}{3}\cdot\sqrt{26}$

отн-ие: $\dfrac{\frac{a\sqrt{78}}{3}}{\frac{4a\sqrt7}{21}}$

$\frac{\cancel{a}\sqrt{78}\cdot\cancel{21}\,7}{\cancel{3}\cdot4\cancel{a\sqrt7}} - 1 = \frac{\sqrt{78\cdot7}}{4} - 1$