30-21-77-54
(183.4)

Олимпиада ПВГ
2016

# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
## имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 174

сдал: 12 41

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Покори Воробьёвы горы!"

по математике

Королева Николая Сергеевича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата
«22» марта 2016 года

Подпись участника

Оценку оставить без изменений

Председателю апелляционной Комиссии по математике

олимпиады школьников «Покори Воробьевы Горы»

от Королева Николая Сергеевича

ученика 11 класса Университетского лицея

№1511 предуниверситария НИЯУ МИФИ,

проживающего по адресу: г. Москва, ул. Кантемировская, 22-1-110.

Паспорт РФ: 4612 №978526 выдан ТП№2 Межрайонного ОУФМС России

По Московской обл. в городском округе Подольск 18.01.2013г.

**Заявление.**

Я не согласен с результатом проверки моей работы по математике олимпиады школьников «Покори Воробьевы Горы» 95 баллов. Считаю, что моя работа заслуживает 100 баллов.

31 марта 2016 г. (Королев Н.С.)

30-21-77-54
(183,4)

Чистовик.

95 девяносто пять

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

N1.

$$\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}=\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)<\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right),$$ т.к. $\sin x \nearrow$ при $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ и $\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}$.

$$\Downarrow$$

$$\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}<\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}<\frac{40}{29}.$$

$$29+29\sqrt{3}<80$$

$$29\sqrt{3}<51 \quad \nearrow^2$$

$$29^2\cdot 3<51^2$$

$$29^2\cdot 2<51^2-29^2=(51-29)(51+29)$$

$$29^2\cdot 2<80\cdot 22$$

$$29^2<80\cdot 11$$

$$841<880$$

$$\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}<\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{40}{29}$$

Ответ: $\left(\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\right)$.

Решение верно

N2.

$v_1$ – скорость первого (более быстрого) водителя } (в км/мин)

$v_2$ – то же, что и $v_1$, но для второго водителя

$S$ – длина круга (в км)

$t$ – время, ~~за которое~~ между обгонами (в мин).

$n$ – искомое время.

$$v_1=\frac{S}{3}$$

$$v_2=\frac{S}{n};\ n\in\mathbb{Z} \quad n>3,\ \text{т.к.}\ v_2<v_1 \Rightarrow n\geq 4$$

Очевидно, что это будет первое пересечение с множеством точек $|x|+2|y|=2$.

Заметим, что $AB \parallel CD$ ($tg$ угла наклона равен $-\frac{1}{2}$).

Достроим ABCD до прямоугольника $AB\cancel{MN}$.

NM

AM задаётся уравнением $y=2x-2$

$CD: y=-\frac{1}{2}x-1;$

$BN: y=2x+8;$

$2x-2=-\frac{1}{2}x-1.$

$\frac{5}{2}x=1$

$x=\frac{2}{5} \Rightarrow M\left(\frac{2}{5}; -\frac{6}{5}\right)$

$-\frac{1}{2}x-1=2x+8$

$-9=\frac{5}{2}x$

$x=-\frac{18}{5} \Rightarrow N\left(-\frac{18}{5}; \frac{4}{5}\right)$

Очевидно, что эллипс с фокусами A и B, ~~касаясь~~ касающийся MN, будет касаться MN на его ~~серед~~ середине.

Пусть O – середина $MN \Rightarrow O\left(-\frac{8}{5}; -\frac{1}{5}\right) \left(\frac{x_M+x_N}{2}; \frac{y_M+y_N}{2}\right)$

$O \in CD \Rightarrow O$ – искомая точка касания $\Rightarrow$

$\sqrt{(x+4)^2+y^2} + \sqrt{(y+2)^2+x^2}$ – минимально при $x=-\frac{8}{5}$; $y=-\frac{1}{5}$:

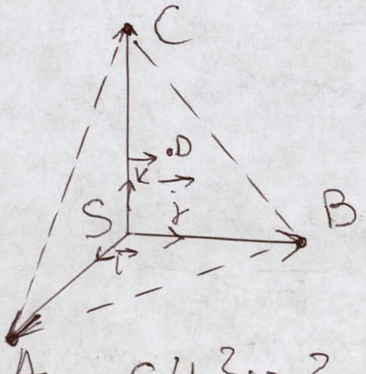
арифм. ошибка

$\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{11}{5}\right)^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{145}+\sqrt{121+64}}{5} = \frac{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{29}+\sqrt{37})}{5}.$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{29}+\sqrt{37})}{5}.$

ответ неверный.

№5.




Введём систему координат с центром в точке S и $\vec{i} \uparrow\uparrow \vec{SA}$; $\vec{j} \uparrow\uparrow \vec{SB}$; $\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{SC}$.

Пусть координаты точки D: $(x_D; y_D; z_D)$, тогда

$$\begin{cases} y_D^2+z_D^2=(2\sqrt{5})^2 \\ x_D^2+z_D^2=(\sqrt{13})^2 \\ x_D^2+y_D^2=5^2 \end{cases}$$

, как расстояния от прямых SA, SB и SC через т. Пифагора.

$$\begin{cases} y_D^2+z_D^2=20 \\ x_D^2+z_D^2=13 \\ x_D^2+y_D^2=25 \end{cases} \Rightarrow x_D^2+y_D^2+z_D^2=29 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_D^2=9 \Rightarrow x_D=3$

$y_D^2=16 \Rightarrow y_D=4$

$z_D^2=4 \Rightarrow z_D=2 \Rightarrow$

$D(3;4;2).$

$[x]$ – наибольшее целое число $\leq x$, а тут получается, что есть число больше ($2^n \in \mathbb{Z}$).
Значит $[\log_2 x] = \log_2 [x]$.

$$\underbrace{[\log_3(\log_2 x)]^2}_{\geq 0} = -8\log_3(\log_2[x])$$
$$\Rightarrow -8\log_3(\log_2[x]) \geq 0$$
$$\log_3(\log_2[x]) \leq 0$$
$$0 < \log_2[x] \leq 1$$
$$1 < [x] \leq 2 \Rightarrow [x] = 2, \text{ т.к.}$$
$[x] \in \mathbb{Z}$. $\Rightarrow x \in [2;3)$.

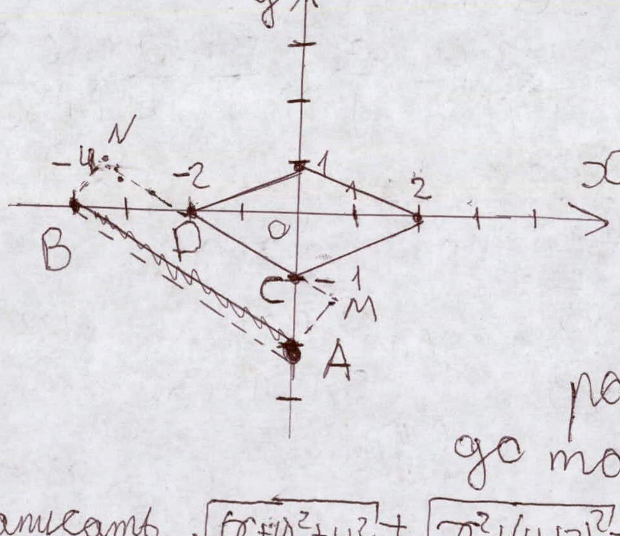
При всех этих значениях $x$ равенство верно, т.к.
$\log_3(\log_2[x]) = 0$
$$1 \leq \log_2 x < \log_2 3 < 2$$
$$0 \leq \log_3(\log_2 x) < \log_3 2 < 1$$
$$[\log_3(\log_2 x)] = 0$$
Ответ: $x \in [2;3)$.

Решение верно.

№3.

$$|x| + 2|y| = 2$$
$$\sqrt{(x+4)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y+2)^2} - \text{мин.}$$

Нарисуем $|x| + 2|y| = 2$ на плоскости $(x;y)$:




Обозначим $A(0;-2)$
$B(-4;0)$

Заметим, что $\sqrt{(x+4)^2+y^2}$ – расстояние от точки $(x;y)$ до точки $B$, а $\sqrt{x^2+(y+2)^2}$ – расстояние от точки $(x;y)$ до точки $A$.

Если записать $\sqrt{(x+4)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y+2)^2} = R^2$, то получится уравнение эллипса $\Rightarrow$ надо ~~нач~~ постепенно увеличивать $R$, пока эллипс не коснётся отрезка $CD$, так как

неверно!

$v_1 t + S = v_2 t$

$\frac{S}{n}t + S = \frac{S}{3}t$

$3t + 3n = nt$

$t = \frac{3n}{n-3}$

$t > 8 \Rightarrow \frac{3n}{n-3} > 8 \quad *(n-3) > 0$ (домножим на $n-3$, которое больше 0)

$3n > 8n - 24$

$5n < 24$

$\Downarrow n \leq 4$, т.к. $n \in Z \Rightarrow n = 4$.

Ответ: 4 минуты.

Решено верно.

№4.

$[\log_3(\log_2 x)]^2 - 12\log_3([\log_2 x]) + 20\log_3(\log_2[x]) = 0$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 1.$ Неверно $[\log_2 x] > 0 \Rightarrow x \geq 2$

~~Докажем, что $[\log_2 x] \geq \log_2[x]$ при $x > 1$.~~

$\underbrace{[\log_3(\log_2 x)]^2}_{\in Z \ \geq 0} = 12\log_3([\log_2 x]) - 20\log_3(\log_2[x])$

$\Rightarrow (12\log_3([\log_2 x]) - 20\log_3(\log_2[x])) \in Z \geq 0$

$3\log_3([\log_2 x]) - 5\log_3(\log_2[x]) \geq 0$

$\log_3\left(\frac{[\log_2 x]^3}{(\log_2[x])^5}\right) \geq 0 \Rightarrow [\log_2 x]^3 \geq (\log_2[x])^5$

Переходить к этому можно, т.к. $\log_2 x > 0$ при $x > 1$.

$\Downarrow$

$[\log_2 x] \geq \log_2[x]$, т.к.

$\log_2 x > 0$ при $x > 1$.

Допустим $[\log_2 x] > \log_2[x] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, n \in Z : \log_2 x \geq n > \log_2[x] \Rightarrow$

$\Rightarrow x \geq 2^n$; $[x] < 2^n$. Противоречие, т.к.



Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Чистовик

Обозначим плоскость ABC за $\alpha$ =>

~~$\alpha: Ax+By+Cz+D=0$, где A, B, CD~~

$\alpha: ax+by+cz+d=0$, где a, b, c, d некоторые коэффициенты.

$D\in\alpha \Rightarrow 3a+4b+2c+d=0$

Найдём координату точки A. $A(x_A;0;0)$

$ax_A+0+0+d=0 \Rightarrow x_A=-\frac{d}{a} \Rightarrow A(-\frac{d}{a};0;0)$

Аналогично $B(0;-\frac{d}{b};0)$ $C(0;0;-\frac{d}{c})$

$\vec{AB}(\frac{d}{a};-\frac{d}{b};0)$

$\vec{AC}(\frac{d}{a};0;-\frac{d}{c})$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot|[\vec{AB}\times\vec{AC}]|$, где $[\vec{AB}\times\vec{AC}]$ - векторное произведение $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

$[\vec{AB}\times\vec{AC}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{d}{a} & -\frac{d}{b} & 0\\ \frac{d}{a} & 0 & -\frac{d}{c}\end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{d}{b}\cdot\frac{d}{c}-0\right)-\vec{j}\left(\frac{d}{a}\cdot\left(-\frac{d}{c}\right)-0\right)+\vec{k}\left(0-\left(-\frac{d}{b}\cdot\frac{d}{a}\right)\right)=\vec{i}\cdot\frac{d^2}{bc}-\vec{j}\left(-\frac{d^2}{ac}\right)+\vec{k}\cdot\frac{d^2}{ab}=$
$=\vec{i}\cdot\frac{d^2}{bc}+\vec{j}\frac{d^2}{ac}+\vec{k}\cdot\frac{d^2}{ab}$.

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{d^2}{bc}\right)^2+\left(\frac{d^2}{ac}\right)^2+\left(\frac{d^2}{ab}\right)^2}=\frac{d^2}{2}\sqrt{\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{a^2b^2}}=$
$=\frac{d^2\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2\,abc}$

$h=\rho(S;\alpha)=\frac{|a\cdot a+0\cdot b+0\cdot c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$V=\frac{1}{3}S_{ABC}h=\frac{1}{3}\cdot\frac{d^2\cdot\cancel{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}{2abc}\cdot\frac{|d|}{\cancel{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}=\frac{1}{6}\cdot\frac{|d|^3}{abc}$

Из координат точек A, B, C: $-\frac{d}{a}>0$; $-\frac{d}{b}>0$; $-\frac{d}{c}>0 \Rightarrow$ ~~abc~~
$\Rightarrow -\frac{d^3}{abc}>0 \Rightarrow V=\frac{1}{6}\cdot\frac{(-d)^3}{abc}$

$3a+4b+2c+d=0 \Rightarrow -d=3a+4b+2c$

$$V=\frac{1}{6}\cdot\frac{(3a+4b+2c)^3}{abc}$$

Из н-ва о средних:

$$\frac{3a+4b+2c}{3}\geqslant\sqrt[3]{3a\cdot 4b\cdot 2c}=2\sqrt[3]{3abc}$$

$$3a+4b+2c\geqslant 6\sqrt[3]{3abc}$$

Возведём в куб $\Rightarrow (3a+4b+2c)^3\geqslant 6^3\cdot 3abc$

Я тут забыл сказать, что применять н-во о средних мы можем, т.к. $a>0$; $b>0$; $c>0$, т.к. если $a<0$, то уравнение плоскости $\alpha$ можно домножить на $-1$ и взять новые коэффициенты, тогда $a>0 \Rightarrow$ т.к. $x_A>0$, то $-\frac{d}{a}>0 \Rightarrow d<0 \Rightarrow b>0$; $c>0$.

$$V\geqslant\frac{6^3\cdot 3abc}{6abc}=6^2\cdot 3=36\cdot 3=108$$

Равенство $(3a+4b+2c)^3=6^3\cdot 3abc$ достигается при $3a=4b=2c$ (из того же н-ва о средних)

Т.к. $a, b, c, d$ коэффициенты в уравнении плоскости, то их одновременно можно домножать и делить на любое число $\Rightarrow$ без ограничения общности можно сказать, что $a=4 \Rightarrow b=3 \Rightarrow c=6 \Rightarrow$
$d=-36 \Rightarrow \alpha: 4x+3y+6z-36=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_A=-\frac{d}{a}=\frac{36}{4}=9$; $y_B=\frac{36}{3}=12$; $z_C=\frac{36}{6}=6$

Значит $V=108$ достигается при $SA=9$; $SB=12$; $SC=6$.

Ответ: 108.

Решено верно

30-21-77-54 (183.4)

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

Черновик.

$\frac{4}{5}-2=-\frac{6}{5}$

$\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{20\sqrt{2}}{29}$

+1. +2. + +3. + +4. + 5.

$\sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $\frac{40}{29}$ $3\sqrt{2}$ 4.

$12+12+12-36=0$

$-\frac{36}{5}+8=\frac{4}{5}$

$\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi+3\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}$

$\sqrt{2}\cdot\sin\frac{5\pi}{12}$ $\frac{40}{29}$

$29^4\cdot\cancel{3}>2^2\cdot3^3\cdot11^2\cdot23$

$29^4>\frac{2^2\cdot3\cdot11^2\cdot23}{12}$

$\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}=1-2\sin^2\alpha$

$\sin^2\alpha=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ $\frac{40}{29}$ $3^3\cdot36$ $\frac{4}{3}$ $\frac{2^4\cdot3^3}{4}=27\cdot4=108$

$\frac{40}{29}<\frac{4}{3}\approx1{,}33$

$29\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ $80$ $\frac{3^3\cdot36}{4}=6\cdot3^3$

$\sqrt{2}\approx1{,}4$

$29^2\cdot2\cdot(2+\sqrt{3})$ $80^2$ $=40^2\cdot2^2$ $10^2\cdot8^2$

$30^2\cdot\left(\frac{80}{30}\right)^2$

$40 \mid 29$, $1{,}413$

$29^2\cdot2(2+\sqrt{3})$ $80^2$ $3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$ $29\times29=261+58=841$

$9\cdot2(2+\sqrt{3})$ $64$

$29^2\cdot2^2+29^2\cdot2\sqrt{3}$ $80^2$ $18+9\sqrt{3}$ $32$

$29^2\cdot2\sqrt{3}$ $80^2-58^2$ $9\sqrt{3}$ $14$

$138 \mid 3$, $46 \mid 2$, $23$

$29^2\cdot\cancel{2}\cdot\sqrt{3}$ $138\cdot22$ $11\cdot\sqrt{3}$

$81\cdot3>$ $1896$

$29^2\cdot\sqrt{3}$ $2\cdot3\cdot11\cdot23$ $242$

$[\log_2 x]\le\log_2[x]$

$\log_3(\log_3[\log_2 x])$ $\frac{[\log_2 x]^3}{(\log_2[x])^4}>0$

$[\log_3(\log_2 x)] = \log_3[\log_2 x]$

$\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \cdot S$

$t=0 \quad t=-8$

$\sqrt{2}\left(\sin\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$\log_2[x]=1$

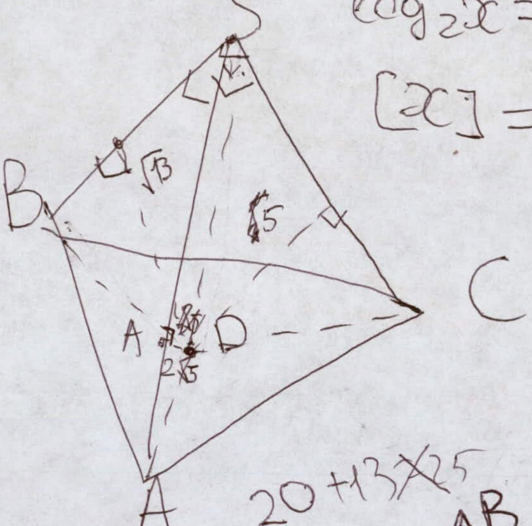
$[x]=2 \quad \boxed{x\in[2;3)}$

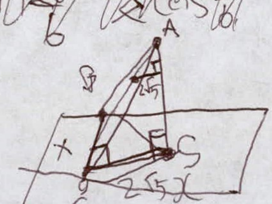
$\log_2 x = \frac{1}{3^8}$

$\sin\frac{\pi}{6} \quad \cos\frac{\pi}{6}$

$[x] = \frac{1}{\cancel{2^{1/3^8}}} \quad 2^{\frac{1}{3^8}}$

$\rho(S;\alpha)$





$V_{SABC}\ \min?$

$DA \perp AS \quad SC \perp AS$

$AS \perp (SBC)$

$145 \mid 5$

$29$

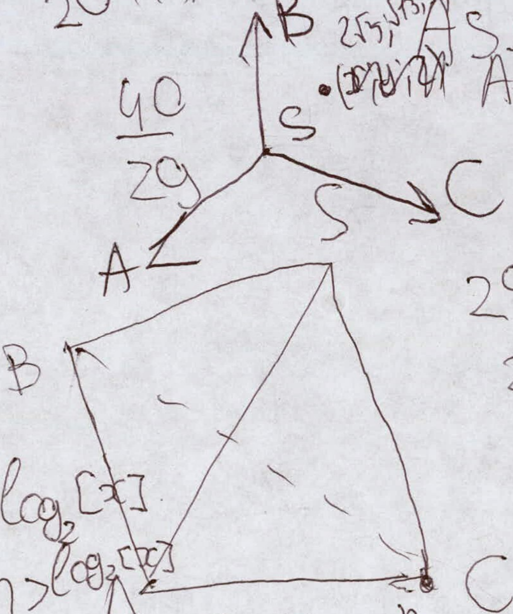
$20+13 \cancel{+25}$

$AS \perp SDC$

$AS \perp SBD$

$185 \mid 5$

$37$



$< \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{40}{29}$

$-\frac{8}{5}+\frac{20}{5}$

$29\cdot(1+\sqrt{3}) < 80$

$29\sqrt{3} < 51$

$29^2\cdot 3 < 51^2$

$29^2\cdot 2 < 51^2-29^2$

$29^2\cdot 2 < 80\cdot 22$

$29^2 < 880$

$30^2-30-29 <$

$\log_n x > \log_2[x]$

$\log_2 x > n > \log_2[x]$

$[x]<2^n$

$x>2^n$

$[\log_n x] \neq \log_n[x]$

$x = n^{\alpha}$

$[x]=n^{\beta}$

$1>2^{\alpha}-2^{\beta}$

$[\alpha]\neq\beta$

$n^{\beta} < n^{\alpha} \quad n^{\beta}+1>n^{\alpha}$

$2^{\beta}<2^{\alpha}$

$n\geq 2$

$n \geq 2 = \quad \beta<\alpha$

$n^{\beta}+1>n^{\alpha} \quad 1>n^{\alpha}-n^{\beta}$

$n^{\alpha}>n^{\beta}>n^{\alpha}-1.$

$$\sqrt{3^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{9+\frac{1}{4}}+\sqrt{1+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{37}{4}}+\sqrt{\frac{13}{4}}=$$
$$=\frac{\sqrt{37}+\sqrt{13}}{2}$$

$$\left[\log_3(\log_2 x)\right]^2-12\log_3(\left[\log_2 x\right])+$$
$$+20\log_3(\log_2([x]))=x.$$

$[t]=\text{floor}()$.

$x>0$
$\log_2 x>0 \Rightarrow x>1$

$\log_3(\log_2 x)$ cм $[\log_2 x]\neq\log_2[x]$

$\log_3(\log_2 x)=t$

$\log_2 x=3^t$

$x=2^{3^t}$

$\log_3(\log_2 x)=t$

$[\alpha]>2$.

$t^2-12t+20t=0.$ $x=2$

$t^2+8t=0$

$t=0$ || $t=-8$. $\log_2 2^\alpha=2\alpha$

$$\left[\log_3(\log_2 x)\right]^2+20\log_3(\cancel{\log_2}([x]))=12\log_3([\log_2 x])$$

$x\in[2;3)$

$[x]=2$. $[x]+1>x$.

$[\log_2 x]=1\Rightarrow$ $2^t+1>2^\alpha$

$t<[\alpha]$

$[\log_2 x]=\log_2[x]$. $t\neq[\alpha]$. cм

$[x]=2^t$ $x=2^\alpha$ $t>[\alpha]$.

$[x]<x$

$S \quad v_1 = \frac{S}{3} \qquad v_2 = \frac{S}{n}$

$t > 8$

$v_1 \cdot t = S + v_2 \cdot t$

$\frac{S}{3} t = S + \frac{S}{n} t$

$\frac{t}{3} = 1 + \frac{t}{n}$

$tn = 3n + 3t$

$tn = 3(n+t)$

$t = \frac{3n}{n-3}$

$\frac{3n}{n-3} > 8$

$3n > 8n - 24$

$5n < 24 \qquad n = 4$

$n < 5$

$\frac{(3a+4b+2c)^3}{6abc} =$

$= \frac{(9a^2+16b^2+4c^2+24ab+12ac+16bc)\cdot(3a+4b+2c)}{6abc}$

$n \geq 3{,}4$

$\frac{3a+4b+2c}{3} \geq \sqrt[3]{24abc}$

$3a+4b+2c \geq 6\sqrt[3]{abc}$

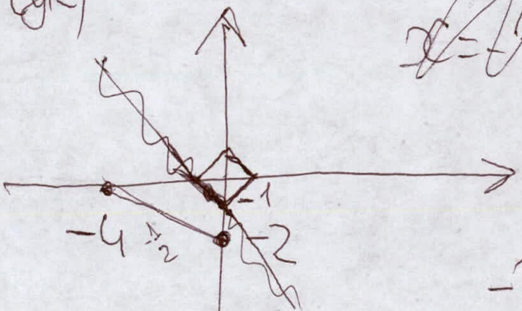
$(3a+4b+2c)^3 \geq 6^3 abc$

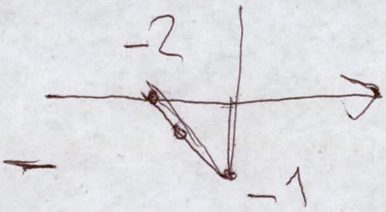
$p(x;y) \quad (-4;0) \quad N3 \qquad p(x;y) \quad (0;-2)$

$\sqrt{(x+4)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y+2)^2}$

$|x| + 2|y| = 2$

$x = -1 \qquad y = -\frac{1}{2}$





$\sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20}$

$y<0$

$x<0$

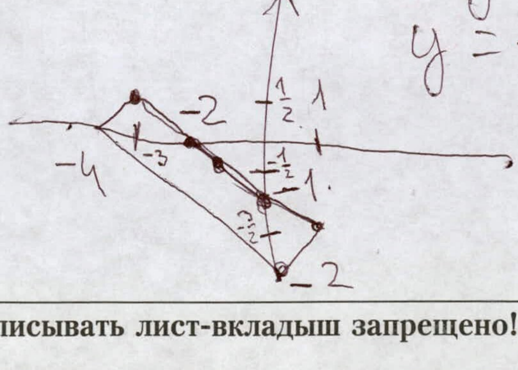
$-x-2y=2$

$x+2y=-2$

$|x| + 2|y| = \frac{3}{2}$

$y = \frac{-2-x}{2} = -\frac{x}{2} - 1 \qquad |y| = \frac{3}{4}$

$y = -\frac{3}{4}$



$\frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$