05-43-31-17
(205.1)

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 6-1

+1 лист

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"

по МАТЕМАТИКЕ

Корнева Михаила Игоревича

фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата

«27» МАРТА 2016 года

Подпись участника

(Коломыцкий ...) Жемков Тео Садовничая Садов 8

$\boxed{\text{ЧИСТОВИК}}$ 5

№ 5.

Т. к. $x^2+y^2=1$, то мы можем положить $x=\sin\alpha$, $y=\cos\alpha$, тогда

$$(4\sin^3\alpha-3\sin\alpha)^{15}=1-(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)^{16},$$

или, учитывая, что

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha, \text{ и } \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,$$

получим:

$$-\sin^{15}3\alpha=1-\cos^{16}3\alpha, \text{ или}$$

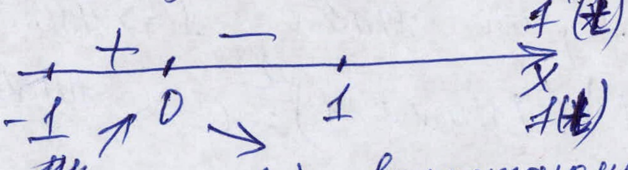
$$\cos^{16}3\alpha=1+\sin^{15}3\alpha$$

Пусть $t=\sin 3\alpha$, тогда $\cos^{16}3\alpha=(t^2-1)^8$.

$$(t^2-1)^8=1+t^{15},\quad t\in[-1;1].$$

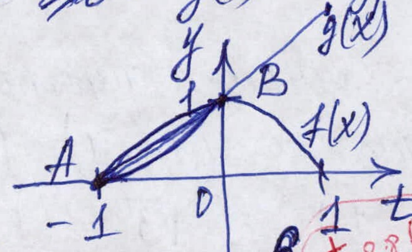
Обозначим $f(t)=(t^2-1)^8$, $g(t)=1+t^{15}$.

$$f'(t)=2t\cdot 8\cdot(t^2-1)^7$$



~~$g'(x)=15t^{14}\geq 0$~~ $g(x)$ — возрастающая функция (как степенная с нечётным показателем)

а что после 1? и до -1?



$$f''(t)=2t^2\cdot 8\cdot 2\cdot 7(t^2-1)^6 + 2\cdot 8(t^2-1)^7\geq 0\ \forall t\Rightarrow \text{выпуклая.}$$

$g''(t)=15\cdot 14t^{13}\leq 0$ при $t\in[-1;0]\Rightarrow$ выпуклая, причём её характер выпуклости противоположен характеру выпуклости функции $f(t)$, а именно $f(t)$ лежит ~~выше~~ ниже отрезка AB на интервале $(-1;0)$, а $g(t)$ лежит ~~ниже~~ выше отрезка AB на $(-1;0)$.
(точка A имеет координаты $(-1;0)$, а $B(0;1)$).
Значит, на интервале $(-1;0)$ ~~уравнен~~ $f(t)$ не пересекает $g(t)$.

ЧИСТОВИК 6

Проверив $t=0$ и $t=-1$, убеждаемся, что эти значения служат корнями уравнения $f(t)=g(t)$.

На интервале $[0;1]$, как мы убедились ранее, $f(t)$ убывает, в то время как $g(t)$ возрастает $\Rightarrow$ уравнение $f(t)=g(t)$ на данном промежутке имеет не более одного корня, и это $t=0$. Таким образом, мы доказали, что уравнение $(t^2-1)^8=1+t^{15}$ имеет ровно 2 корня: $t=0$, $t=-1$ } строго не доказано

Если $t=0$, то $\sin 3\alpha=0 \Rightarrow \sin\alpha(4\sin^2\alpha-3)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\alpha=0, \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=0,\ x_2=\frac{\sqrt{3}}{2},\ x_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Если $t=-1$, то $\sin 3\alpha=-1 \Rightarrow 4\sin^3\alpha-3\sin\alpha-1=0 \Leftrightarrow$

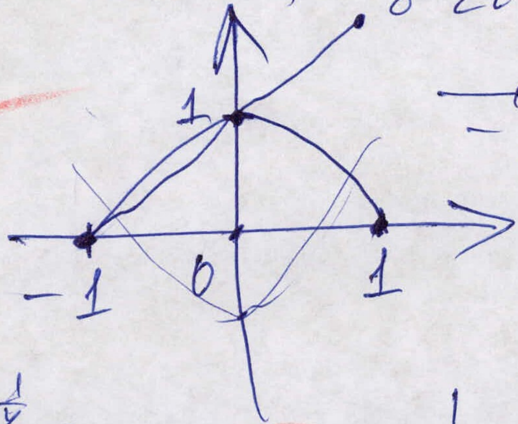
$\Leftrightarrow (\sin\alpha-1)(2\sin\alpha+1)^2=0 \Rightarrow \sin\alpha=1, \sin\alpha=-\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_4=1,\ x_5=-\frac{1}{2}$.

Таким образом, ~~от~~ данная окружность пересекает кривую ровно в 8 точках: $(0;1)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $(1;0)$, $\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. } пропущено 1 решение $(0;-1)$

Ответ: 8 точек.

$\boxed{\text{ЧЕРНОВИК}}$



$8 \cdot 2t\,(t^2-1)^7$

$+ \quad -$

$-1 \quad 0 \quad 1$

$4 \quad 0 \quad -3 \quad -1$

$1 \quad 4 \quad 4 \quad 1 \quad 0$

$4x^2+4x+1$

$(2x+1)^2(x-1)$

$y^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$x_1 \; y$

$-x_1 \; -y$

$-(4x^3-3x)^{15}$

$4 \cdot \frac{1}{8} - \frac{3}{2}$

$(2x+1)^2(x-1) = (4x^2+4x+1)(x-1) =$

$= 4x^3 + \cancel{4x^2} + x - \cancel{4x^2} - 4x - 1 =$

$= 4x^3 - 3x - 1.$

$\cancel{\frac{3\sqrt{3}}{8} - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{9\sqrt{3}}{8}}$

$y \cdot (4y^2-3) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0.$

$\cancel{-\frac{1}{2}(4x^2-3) = -\frac{1}{2} \cdot (x-1)}$

$x(4x^2-3) = -\frac{1}{2} \cdot (-2) = 1.$

$\frac{1}{2^8} < 1 - \frac{1}{2^{15}}$

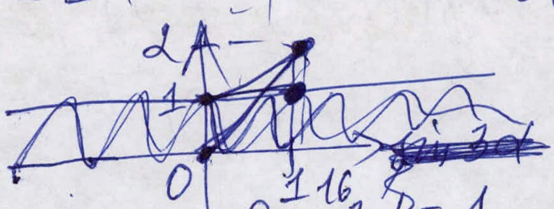
$2^7 < 2^{15} - 1$

$\boxed{\text{ЧЕРНОВИК}}$

$\cos^2 3\alpha = \frac{1+\cos 6\alpha}{2}$ $\quad \frac{(1+\cos 6\alpha)^8}{2^8} = 1+\sin^{15}3\alpha.$

$\cos^{16}3\alpha - \sin^{15}3\alpha = 1.$ $\quad 0 \le 1+\sin^{15}3\alpha \le 2$

$\cos^{16}3\alpha = 1+\sin^{15}3\alpha$



$\begin{cases} \cos^{16}3\alpha = 1, \\ \sin^{15}3\alpha + 1 = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \cos^{16}3\alpha = 1, \\ \sin^{15}3\alpha = 0 \end{cases}$

$\sin 3\alpha = 0 \Rightarrow \cos^{16}3\alpha = 1.$

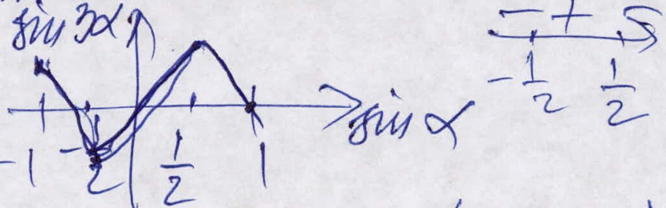
$4\sin^3\alpha - 3\sin\alpha = 0$

$\sin\alpha = 0, \quad \sin^2\alpha = \frac{3}{4}$

$\sin\alpha = 0, \quad \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ $\quad 3-12t^2$

$(t^2-1)^8$



17

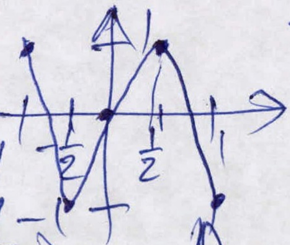
5.17

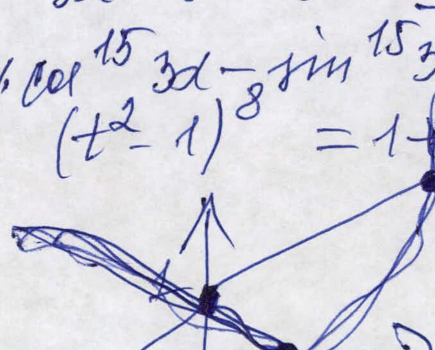
$\cos^{16}3\alpha - \sin^{15}3\alpha = 1$

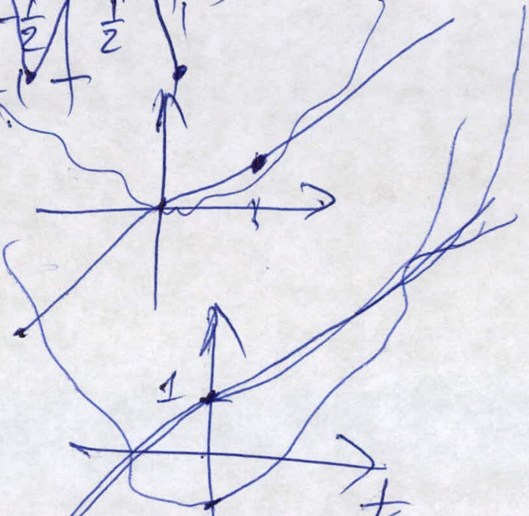
$\cos 3\alpha \cdot \cos^{15}3\alpha - \sin^{15}3\alpha = 1$

$(t^2-1)^8 = 1+t^{15}$

$\frac{1}{2}\left(3-4\cdot\frac{1}{4}\right)$







ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

ЧЕРНОВИК

$(t+1)$

$(t^2-1)^8 = (t-1)^8(t+1)^8$

$1+t^{15} = (t+1)(t^{14}-t^{13}+t^{12}-t^{11}+t^{10}-t^{9}+t^{8} + \dots + 1)$

$(t+1)((t+1)^7(t-1)^8) = t^{14}-t^{13} + \dots + 1$

$t=0,\ t=-1.$

8

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$\boxed{\text{ЧЕРНОВИК}}$

4 — n

$9n+85$

5 — $\underbrace{n+17}_{\text{нечётно}}$

$\overline{a_1a_2\ldots a_n} = a_1\cdot 10^n + \ldots + a_n \equiv$

$= a_1(9+1)^n + \ldots + a_n \equiv$

$\equiv a_1 + \ldots + a_n.$

$(1-t^2)^8 - t^{15} = 1$ $\{\cos\varphi n + i\sin n\varphi = r^n$

$(t^2-1)^8 - t^{15} = 1$

$8\cdot 2t\cdot(t^2-1)^7 - 15t^{14} =$

$= t\left(16(t^2-1)^7 - 15t^{13}\right) = 0.$

$\dfrac{(t^2-1)^7}{t^{13}} = \dfrac{15}{16}$

$\left((t^2-1)^4-1\right)\left((t^2-1)^4+1\right) = t^{15}$

$\left((t^2-1)^2-1\right)\left((t^2-1)^2+1\right)\left((t^2-1)^4+1\right) = t^{15}$

$t^2(t^2-2)\left((t^2-1)^2+1\right)\left((t^2-1)^4+1\right) = t^{15}.$

$-1 \le (t^2-1)^2 - 1 \le 0$ $f' = 16\cos^{15}3\alpha\cdot(-\sin 3\alpha).$

$f = \cos^{16}3\alpha - \sin^{15}3\alpha = 1.$ $\dfrac{\sin^{16}3\alpha}{\sin 3\alpha}$

$0 \le \cos^{16}3\alpha \le 1$

$-1 \le -\sin^{15}3\alpha \le 1$

$f(t) = \cos^{16}t - \sin^{15}t$ $f'(t) = 16\cos^{15}t(-\sin t) -$

$-15\sin^{14}t_{14}(\cos t) = \frac{1}{2}\sin 2t\left(-16\cos^{14}t - 15\sin^{13}t\right) = 0$

~~$-16 \le \quad \le 0$~~ ~~$-15 \le \quad \le 15$~~

$\cancel{0} \le \cos t \le 1$

$-1 \le \sin^{13}t \le 1$

$-15 \le -15\sin^{13}t \le 15$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

05-43-31-17 (205.1)

Олимпиада ПВГ 2016

$\boxed{\text{ЧЕРНОВИК}}$

$\frac{\sqrt{2}}{6} - \sqrt{2} = -\frac{5\sqrt{2}}{6}$ $\quad -\frac{1}{2} = -\frac{3}{6}$.

№1.

$4,5$ $\quad 5 - a$ } нечётно

$4 - a - 17$ $\quad$ нечётно

$5a + 4(a-17) = 9a - 68$

$\frac{6,28}{3}$ $\quad 68 : 9 = 7$, -63, остаток 5.

$1,57$ $\quad 2,09$ $\quad 3,14 : 5$ $\quad 3,14 : 2 = 1,57$ $\quad 3,14 : 3 = 1,01$ $\quad 2,08$

$-\frac{2,08}{1,57}$ $\quad 0,51$ $\quad \frac{3,14}{2}$ $\quad 1,07$ $\quad -\frac{2}{11}$ $\quad -\frac{10}{14}$

№2.

$\log_3 3^{\frac{3}{4}} + \log_3 \frac{1}{\sqrt{2}} = \log_3 \frac{3^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{2}}$ $\quad 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$-\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{9}$ $\quad \left(\log_3 \frac{3^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{2}}\right) \cdot 2\log_2 7 = \log_3 \left(3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ $\quad \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}$

$\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{9}$ $\quad x + \log_2 x - \log_3 x + \frac{1}{2}\log_2 x - 7 = 12$

$-\frac{2\pi}{9} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{8\pi}{9}$ $\quad x + \frac{3}{2}\log_2 x - \log_3 x$ $\quad -\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{9}$

$1 + \frac{1}{x\ln 2} - \frac{1}{x\ln 3} + \frac{1}{x\ln 4} = 1 + \frac{1}{x}(\cancel{\log_e 2 - \log_e 3}) > 0$

$\cdot (\log_2 e - \log_3 e + \log_4 e) = 1 + \frac{1}{x}\left(\frac{3}{2}\log_2 e - \log_3 e\right)$

$\log_2 e > \log_3 e$

$x > 0 \Rightarrow$ функция в левой части возрастающая.

$\frac{3}{4} \cdot 2\log_2 7 - \frac{1}{2}\log_3 2 \cdot \log_2 7 = \frac{3}{2}\log_2 7 - \log_3 7$

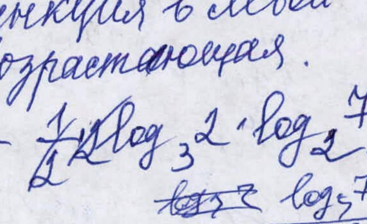
$\frac{\log_3 7}{\log_3 2}$ $\quad 85 : 9 = 89$, -81, 4.

$x = 7$, $\frac{3}{2}\log_2 7 - \log_3 7$

Ответ: 7

№3.

$-\frac{\sqrt{2}}{6} + \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{6}$.



$S_{MBN} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 7y\sin\alpha$,

$S_{AMNC} = \frac{1}{2} \cdot (4x \cdot 8y - 7xy) = \frac{25}{2}xy$

$\frac{25 - 7}{25} = \frac{18}{25} = \frac{72}{100} = 72\%$. $\quad n + 17$ нечётно

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

№4. ЧЕРНОВИК

$2+\cos 3x > 0$; $3x = t$

$\sqrt{2}\sin t + \sqrt{2+\cos t} = 0$

$\sin t \le 0$; $2\sin^2 t = 2+\cos t$

$\cancel{2} - 2\cos^2 t = \cancel{2} + \cos t$

$\cos t(2\cos t + 1) = 0$ $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow t = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$

$\cos t = -\frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$

$t = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$

$-1 \le x \le 1$

$\cos(\sqrt{\ }\arcsin \ldots)$

№5.

$x^2+y^2=1$,

$(4x^3-3x)^{15} + (4y^3-3y)^{16} = 1$

$x^{15}(4x^2-3)^{15} + y^{16}(4y^2-3)^{16} = 1$

$y^2 = 1-x^2$

$x^{15}(4x^2-3)^{15} + (1-x^2)^8(4-4x^2-3)^{16} = 1$

$x^{15}(4x^2-3)^{15} + (1-x^2)^8(1-4x^2)^{16} = 1$

$x = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$

$(4\sin^3\alpha - 3\sin\alpha)^{15} = 1 - (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)^{16}$

$\cos 3\alpha = \cos(\alpha+2\alpha) = \cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) \cancel{+} \sin\alpha 2\sin\alpha\cos\alpha =$

$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha \cancel{+} (2-2\cos^2\alpha)\cos\alpha =$

$= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

$\sin 3\alpha = \sin(\alpha+2\alpha) = \sin\alpha(\cancel{2\cos} 1 - 2\sin^2\alpha) +$

$+ 2\sin 2\alpha\cos\alpha = \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) =$

$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

$3\alpha = t$

$-\sin^{15} 3\alpha = 1 - \cos^{16} 3\alpha$

$(1-s^2)^8 - s^{15} = 1$ $\quad -\sin^{15} t = 1 - (1-\sin^2 t)^8$

$8(1-s^2)^7 - 15s^{14}$ $\quad -s^{15} = 1 - (1-s^2)^8$

$-s^{15} = (1-(1-s^2)^4)(1+(1-s^2)^4)$

$-\sin^{15}3\alpha = 1-\cos^{16}3\alpha$ $\boxed{\text{ЧЕРНОВИК}}$

$\cos^{16}3\alpha - \sin^{15}3\alpha = 1 = \sin^2 3\alpha+\cos^2 3\alpha$

$0\le\cos^{16}3\alpha\le 1$

$-1\le -\sin^{15}3\alpha\le 1$

$\cos^2 3\alpha(\cos^{14}3\alpha-1)-\sin^2 3\alpha(\sin^{13}3\alpha-1)=0$

$\boxed{\cos^{16}3\alpha-\sin^{15}3\alpha-1=0.}$

$0\le\cos^{16}3\alpha\le 1$

$\cos^{16}3\alpha-\sin^{15}3\alpha=\cos^2 3\alpha+\sin^2 3\alpha$

$0\le(1-\sin^2 3\alpha)^8\le 1$

$\cos^2 3\alpha(\cos^{14}3\alpha-1)=$ $0\le\ \ \le 1$

$-1\le 1-\sin^2 3\alpha\le 1$

$=\sin^2 3\alpha(\sin^{13}3\alpha+1)$

$-2\le -\sin^2 3\alpha\le 0.$

$-1\le\ \ \le 2$

$\sin^2 3\alpha\le 2$

$$tg^2 3\alpha=\frac{\cos^{14}3\alpha-1}{\sin^{13}3\alpha+1}$$

$(\cos^8 3\alpha-1)(\cos^8 3\alpha+1)=\sin^{15}3\alpha$

$(\cos^4 3\alpha-1)(\cos^4 3\alpha+1)(\cos^8 3\alpha+1)=\sin^{15}3\alpha$

$(\cos^2 3\alpha-1)(\cos^2 3\alpha+1)(\cos^4 3\alpha+1)(\cos^8 3\alpha+1)=\cancel{\sin^{15}3\alpha}$

$-\sin^{13}\alpha$

$\cancel{-\sin^2}3\alpha$ $2-\sin^2 3\alpha$

$(1-t^2)^8-t^{15}=1$

$(t^2-1)^8-t^{15}-1=0$

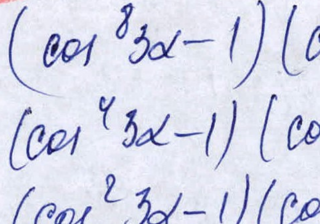
$f'=8(t^2-1)^7\cdot 2t-15t^{14}=0.$

$16(t^2-1)^7-15t^{13}=0$

≤ 0 $-15\le\ \ \le 15$

$-16\le$

-1 0 1 t



$16\left(t-\frac{1}{t}\right)^7-15t^6=0.$

если $\cancel{t\ge 0}$ $t\le 0$ f' убывает.

$(t^2+1)^7=(t^2)^7\cancel{t}-t^{13}$

ЧИСТОВИК 4

№ 1. верно

Пусть цифр 4 будет n, тогда количество цифр 5 составит $n+17$. Сумма цифр данного числа тогда составит $5(n+17)+4n = 9n+85$. Как известно, остаток от деления натурального числа на 9 равен остатку от деления суммы его цифр ~~: признак делимости на 9~~ (по теореме Паскаля о системах счисления) $\Rightarrow$ искомые значения остатков содержатся среди остатков от деления $9n+85$ на 9, но $9n+85 \equiv 4 \pmod 9$

Докажем, что остаток от деления числа $\overline{a_1 \ldots a_n}$ на 9 равен остатку от деления числа $a_1+\ldots+a_n$ на 9. $\overline{a_1 \ldots a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_n \cdot 10^0 = a_1 (9+1)^{n-1} + \ldots + a_n (9+1)^0 \equiv a_1+\ldots+a_n \pmod 9$.

Ответ: 4.

05-43-31-17 (205.1)

ЧИСТОВИК 1

№2. верно

Рассмотрим функцию $f(x) = x + \log_2 x - \log_3 x + \log_4 x - 7$. Её производная: $f'(x) = 1 + \frac{1}{x\ln 2} - \frac{1}{x\ln 3} + \frac{1}{x\ln 4} = 1 + \frac{1}{x}\cdot(\log_2 e - \log_3 e + \log_4 e) = 1 + \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{3}{2}\log_2 e - \log_3 e\right)$. Заметим, что $\log_2 e > \log_3 e$ (т.к. у левого логарифма меньше основание). Значит, тем более $\frac{3}{2}\log_2 e > \log_3 e$. Из области определения логарифмической функции $x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \ \forall x \in D(f)$. Значит, $f(x)$ — возрастающая функция $\Rightarrow$ уравнение $f(x) = C$, где $C = const$ имеет не более одного корня.

$f(7) = 7 + \log_2 7 - \log_3 7 + \frac{1}{2}\log_2 7 - 7 = \frac{3}{2}\log_2 7 - \log_3 7.$

Заметим, что $\left(\frac{3}{4} - \log_3\sqrt{2}\right)\log_2 49 = \frac{3}{4}\cdot 2\log_2 7 - \frac{1}{2}(\log_3 2)\cdot 2\log_2 7 = \frac{3}{2}\log_2 7 - \log_3 2\cdot\frac{\log_3 7}{\log_3 2} = \frac{3}{2}\log_2 7 - \log_3 7 = f(7) \Rightarrow x = 7$ — единственный корень.

Ответ: 7.

$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n_2}{3}, \\ x=-\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n_4}{3} \end{array}\right.$ $\boxed{\text{ЧИСТОВИК}}$ 3

Но: $-1 \le \frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n_2}{3} \le 1,\ \pi \approx 3,14 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ годится только $n_2=-1 \Rightarrow x=-\frac{\pi}{6}$.

$-1 \le -\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n_4}{3} \le 1,\ \pi\approx 3,14 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ годятся $\cancel{n_4=1}$, $n_4=0, \Rightarrow x=-\frac{2\pi}{9}$.

(2): $2\cos(\sqrt{2}\arcsin x)-1=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\arcsin x=\frac{\pi}{3}+2\pi n, \\ \sqrt{2}\arcsin x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k \end{array}\right.$

$n,k\in\mathbb{Z}$ $\left[\begin{array}{ll} \arcsin x=\frac{\pi}{3\sqrt{2}}+\pi n\sqrt{2}, & (а) \\ \arcsin x=-\frac{\pi}{3\sqrt{2}}+\pi k\sqrt{2} & (б) \end{array}\right.$

Но $\arcsin x\in[\cancel{0},-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

(а): $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{3\sqrt{2}}+n\sqrt{2}\le\frac{1}{2}\Rightarrow$ годится только $n=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \arcsin x=\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\Rightarrow x=\sin\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$

(б): $-\frac{1}{2}\le-\frac{1}{3\sqrt{2}}+k\sqrt{2}\le\frac{1}{2}\Rightarrow$ годится только

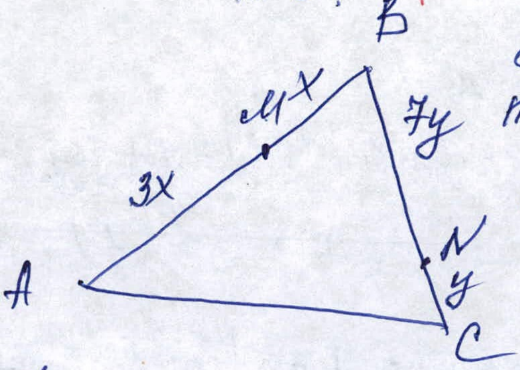
$k=0\Rightarrow \arcsin x=-\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\Rightarrow x=\sin\left(-\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\right)$.

Таким образом, исходное уравнение имеет корни: $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{2\pi}{9}$, $\sin\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$, $\sin\left(-\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\right)$.

Ответ: $-\frac{\pi}{6}$; $-\frac{2\pi}{9}$; $\sin\left(\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\right)$, $\sin\left(-\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\right)$.

$\boxed{\text{ЧИСТОВИК}}$ 2

№3. верно



Пусть $AM=3x$, тогда $MB=x$; $NC=y$, тогда $NB=7y$.

$$S_{MBN}=\frac{1}{2}\cdot x\cdot 7y\cdot \sin\angle ABC = 7xy\cdot\frac{1}{2}\sin\angle ABC.$$

$$S_{AMNC}=S_{ABC}-S_{MBN}=\frac{1}{2}\cdot 4x\cdot 8y\sin\angle ABC -$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 7xy\sin\angle ABC = 25\cdot\frac{1}{2}xy\sin\angle ABC.$$

$$\frac{S_{MBN}}{S_{AMNC}}=\frac{7xy\cdot\frac{1}{2}\sin\angle ABC}{25\cdot\frac{1}{2}xy\sin\angle ABC}=28\%.$$

Ответ: 28 %.

№4. верно

ОДЗ: $\begin{cases}2+\cos 3x\geq 0,\\ -1\leq x\leq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}\\ -1\leq x\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-1;1].$

Уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{ll}\sqrt{2}\sin 3x+\sqrt{2+\cos 3x}=0, & (1)\\ 2\cos\left(\sqrt{2}\arcsin x\right)-1=0 & (2)\end{array}\right.$$

(1): $\sqrt{2+\cos 3x}=-\sqrt{2}\sin 3x \Leftrightarrow \begin{cases}2+\cos 3x=2\sin^2 3x,\\ \sin 3x\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2+\cos 3x=2-2\cos^2 3x,\\ \sin 3x\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 3x(2\cos 3x+1)=0,\\ \sin 3x\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}3x=\frac{\pi}{2}+2\pi n_1, n_1\in\mathbb{Z}\\ 3x=\frac{3\pi}{2}+2\pi n_2, n_2\in\mathbb{Z}\\ 3x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n_3, n_3\in\mathbb{Z}\\ 3x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n_4, n_4\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\\ \sin 3x\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=\frac{3\pi}{2}+2\pi n_2,\\ 3x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n_4\end{array}\right.\Leftrightarrow$