69-80-20-26
(114.1)

Олимпиада ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

город Уфа

Вариант 3 - 1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьёвы Горы

по математике

Кобелева Максима Олеговича

фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

$17^{40} - 17^{45}$

Дата
«13» марта 2016 года

Подпись участника

69-80-20-26 (114.1)

Чистовик

1	2	3	4	5
+.	+	∅	+	±

Глеб

75

семьдесят пять

Вагизов (Вагизов)

№1 $x^3+2y^2=2016.$

$\Rightarrow x^3 \vdots 2 \quad \Rightarrow x \vdots 2 \quad \Rightarrow x=2k \quad \Rightarrow x^3=8k^3$

$8k^3+2y^2=2016$

$4k^3+y^2=1008$

$\Rightarrow y^2 \vdots 2 \quad \Rightarrow y \vdots 2 \quad \Rightarrow y=2l \quad \Rightarrow y^2=4l^2$

$4k^3+4l^2=1008$

$k^3+l^2=252$

т.к. x и y - натур $\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\{k\}=0\\ \{k\}=0,5\end{array}\right.$? $\left[\begin{array}{l}\{l\}=0\\ \{l\}=0,5\end{array}\right.$?

дробная часть.

этого же не бывает.

Пусть k такое, что

$\{k\}=0,5 \Rightarrow \{k^3\}=0,125. \Rightarrow \{l\}=0$ - не уд

нет

$\{l\}=0,5$ - не уд

т.к. $k^3+l^2=252$, $252 \in Z$.

$\Rightarrow \{k^3\}+\{l^2\} \in Z \quad \Rightarrow \{k\}=0; \{l\}=0.$

(если $\{l\}=0,5$, то $\{l^2\}=0,25.$

$\Rightarrow k$ и l тоже $\in N$.

$k=1 \Rightarrow k^3=1 \Rightarrow l^2=251 \quad l \notin N$ - не уд

$k=2 \Rightarrow k^3=8 \Rightarrow l^2=244 \quad l \notin N$ - не уд

$k=3 \Rightarrow k^3=27 \Rightarrow l^2=225 \quad l=15$ - уд

$k=4 \Rightarrow k^3=16 \Rightarrow l^2=188 \quad l \notin N$ - не уд

$k=5 \Rightarrow k^3=125 \Rightarrow l^2=127 \quad l \notin N$ - не уд.

$k=6 \Rightarrow k^3=216 \Rightarrow l^2=36 \quad l=6$ - уд.

$k=7 \Rightarrow k^3=343$ - не уд; $252<343$.

$k>7$ - не уд. т.к $k^3 +y^2 > 252.$

$\Rightarrow$ для k и l корни $(3;15)$; $(6;6)$.

$\Rightarrow$ для x у y $(x=2k; y=2l)$ корни $(6;30)$; $(12;12)$.

Ответ: $(6;30)$; $(12;12)$.

Черновик

1). $x^3+2y^2=2016$ $\quad x^3 \vdots 2 \Rightarrow x=2k \Rightarrow x^3=8k$

$8k^3+2y^2=2016$

$4k^3+y^2=1008$ $\quad y^2 \vdots 4 \Rightarrow y^2=4l^2$ $\quad x=2k$, $y=2l$

$4k^3+4l^2=1008$ $\quad a+2b=2016$

$k^3+l^2=252$

$1^3=1 \Rightarrow l^2=251$ - не уд

$2^3=8 \Rightarrow l^2=244$ - не уд.

$3^3=27 \Rightarrow l^2=225$

$4^3=64 \Rightarrow l^2=188$ - не уд

$5^3=125 \Rightarrow l^2=127$ - не уд

$6^3=216$ - уд. $l^2=36$.

$7^3=343$ - не уд.

$12\cdot12=144$, $13\cdot13=169$, $14\cdot14=196$, $15\cdot15=225$, $16\cdot16=256$.

Ответ: $k=3 \Rightarrow x=6$; $l=15 \Rightarrow y=30$; $k=6 \Rightarrow x=12$; $l=6 \Rightarrow y=12$

$(6;30)$; $(12;12)$.

2). $\dfrac{b_1(q^5-1)}{q-1}=93$ (1) $\quad \dfrac{b_1 q^5(q^5-1)}{q-1}=2976$ (2) $\quad \sum 7$ чл $-$?

$2976 : 93 = 32$

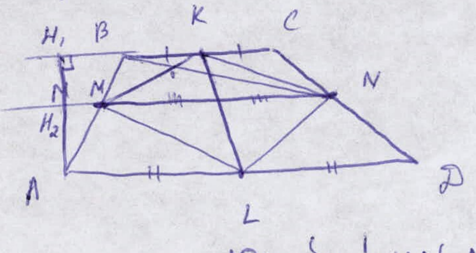
$\Rightarrow (2):(1) \Rightarrow q^5=32$

$q=2$.

$\dfrac{b_1\cdot 31}{1}=93 \Rightarrow b_1=3$.

Ответ: Σ первых 7 $=381$.

$\dfrac{b_1\cdot(q^7-1)}{q-1}=\dfrac{3\cdot127}{1}=381$

3). 

$\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{10}{1}$ $\quad MN \parallel AD \parallel BC$ $\quad \dfrac{AM}{MB}$ - ?

$S_{BKN}+S_{MNL}=\max$.

$\dfrac{H_1H_2}{AH_2}=\dfrac{MB}{AM}$

$a;\ b;\ \dfrac{a+b}{2}$

$\dfrac{1}{1}=\dfrac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-b^2}{a^2-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}=\dfrac{(a+b)^2-4b^2}{4a^2-(a+b)^2}=\dfrac{(a-b)(a+3b)}{(3a-b)(3a+b)}$

$10x$ $\quad S=\dfrac{1}{2}MN\cdot AH_2+\dfrac{1}{2}H_1H_2\cdot BK=$

$=S_{трап}-S_{BMN}-S_{CKN}-2S_{AML}$

$S_{MKN}=S_{MON}+S_{OKN}=\dfrac{BK^2}{MN^2}\cdot S_{BOK}+S_{KON}$

$S_{BMN}=\dfrac{H_1H_2}{AH_2}\cdot S_{MNL}$ $\quad \dfrac{AM}{MB}\cdot S_{BMN}=S_{MNL}$

$\dfrac{AM}{MB}\cdot S_{BMN}+\dfrac{1}{2}\cdot S_{BNC}=\dfrac{MA}{MB}\cdot S_{BMN}+S_{BMNC}-S_{BMN}=S_{BNC}-S_{BMN}\left(\dfrac{MA}{MB}-1\right)$

Черновик!

$\sqrt{\sin 2x} > (\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x) + \sin x \cos x(\sin x - \cos x)$ $\quad \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$\sqrt{\sin 2x} > (\cos x - \sin x)(\sin x \cos x + 1 - \cancel{\sin x \cos x})$

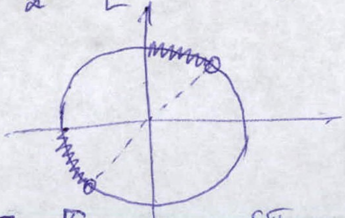
$\sqrt{\sin 2x} > \cos x - \sin x$ $\quad \sqrt{2 \sin x \cos x} > \cos x - \sin x$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x - \sin x < 0 \\ 2\sin x \cos x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x - \sin x \geq 0 \\ 2 \sin x \cos x > \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{1} - 2 \sin x \cos x \end{cases} \end{array}\right.$

$\begin{cases} \cos(x + \frac{\pi}{4}) < 0 \\ \sin x \cos x \geq 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \cos(x + \frac{\pi}{4}) \geq 0 \\ 2 \sin x \cos x > \frac{1}{2} \end{cases}$

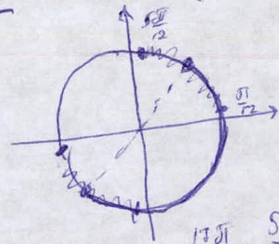
$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos(x + \frac{\pi}{4}) < 0 \\ \sin x \cos x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos(x + \frac{\pi}{4}) \geq 0 \\ \sin 2x > \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

$\begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \\ \text{I либо 3 четверть} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \\ \text{I} \mid \text{III} \end{cases}$



$x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n ; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right] \cup \left[\pi + 2\pi n ; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right)$

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $\quad -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n$



$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < 2x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

$\frac{\pi}{12} + \pi n < x < \frac{5\pi}{12} + 2\pi n.$

$\frac{17\pi}{12} > \frac{5\pi}{4}$

$x \in \left(\frac{\pi}{12} + 2\pi n ; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi n ; \frac{17\pi}{12} + 2\pi n\right)$

$b \geq 0.$

5). $a - ?$ $\quad b - ?$

$b < 16^{\frac{2x-1}{4x^2 - 4x + 5}} \leq a.$ $\quad \frac{2x-1}{4x^2 - 4x + 5} = \frac{2x - 1}{(2x-1)^2 + 4}$

$0 < 16^{\frac{2x-1}{4x^2 - 4x + 5}} \leq a.$ $\quad -\infty \leq \frac{t}{t^2 + 4} \leq b$ $\quad b^2 - 4ac =$

$1 - 4 \cdot 4b^2$

$D \geq 0$

$16^{\frac{1}{2}} = a$ $\quad a = 4.$ $\quad t \leq bt^2 + 4b.$

$bt^2 - t + 4b \geq 0.$

Ответ: $a = 4,$ $\quad b \geq \frac{1}{4}$ $\quad 1 - 16b^2 \leq 0$

$b = 0.$ $\quad 16b^2 \geq 1.$

$b^2 \geq \frac{1}{4}.$ $\quad b \leq \frac{1}{4}.$

$\boxed{№3.}$

$\left(\frac{t}{t^2 + 4}\right)' = \frac{(t^2 + 4) - 2t \cdot t}{(t^2+4)^2} \geq 0.$

$4 - t^2 \geq 0.$

$t^2 \leq 4.$

$t = 2.$

$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$

Чистовик

№2. По ф-ле геом. прогр:

$$\frac{b_1\cdot(q^5-1)}{q-1}=93 \quad (1) \qquad \frac{b_6(q^5-1)}{q-1}=\frac{b_1\cdot q^5(q^5-1)}{q-1}=2976 \quad (2)$$

$$(2):(1) \Rightarrow q^5=\frac{2976}{93}=32 \Rightarrow q=2.$$

Подставим в любое $\Rightarrow$

$$\frac{b_1\cdot 31}{2-1}=93 \Rightarrow b_1=3$$

$$\Sigma_{7\ \text{чл}}=\frac{b_1\cdot(q^7-1)}{q-1}=\frac{3\cdot 127}{2-1}=3\cdot 127=381.$$

Ответ: 381.

№4 $\sqrt{2\sin x\cos x}>\cos^3 x-\sin^3 x+\sin x\cos x(\sin x-\cos x).$

$$\sqrt{\sin 2x}>(\cos x-\sin x)(\cos^2 x+\sin^2 x+\sin x\cos x)-\sin x\cos x\cdot(\cos x-\sin x).$$

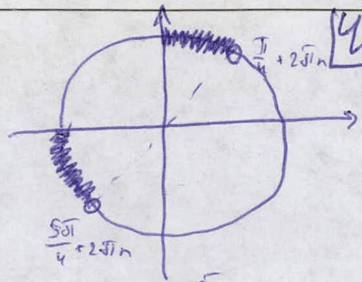
$$\sqrt{\sin 2x}>(\cos x-\sin x)(1+\cancel{\sin x\cos x}-\cancel{\sin x\cos x})$$

$$\sqrt{\sin 2x}>\cos x-\sin x.$$

По схеме равносильности:

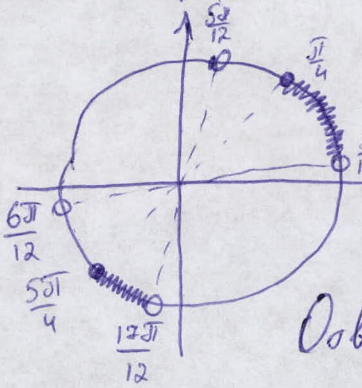
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x-\sin x<0\\ 2\sin x\cos x\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x-\sin x\geq 0\\ 2\sin x\cos x>\underbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}_{=1}-2\sin x\cos x\end{cases}\end{array}\right. \qquad \begin{cases}\cos(x+\frac{\pi}{4})<0\\ \sin x\cos x\geq 0\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos(x+\frac{\pi}{4})\geq 0\\ 2\sin x\cos x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{\pi}{2}+2\pi n<x+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ \text{I либо 3 четверть (одного знака)}\end{cases}\\ \begin{cases}-\frac{\pi}{2}+2\pi n\leq x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ \frac{\pi}{6}+2\pi n<2x<\frac{5\pi}{6}+2\pi n\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ \text{I либо III четверть},\ n\in\mathbb{Z}\end{cases}\\ \begin{cases}-\frac{5\pi}{4}+2\pi n\leq x\leq\frac{\pi}{4}+2\pi n\\ \frac{\pi}{12}+\pi n<x<\frac{5\pi}{12}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{cases}\end{array}\right.$$



Чистовик

$x \in \left(\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right] \cup \left[\pi+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in Z$



$x \in \left(\frac{\pi}{12}+2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \frac{17\pi}{12}+2\pi n\right)$. $n \in Z$

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{12}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right] \cup \left[\pi+2\pi n; \frac{17\pi}{12}+2\pi n\right]$, где $n \in Z$.

№5

$$b < 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} \le a$$

$\frac{2x-1}{4x^2-4x+5} = \frac{2x-1}{(2x-1)^2+4}$ Пусть $2x-1=t$.

$\frac{t}{t^2+4}$. Понятно, что при $t<0$ $\frac{t}{t^2+4}<0$

Оценим сверху.

$\frac{t}{t^2+4} \le l$ $\quad t^2+4>0 \Rightarrow t \le lt^2+4l$

это не очень нужно

$lt^2-t+4l \ge 0$ (1)

~~Переформулир. задачу.~~
~~При каких l вып-ся равенство $lt^2-t+4l \ge 0$~~
~~$\Rightarrow$ Наша парабола выше оси или касается её. (1 корень).~~
~~$\Rightarrow D \le 0$~~
~~$1-4\cdot 4l^2 \le 0$~~
~~$1 \le 16l^2$~~

$(1) \Rightarrow D \ge 0$

$1-16l^2 \ge 0 \qquad l^2 \le \frac{1}{16}$

$-\frac{1}{4} \le l \le \frac{1}{4}$

Или ч/з производную $\Rightarrow \frac{t}{t^2+4} \le \frac{1}{4}$.

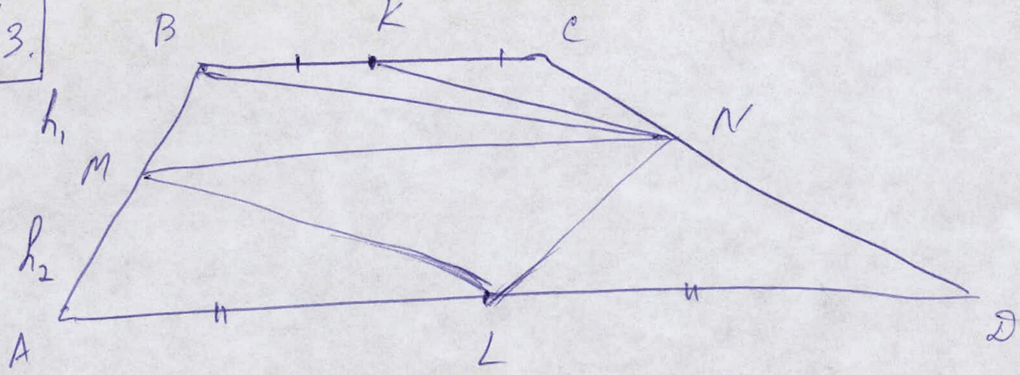
$\frac{t}{t^2+4}$ убыв $\Rightarrow \left(\frac{t}{t^2+4}\right)' = \frac{t^2+4-2t\cdot t}{(t^2+4)^2} \ge 0 \qquad \frac{4-t^2}{(4+t^2)^2} \ge 0$.

$t = \pm 2$.

$\Rightarrow l = \frac{t}{t^2+4} = \frac{2}{4+4} = \frac{1}{4} \left(= \max\left(\frac{t}{t^2+4}\right)\right)$.

Черновик.

№3.



$S_{BKN} + S_{MNL} = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot BK + \frac{1}{2} \cdot h_2 \cdot MN$

$\boxed{\text{Чистовик}}$ (степенная ф-я всегда > 0).

$a^x \to 0$ при $x \to -\infty$

$\Rightarrow -\infty < \frac{t}{t^2+4} \leq \frac{1}{4}$

$\Rightarrow 0 < 16^{\frac{t}{t^2+4}} < 16^{\frac{1}{4}} = 2$

$\Rightarrow 0 < 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} \leq 2.$

Ответ: при $a = 2$, $b = 0.$

$t = \pm 2.$ т.е. 2 — точка максимума, -2 — точка минимума.

$t \in (-2; 2)$

$f(t) = -\frac{1}{4}$, $f(t) = \frac{1}{4}$

$-$, $+$, $-$; f ; f' ; -2 min, 2 max

$\Rightarrow -\frac{1}{4} = \frac{t}{t^2+4} \leq \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ $t = -2 \Rightarrow f = -\frac{1}{4}$

$t = 2 \Rightarrow f = \frac{1}{4}.$

$\Rightarrow b < 16^{\frac{t}{t^2+4}} \leq a$

$16^{-\frac{1}{4}} < 16^{\frac{t}{t^2+4}} \leq 16^{\frac{1}{4}}$

$2^{-1} < 16^{\frac{t}{t^2+4}} \leq 2$

$\frac{1}{2} < 16^{\frac{t}{t^2+4}} \leq 2. \Rightarrow \frac{1}{2} < 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} \leq 2.$

$\boxed{b = \frac{1}{2} \quad a = 2.}$

Ответ: $a \geq 2$; $b \leq \frac{1}{2}.$