31-60-22-82
(205.1)

ОЛИМПИАДА ПВГ
2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

закончил в 16^{15}

Вариант 6-2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Покори Воробьевы горы

по математике

Кречина Ильи Валерьевича
фамилия, имя, отчество (в родительном падеже)

Дата
«27» марта 2016 года

Подпись участника

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

31-60-22-82 (205.1)

Черновик

ОЛИМПИАДА ПВГ 2016

95 девяносто пять

$\log_2 x - \log_3 x + \frac{1}{2}\log_2 x - 5 = \frac{3}{2}\log_2 5 - \frac{3}{3}\log_3 2 \cdot \log_2 5 - x$

$\frac{3}{2}\log_2 x - \log_3 x = \frac{3}{2}(\log_2 5 - \log_3 5) - x.$

$\frac{3}{2}\lg x\left(\frac{\lg 3 - \lg 2}{\lg 2 \cdot \lg 3}\right) = \frac{3}{2}\lg 5 \frac{\lg 3 - \lg 2}{\lg 2 \lg 3} - x$

$\frac{3}{2} a(\lg x - \lg 5) = x$

$\frac{9}{4} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{81}{16} \cdot \frac{3}{2} = \frac{243}{32} = \frac{729}{64}.$

~~$\lg x = \frac{x}{a} + \lg 5$~~

$\lg\frac{x}{5} = \frac{x}{a}$

$10^{\frac{x}{a}}$

$\frac{3}{2}$

$10^{\frac{x}{\frac{3}{2}\left(\frac{\lg\frac{3}{2}}{\lg 2 \lg 3}\right)}} = \frac{x}{5}.$

$10^{\frac{1}{\frac{3}{2}}}$

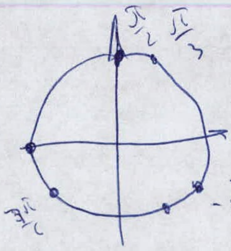
$10^{\frac{2\lg 2 \lg 3 x}{3\lg\frac{3}{2}}} = 2 \quad \frac{2}{3}\log_{\frac{3}{2}} 3 \cdot x = \frac{x}{5}.$

$\frac{3}{2}\log_2 x - \log_3 x - 5 = \frac{3}{2}\log_2 5 - \log_3 5 - x.$

$\frac{3}{2}\lg x \frac{\lg\frac{3}{2}}{\lg 2 \lg 3} - 5 = \frac{3}{2}\lg 5 \frac{\lg\frac{3}{2}}{\lg 2 \lg 3} - x$

$\frac{3}{2}\frac{\lg\frac{3}{2}}{\lg 2 \lg 3}(\lg x - \lg 5) = 5 - x.$

$\frac{3}{2}\lg\frac{3}{2}\log_2 10 \log_3 10($



$2k-1;\ 2k-30$

$(2k-1)\cdot 7 + (2k-30)\cdot 2 = (2k-30)\cdot 7 + 29\cdot 7 + (2k-30)\cdot 2 = (2k-30)\cdot 9 + 29\cdot 7$

~~$29k$~~

$29\cdot 7 = 203 = 23 = 5$

$31\cdot 7 + 2\cdot 2 =$

$29\cdot 7 =$

$\frac{3}{2}(\log_2 x - \log_2 5) = (\log_3 x - \log_3 5) - (x-5)$

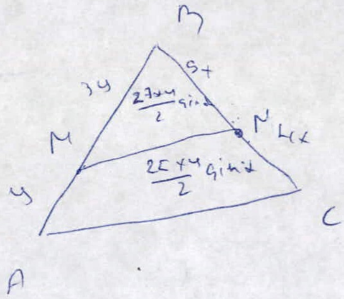
$\log_{\sqrt[3]{4}} x - \log_3 x - \frac{3}{2}\log_2 5 + \log_3 5 = 5 - x$

$\frac{3}{2} = \frac{1}{\cdot}$

$\lg x \quad \lg 3 - \lg\sqrt[3]{4}$

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$4\sin^3 \alpha - 3\sin\alpha + 1 = 0$



$S = \frac{1}{2} \cdot 3y \cdot 9x \cdot \sin\alpha$

$S = \frac{27xy}{2}\sin\alpha$

$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot y \cdot 13x \sin\alpha = \frac{52xy}{2}\sin\alpha$

$\cancel{27xy}$

$\frac{27xy\sin\alpha \cdot x}{x \cdot 25xy\sin\alpha} \cdot 100\%$

108%

$\sin(\sqrt{3}\arcsin\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{3}\arcsin\alpha = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \\ \sqrt{3}\arcsin\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \end{array}\right.$

$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{2\pi n}{\sqrt{3}} \le \frac{\pi}{2}, n \in Z$

$-\frac{1}{2} \le \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{2n}{\sqrt{3}} \le \frac{1}{2}, n \in Z$

$\cancel{\frac{2n}{\sqrt{3}}}\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \le \frac{1}{3} + 2n \le \frac{\sqrt{3}}{2}, n \in Z$

$\frac{-3\sqrt{3}-2}{12} \le 2n \le \frac{3\sqrt{3}-2}{12}, n \in Z$

$n = 0$

$\arcsin\alpha = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

$\sin^2\alpha(\sin^{11}3\alpha - 1)$

$\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)$

$\alpha = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right).$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

$\cancel{x}(3 - 4x^2)^1$

$(\sin^{13}3\alpha) = 1 - \cos^{13}3\alpha$

$33 \cdot 7 + 4 \cdot 2 =$

$= 231 + 8 = 239 = 234$

$\sin^{13}3\alpha + \cos^{13}3\alpha = 1$

Чистовик №1

№1

По условию задачи количество цифр 7 нечетно. Значит, $N_1 = 2k-1$; где $k \in \mathbb{N}$, N_1 – количество цифр 7. Также известно, что $N_2 = N_1 - 29$, где N_2 – кол-во цифр 2.

Как известно, остаток от деления числа на 9 равен остатку от деления суммы цифр числа на 9.

Сумма цифр числа X равна: $S = N_1 \cdot 7 + N_2 \cdot 2$.

$X \equiv S \pmod 9$; - число X имеет тот же остаток, что и число S;

$X \equiv (N_1 \cdot 7 + N_2 \cdot 2) \pmod 9$;

$X \equiv ((2k-1)\cdot 7 + (2k-30)\cdot 2) \pmod 9$;

$X \equiv ((2k-30)\cdot 7 + 29 \cdot 7 + (2k-30)\cdot 2) \pmod 9$;

$X \equiv ((2k-30)\cdot 9 + 29\cdot 7) \pmod 9$;

$X \equiv 203 \pmod 9$

$X \equiv (22 \cdot 9 + 5) \pmod 9$

$X \equiv 5 \pmod 9$

Значит, число X имеет остаток 5 при делении на 9.

верно

№2

$\log_2 x - \log_3 x + \log_4 x - 5 = \left(\frac{1}{2} - \log_3 \sqrt[3]{2}\right) \log_2 125 - x$

$\log_2 x - \log_3 x + \frac{1}{2}\log_2 x - 5 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\log_3 2\right) \cdot 3 \cdot \log_2 5 - x$

$\frac{3}{2}\log_2 x - \log_3 x - 5 = \frac{3}{2}\log_2 5 - \log_3 2 \log_2 5 - x$

$\frac{3}{2}\{\log_2 x - \log_3 x - 5 = \frac{3}{2}\log_2 5 - \cancel{\log_3 2}\,\frac{\log_3 5}{\cancel{\log_3 2}} - x$

$\frac{3}{2}\{\log_2 x - \log_3 x - 5 = \frac{3}{2}\log_2 5 - \log_3 5 - x$

Решим первое уравнение:

$\sin(\sqrt{3}\arcsin x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{3}\arcsin x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n\in Z \\ \sqrt{3}\arcsin x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n\in Z \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \arcsin x = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\pi n,\ n\in Z \\ \arcsin x = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\pi n,\ n\in Z \end{array}\right.$

1° $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\pi n \le \frac{\pi}{2},\ n\in Z$

$-\frac{\sqrt{3}}{2} \le \frac{1}{3} + 2n \le \frac{\sqrt{3}}{2},\ n\in Z$

$\frac{-3\sqrt{3}-2}{12} \le n \le \frac{3\sqrt{3}-2}{12},\ n\in Z$

$n = 0.$

Если $n=0$, то $\arcsin x = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

$x = \sin\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

2° $-\frac{\pi}{2} \le \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\pi n \le \frac{\pi}{2},\ n\in Z$

$-\frac{\sqrt{3}}{4} \le \frac{1}{3} + n \le \frac{\sqrt{3}}{4},\ n\in Z$

$\frac{-3\sqrt{3}-4}{12} \le n \le \frac{3\sqrt{3}-4}{12},\ n\in Z$

$n = 0$

Если $n=0$, то $\arcsin x = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

$x = \sin\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

Решим второе уравнение:

$\sqrt{2}\sin 3x + \sqrt{2+\cos 3x} = 0$

$\sqrt{2}\sin 3x = -\sqrt{2+\cos 3x}$

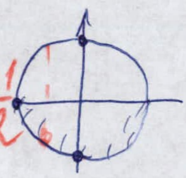
$\sin 3x \le 0$

$2\sin^2 3x = 2 + \cos 3x$

$\cancel{2} - 2\cos^2 3x = \cancel{2} + \cos 3x$

$\cos 3x(2\cos 3x + 1) = 0$

$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \cos 3x = 0 \\ \cos 3x = -1 \end{array}\right. \\ \sin 3x \le 0 \end{array}\right.$ $\cos 3x = -\frac{1}{2}$



$\left[\ \cancel{\cos 3x = -1}\right.$

(арифм. ош.)

$\left[\begin{array}{l} 3x = \pi + 2\pi n,\ n\in Z \\ 3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n\in Z \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3},\ n\in Z \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3},\ n\in Z \end{array}\right.$

Найдем ОДЗ переменной x:

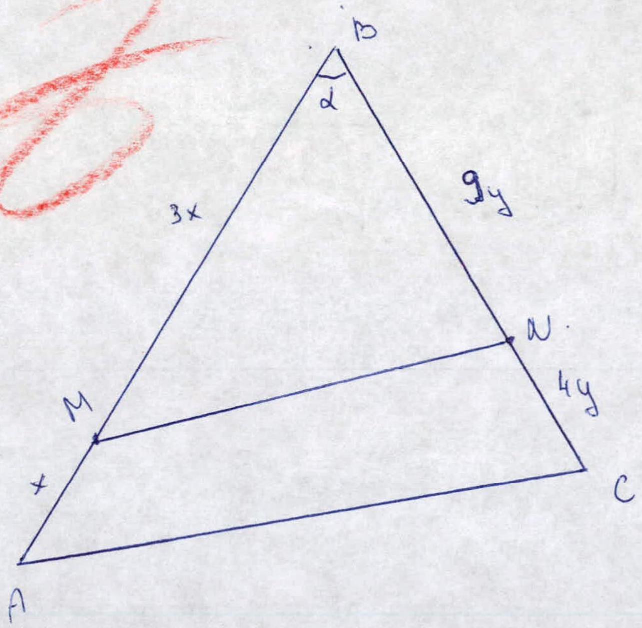
$\left\{\begin{array}{l} -1 \le x \le 1 \\ 2 + \cos 3x \ge 0 \end{array}\right.$ $-1 \le x \le 1$

$-1 \le \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3} \le 1,\ n\in Z$

$\frac{-\pi-3}{3} \le \frac{2\pi n}{3} \le \frac{3-\pi}{3},\ n\in Z$

$\frac{-\pi-3}{2\pi} \le n \le \frac{3-\pi}{2\pi},\ n\in Z$ $n \in \emptyset$

№ 3.



1) По условию:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{1}{3}; \quad \frac{CN}{BN} = \frac{4}{9}$$

Значит, $AM = x$; $MB = 3x$; $CN = 4y$; $BN = 9y$, где x и y – коэффициенти подобия

2) Пусть α – угол $\angle ABC$.

3) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \hat{ABC}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4x \cdot 13y \sin \hat{ABC}$

$S_{ABC} = 26xy \sin \hat{ABC}$

$S_{ABC} = 26xy \sin \alpha$

4). $S_{MBN} = \frac{1}{2} \cdot MB \cdot BN \sin \hat{MBN}$

$S_{MBN} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 9y \sin \alpha$

$S_{MBN} = \frac{27xy}{2} \sin \alpha$

5) $S_{AMNC} = S_{ABC} - S_{MBN}$

$S_{AMNC} = 26xy \sin \alpha - \frac{27}{2} xy \sin \alpha = \frac{1}{2} xy \sin \alpha (52 - 27)$

$S_{AMNC} = \frac{25}{2} xy \sin \alpha$

6) $\dfrac{S_{MBN}}{S_{AMNC}} = \dfrac{\frac{27xy}{2} \sin \alpha}{\frac{25}{2} xy \sin \alpha} = \dfrac{27}{25}$;

7) $\omega = \frac{27}{25} \cdot 100\%$

$\omega = 108\%$

Ответ: 108%

верно

№ 4.

$$(2 \sin(\sqrt{3} \arcsin x) - \sqrt{3})(\sqrt{2} \sin 3x + \sqrt{2 + \cos 3x}) = 0$$

$$\left[\begin{array}{ll} 2 \sin(\sqrt{3} \arcsin x) - \sqrt{3} = 0 & (1) \\ \sqrt{2} \sin 3x + \sqrt{2 + \cos 3x} = 0 & (2) \end{array} \right.$$

Шифр

$\log_{2^{\frac{2}{3}}} x - \log_3 x = 5 + \frac{3}{2}\log_2 5 - \log_3 5 - x$

$\frac{\log_3 x}{\frac{2}{3}\log_3 2} - \log_3 x = 5 + \frac{3}{2}\log_2 5 - \log_3 5 - x$

$\log_3 x\left(\frac{3}{2\log_3 2} - 1\right) = 5 + \frac{3}{2}\log_2 5 - \log_3 5 - x$

$\log_3 x\left(\frac{\log_3 27 - \log_3 4}{\log_3 4}\right) = 5 + \frac{3}{2}\log_2 5 - \log_3 5 - x$

$\log_4 \frac{27}{4}\cdot\log_3 x = 5 + \frac{3}{2}\log_2 5 - \log_3 5 - x.$

Рассмотрим $y_1 = \log_4\frac{27}{4}\log_3 x$ и

$y_2 = 5 + \frac{3}{2}\log_2 5 - \log_3 5 - x.$

$\log_4\frac{27}{4} > 0 \Rightarrow y_1$ – возрастающая функция при всех возможных x.

в y_2 – убывающая функция при всех допустимых значениях x, т.к. коэффициент перед x – -1.

Значит, точек пересечения графиков будет не более одной

Проверим, является $x=5$ корнем:

$\log_4\frac{27}{4}\cdot\log_3 5 = \cancel{5} + \frac{3}{2}\log_2 5 - \log_3 5 \cancel{-5}$

$\cancel{\frac{3}{2}\log_2 3\,\frac{\log_2 5}{\log_2 3}} =$

$\left(\frac{3}{2}\log_2 3 - 1\right)\log_3 5 = \frac{3}{2}\log_2 5 - \log_3 5$

$\frac{3}{2}\cancel{\log_2 3}\,\frac{\log_2 5}{\cancel{\log_2 3}} - \log_3 5 = \frac{3}{2}\log_2 5 - \log_3 5$

$\frac{3}{2}\log_2 5 - \log_3 5 = \frac{3}{2}\log_2 5 - \log_3 5$ (и).

Значит, $x=5$ – корень

Ответ: $x=5$. верно

Чистовик №2

№4 (продолжение)

$$\cancel{-\pi} \quad -1 \le -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} \le 1, \; n \in Z$$

$$-6 \le -\pi + 4\pi n \le 6, \; n \in Z$$

$$\pi - 6 \le 4\pi n \le 6 + \pi, \; n \in Z$$

$$\frac{\pi - 6}{4\pi} \le n \le \frac{\pi + 6}{4\pi}, \; n \in Z$$

$$\cancel{n = \pm 0; 1}; \; n = 0.$$

Если $n = 0$, то $x = -\frac{\pi}{6}$.

$$\left[\begin{array}{l} x = \sin\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \\ x = \sin\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \\ x = -\frac{\pi}{6} \end{array}\right.$$

Ответ: $\sin\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; $\sin\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; $-\frac{\pi}{6}$

потеряли 1 корень из-за ар. ош.

№5

$$(3x - 4x^3)^{13} = 1 - (4y^3 - 3y)^{18}; \quad x^2 = 1 - y^2$$

Т.к необходимо найти кол-во точек, через которые проходят обе кривые, то необходимо найти количество решений данной системы:

$$\begin{cases} (3x - 4x^3)^{13} = 1 - (4y^3 - 3y)^{18} \\ x^2 = 1 - y^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (3x - 4x^3)^{13} + (4y^3 - 3y)^{18} = 1 \\ x^2 + y^2 = 1. \quad (2) \end{cases}$$

Т.к числа x и y удовлетворяют условию (2), то мы можем заменить следующим образом:

$$\begin{cases} x = \sin\alpha \\ y = \cos\alpha \end{cases}$$

Значит, получим такую систему:

$$\begin{cases} (3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)^{13} + (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)^{18} = 1 \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad (и) \end{cases} \qquad \sin^{13} 3\alpha + \cos^{18} 3\alpha = 1.$$

$$\sin^{13} 3\alpha + \cos^{18} 3\alpha = 1$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin^{13} 3\alpha = 1 \\ \cos^{18} 3\alpha = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin^{13} 3\alpha = 0 \\ \cos^{18} 3\alpha = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$$\left[\begin{cases}\sin 3\alpha = 1\\ \cos 3\alpha = 0\end{cases}\right. \quad \begin{cases}\sin 3\alpha = 0\\ \cos 3\alpha = 1\end{cases} \quad \begin{cases}\sin 3\alpha = 0\\ \cos 3\alpha = -1\end{cases}$$

$$\left[\begin{cases}3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 1\\ 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 0\end{cases}\right. \quad \begin{cases}3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 0\\ 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 1\end{cases} \quad \begin{cases}3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 0\\ 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = -1\end{cases}$$

$$\left[\begin{cases}4\sin^3\alpha - 3\sin\alpha + 1 = 0\\ \cos\alpha\left(\cos\alpha - \frac{\sqrt3}{2}\right)\left(\cos\alpha + \frac{\sqrt3}{2}\right) = 0\end{cases}\right. \quad \begin{cases}\sin\alpha(3 - 4\sin^2\alpha) = 0\\ 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha - 1 = 0\end{cases} \quad \begin{cases}\sin\alpha(4\sin^2\alpha - 3) = 0\\ 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 1 = 0\end{cases}$$

$$\left[\begin{cases}(\sin\alpha + 1)(4\sin^2\alpha - 4\sin\alpha + 1) = 0\\ \cos\alpha\left(\cos\alpha - \frac{\sqrt3}{2}\right)\left(\cos\alpha + \frac{\sqrt3}{2}\right) = 0\end{cases}\right. \quad \begin{cases}\sin\alpha\left(\sin\alpha - \frac{\sqrt3}{2}\right)\left(\sin\alpha + \frac{\sqrt3}{2}\right) = 0\\ (\cos\alpha - 1)(4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 1) = 0\end{cases} \quad \begin{cases}\sin\alpha\left(\sin\alpha - \frac{\sqrt3}{2}\right)\left(\sin\alpha + \frac{\sqrt3}{2}\right) = 0\\ (\cos\alpha + 1)(4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 1) = 0\end{cases}$$

Выполним обратную замену:

$$\begin{cases}\sin\alpha = x\\ \cos\alpha = y.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{cases}(x+1)(2x-1)^2 = 0\\ y\left(y - \frac{\sqrt3}{2}\right)\left(y + \frac{\sqrt3}{2}\right) = 0\end{cases}\right. \quad \begin{cases}x\left(x - \frac{\sqrt3}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt3}{2}\right) = 0\\ (y-1)(2y+1)^2 = 0\end{cases} \quad \begin{cases}x\left(x - \frac{\sqrt3}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt3}{2}\right) = 0\\ (y+1)(2y-1)^2 = 0\end{cases}\\ x^2 + y^2 = 1\end{cases}$$

$$\left[\begin{cases}x = -1\\ y = 0\end{cases}\ (1) \quad \begin{cases}x = \frac12\\ y = \pm\frac{\sqrt3}{2}\end{cases}\ (2) \quad \begin{cases}x = 0\\ y = 1\end{cases}\ (1) \quad \begin{cases}x = \pm\frac{\sqrt3}{2}\\ y = -\frac12\end{cases}\ (2) \quad \begin{cases}x = 0\\ y = -1\end{cases}\ (1) \quad \begin{cases}x = \pm\frac{\sqrt3}{2}\\ y = \frac12\end{cases}\ (2)\right.$$

$N = 9.$

Значит, всего пар: $N = 9$.

Следовательно, кол-во точек, через которые проходят обе прямые, равно 9.

Ответ: 9.